

УДК 539.3

## ОСОБЕННОСТИ ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Григоренко А. Я., д. ф.-м. н., профессор, Панкратьев С. А., аспирант,  
Яремченко С. Н., к. ф.-м. н.

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, Киев, Украина*

ayagrigorenko@yandex.ua

В статье изложены основные положения подхода для статического анализа ортотропных пластин сложной формы на базе уточненной теории. Рассмотрен переход от неортогональной системы координат к ортогональной при помощи соответствующего преобразования, что позволило применить для решения рассматриваемых задач методы сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации.

Особенности применения подхода исследованы на примере серии изотропных пластин в форме дельтоидов и трапеций под воздействием равномерно распределенной нагрузки. Показано влияние геометрических параметров пластин и различных вариантов краевых условий на характеристики поверхности прогиба.

*Ключевые слова: пластина сложной формы, напряженно-деформированное состояние, метод сплайн-коллокации, теория типа Тимошенко.*

## ОСОБЛИВОСТІ ПІДХОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Григоренко О. Я., д. ф.-м. н., професор, Панкратьев С. А., аспірант,  
Яремченко С. М., к. ф.-м. н.

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
вул. Нестерова, 3, Київ, Україна*

ayagrigorenko@yandex.ua

У статті викладені основні положення підходу для статичного аналізу ортотропних пластин складної форми на базі уточненої теорії. Розглянуто перехід від неортогональної системи координат до ортогональної за допомогою відповідного перетворення, що дозволило застосувати для розв'язання розглянутих задач методи сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації.

Особливості застосування підходу досліджені на прикладі серії ізотропних пластин у формі дельтоїдів і трапецій під впливом рівномірно розподіленого навантаження. Показано вплив геометричних параметрів пластин і різних варіантів граничних умов на характеристики поверхні прогину.

*Ключові слова: пластина складної форми, напружено-деформований стан, метод сплайн-колокації, теорія типу Тимошенка.*

## SOME FEATURES OF APPROACH TO SOLVING PROBLEMS ON THE STRESS-STRAIN STATE OF PLATES OF COMPLEX SHAPE

Grigorenko A. Ya., D.Sc. in Physics and Math, Professor,  
Pankratiev S. A., graduate student, Yaremchenko S. N., Ph.D. in Physics and Math

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,  
Nesterova str., 3, Kyiv, 03057, Ukraine*

ayagrigorenko@yandex.ua

The article describes the main points of approach for the static analysis of orthotropic plates of complex shape based on refined plates theory. Transition from non-orthogonal to an orthogonal coordinate

system using the corresponding transform is considered. This has made it possible applying the methods of spline-collocation and discrete orthogonalization for solution of these problems.

At the first stage, the basic relations that describe the stress-strain state of plates of complex shape in a non-orthogonal coordinate system are reduced by the transformation to a problem on the study of a rectangular plate in the orthogonal coordinate system. Modified in a way the boundary value problem is solved by numerical and analytical approach, which consists of two steps: conversion of two-dimensional boundary value problem in a one-dimensional by the method of spline collocation and resolving it with method of discrete orthogonalization.

Features of the approach that may appear as a difficulties in the calculations are studied by the example of series of isotropic plates in the form of deltoids and trapezoids with different geometry parameters under the influence of a uniformly distributed load. The boundary conditions for the hard, simply supported and free fixation of the edges are considered. The effect of the geometric parameters of the plates and the various options for the boundary conditions on the characteristics of the deflection surface is shown.

*Key words: plates of complex shape, static analysis, method of spline-approximation, refined theory.*

## ВВЕДЕНИЕ

Широкое использование пластин из композитных материалов в качестве элементов механизмов и сооружений обуславливает постоянный интерес к методам анализа их прочностных характеристик. Среди используемых подходов, наряду с конечноэлементными и конечноразностными схемами, также широко применяются численно-аналитические методы анализа с использованием сплайн-аппроксимации [1–3], позволяющие сводить исходную двумерную краевую задачу к одномерной. Существующие для подобных подходов ограничения позволяют анализировать пластины в форме прямоугольника или диска, но испытывают сложности либо требуют применения специальных преобразований для задач со сложной геометрией объекта [3–5].

В данной статье авторами предложен подход на основе методов сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации с применением преобразования координат, которое позволяет свести исследуемую область к квадрату  $[0..1, 0..1]$ . Это дает возможность проводить решение задач о напряженно-деформированном состоянии ортотропных пластин, имеющих в плане форму произвольного выпуклого четырехугольника, на основе уточненной теории при различных вариантах распределения поверхностной нагрузки и закрепления краев.

В данной работе особое внимание уделено особенностям предложенного подхода для анализа четырехугольных пластин сложной формы, при исследовании которых могут возникать трудности вычислительного характера.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии прямоугольной  $(0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b)$  ортотропной пластины толщиной  $h$  под воздействием равномерно распределенной поверхностной нагрузки  $q$  и запишем уравнения равновесия в соответствии с уточненной теорией на базе гипотезы прямой линии [6]:

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + q = 0, \quad M_{1,1} + M_{21,2} - Q_1 = 0, \quad M_{2,2} + M_{12,1} - Q_2 = 0, \quad (1)$$

где  $Q_1, Q_2$  — усилия среза,  $M_1, M_2, M_{21}, M_{12}$  — моменты изгиба и скручивания. Здесь и далее индексами после запятой обозначено дифференцирование по соответствующей координате.

Соотношения упругости для ортотропной пластины, чьи оси ортотропии совпадают с координатными осями, записываются как:

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2, \quad M_2 = D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2, \\ M_{12} &= M_{21} = 2D_{66}\kappa_{12}, \quad Q_1 = K_1\gamma_1, \quad Q_2 = K_2\gamma_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{12} = \nu_2 D_{11}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)},$$

$$D_{66} = \frac{G_{12}h^3}{12}, K_1 = \frac{5}{6}hG_{13}, K_2 = \frac{5}{6}hG_{23}.$$

Под  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$  подразумеваем деформации изгиба,  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  — модули упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях  $x_1$  и  $x_2$ ,  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  — модули сдвига.

Выражения для деформаций через полные углы поворота  $\psi_1, \psi_2$  прямолинейного элемента:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \psi_{1,1}, & \kappa_2 &= \psi_{2,2}, & 2\kappa_{12} &= \psi_{1,2} + \psi_{2,1}, \\ \gamma_1 &= \psi_1 + w_{,1}, & \gamma_2 &= \psi_2 + w_{,2}, \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия для жесткого закрепления на сторонах  $x_1 = const$  имеют вид:

$$w = 0, \psi_1 = 0, \psi_2 = 0,$$

для шарнирного —

$$w = 0, \psi_{1,1} = 0, \psi_2 = 0,$$

а для свободного края —

$$Q_1 = \psi_1 + w_{,1} = 0, \quad M_1 = \psi_{1,1} + \nu_2\psi_{2,2} = 0, \quad M_{12} = \psi_{1,2} + \psi_{2,1} = 0$$

и на сторонах  $x_2 = const$  задаются аналогично. Объединив уравнения равновесия (1) соотношения упругости (2) и выражения для деформаций (3), получим разрешающую систему уравнений относительно прогиба  $w$  и углов  $\psi_1, \psi_2$ :

$$\begin{aligned} K_1\psi_{1,1} + K_1w_{,11} + K_2\psi_{2,2} + K_2w_{,22} &= -q, \\ D_{11}\psi_{1,11} + D_{12}\psi_{2,12} + D_{66}\psi_{1,22} + D_{66}\psi_{2,12} - K_1\psi_1 - K_1w_{,1} &= 0, \\ D_{22}\psi_{2,22} + D_{12}\psi_{1,12} + D_{66}\psi_{2,11} + D_{66}\psi_{1,12} - K_2\psi_2 - K_2w_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для описания произвольной области в пространстве координат  $x_1, x_2$ , ограниченной сторонами выпуклого четырехугольника, переведем ее в нормированную область  $[0 \leq \xi_1 \leq 1], [0 \leq \xi_2 \leq 1]$  в новой системе координат  $\xi_1, \xi_2$  с помощью замены переменных

$$\bar{x} = T \cdot \bar{\xi}, \quad (5)$$

где вектор  $\bar{x}$  имеет компоненты  $\{x_1, x_2\}$ , вектор  $\bar{\xi}$  компоненты  $\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2\}$ , а компоненты  $t_{ij}$  матрицы перехода  $T$  определяются геометрией срединной поверхности четырехугольной пластины. Для четырехугольника с вершинами в точках  $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), (x_{13}, x_{23}), (x_{14}, x_{24})$  они выражаются как

$$\begin{aligned} t_{11} &= x_{12}, & t_{12} &= x_{13} - x_{12}, & t_{13} &= x_{11} - x_{12}, & t_{14} &= x_{14} - x_{13} + x_{12} - x_{11}, \\ t_{21} &= x_{22}, & t_{22} &= x_{23} - x_{22}, & t_{23} &= x_{21} - x_{22}, & t_{24} &= x_{24} - x_{23} + x_{22} - x_{21}. \end{aligned}$$

Для записи разрешающей системы уравнений (4) в новых координатах с учетом преобразования (5) используем вектор  $\bar{f}$  с 18 компонентами  $\{\psi_1, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,11}, \psi_{1,22}, \psi_{1,12}, \psi_2, \dots, w_{,12}\}$  и соответствующую матрицу коэффициентов  $S$  размером  $3 \times 18$ . Уравнения (4) примут вид:

$$S \cdot \bar{f} = \bar{q}, \quad (6)$$

где вектор правых частей  $\bar{q} = \{-q, 0, 0\}$ .

Определение элементов матрицы  $\tilde{S}$ , аналогичной  $S$  и представляющей коэффициенты уравнений (4) в новой системе координат, требует нахождения выражений для всех компонентов вектора  $\bar{f}$  с учетом преобразования (5). Приведем вывод этих соотношений на примере функции прогиба  $w(x_1, x_2)$ .

Первые производные находятся из системы уравнений, составленной на основе известных выражений для частной производной сложной функции

$$w_{;1} = w_{,1}x_{1;1} + w_{,2}x_{2;1}, \quad w_{;2} = w_{,1}x_{1;2} + w_{,2}x_{2;2}.$$

Ее решением будут выражения

$$w_{;1} = Aw_{,1} + Bw_{,2}, \quad w_{;2} = Cw_{,1} + Dw_{,2}, \quad (7)$$

где  $A, B, C, D$  — выражения относительно  $\xi_1, \xi_2$ :

$$A = x_{2;2}/(x_{1;1}x_{2;2} - x_{1;2}x_{2;1}), \quad B = -x_{2;1}/(x_{1;1}x_{2;2} - x_{1;2}x_{2;1}), \\ C = -x_{1;2}/(x_{1;1}x_{2;2} - x_{1;2}x_{2;1}), \quad D = x_{1;1}/(x_{1;1}x_{2;2} - x_{1;2}x_{2;1})$$

или в явном виде

$$A = (t_{24}\xi_1 + t_{23})/\chi, \quad B = -(t_{24}\xi_2 + t_{22})/\chi, \\ C = -(t_{14}\xi_1 + t_{13})/\chi, \quad D = (t_{14}\xi_2 + t_{12})/\chi, \quad (8)$$

с обозначением  $\chi = (t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})\xi_1 + (t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})\xi_2 + (t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13})$ .

Имея выражения для первых производных (7), можно получить и вторые частные производные, заменяя в правой части (7) функцию  $w$  на  $w_{,1}$  либо  $w_{,2}$ :

$$w_{;11} = (AA_{;1} + BA_{;2})w_{,1} + (AB_{;1} + BB_{;2})w_{,2} + A^2w_{;11} + B^2w_{;22} + 2ABw_{;12}, \\ w_{;22} = (CC_{;1} + DC_{;2})w_{,1} + (CD_{;1} + DD_{;2})w_{,2} + C^2w_{;11} + D^2w_{;22} + 2CDw_{;12}, \\ w_{;12} = (AC_{;1} + BC_{;2})w_{,1} + (AD_{;1} + BD_{;2})w_{,2} + ACw_{;11} + BDw_{;22} + (AD + BC)w_{;12}. \quad (9)$$

Далее рассмотрим некий вектор  $\bar{m}$  с компонентами  $\{w_{,1}, w_{,2}, w_{;11}, w_{;22}, w_{;12}\}$ , которые являются производными функции  $w(x_1, x_2)$  в исходной системе координат, соответствующий ему вектор  $\bar{m}^*$  с компонентами  $\{w_{;1}, w_{;2}, w_{;11}, w_{;22}, w_{;12}\}$  в новых координатах и матрицу перехода  $L$ , для которых справедливо соотношение

$$\bar{m} = L \cdot \bar{m}^*. \quad (10)$$

Имея из (7) и (9) соотношения между компонентами  $\bar{m}$  и  $\bar{m}^*$ , можно записать ненулевые элементы матрицы перехода  $L$ :

$$l_{11} = A, \quad l_{12} = B, \quad l_{21} = C, \quad l_{22} = D, \\ l_{31} = AA_{;1} + BA_{;2}, \quad l_{32} = AB_{;1} + BB_{;2}, \quad l_{33} = A^2, \quad l_{34} = B^2, \quad l_{35} = 2AB, \\ l_{41} = CC_{;1} + DC_{;2}, \quad l_{42} = CD_{;1} + DD_{;2}, \quad l_{43} = C^2, \quad l_{44} = D^2, \quad l_{45} = 2CD, \\ l_{51} = AC_{;1} + BC_{;2}, \quad l_{52} = AD_{;1} + BD_{;2}, \\ l_{53} = AC, \quad l_{54} = BD, \quad l_{55} = AD + BC.$$

По аналогии с вектором  $\bar{f}$  для исходной системы координат введем вектор  $\bar{f}^*$  с 18 компонентами  $\{\psi_1, \psi_{1;1}, \psi_{1;2}, \psi_{1;11}, \psi_{1;22}, \psi_{1;12}, \psi_2, \dots, w_{;12}\}$  и матрицу перехода  $P$  такую, что

$$P \cdot \bar{f}^* = \bar{f}. \quad (11)$$

В состав компонентов векторов  $\bar{f}$  и  $\bar{f}^*$  входят производные трех функций, для каждой из которых применимо соотношение (10). Введем обозначения:  $O$  — нулевая матрица размером  $5 \times 5$ ,  $o_c$  — нулевой вектор-столбец из пяти компонент,  $o_r$  — нулевая вектор-строка из пяти компонент. Тогда матрица  $P$  будет иметь вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & o_r & 0 & o_r & 0 & o_r \\ o_c & L & o_c & O & o_c & O \\ 0 & o_r & 1 & o_r & 0 & o_r \\ o_c & O & o_c & L & o_c & O \\ 0 & o_r & 0 & o_r & 1 & o_r \\ o_c & O & o_c & O & o_c & L \end{pmatrix}$$

С учетом (11) уравнения (6) запишутся в новой системе координат как

$$S \cdot (P \cdot \bar{f}^*) = \bar{q}^*$$

или

$$\tilde{S} \cdot \bar{f}^* = \bar{q}^*, \tag{12}$$

где  $\bar{f}^*$  и  $\bar{q}^*$  — аналоги векторов  $\bar{f}$  и  $\bar{q}$  в новой системе координат.

Уравнения (12) представляют собой разрешающую систему уравнений (4) в системе координат  $\xi_1 0 \xi_2$  и содержат в себе информацию о геометрии исследуемой четырехугольной пластины.

В случае использования граничных условий, содержащих производные функции прогиба  $w$  и углов  $\psi_1, \psi_2$  (шарнирное закрепление, свободный край), для решения задачи необходимо учесть изменения, обусловленные переходом к новой системе координат согласно (10). Граничные условия при шарнирном закреплении на сторонах  $\xi_1 = const$  принимают вид:

$$w = 0, \quad A\psi_{1;1} + B\psi_{1;2} = 0, \quad \psi_2 = 0$$

с аналогичными поправками для  $\psi_2$  на сторонах  $\xi_2 = const$ . В свою очередь, соотношения для свободного края на сторонах  $\xi_1 = const$  изменяются на

$$\begin{aligned} \psi_1 + Aw_{;1} + Bw_{;2} &= 0, \\ A\psi_{1;1} + B\psi_{1;2} + v_2(C\psi_{2;1} + D\psi_{2;2}) &= 0, \\ C\psi_{1;1} + D\psi_{1;2} + A\psi_{2;1} + B\psi_{2;2} &= 0. \end{aligned}$$

Выражения  $A$  и  $B$  подразумеваются в значении, приведенном в (8).

В сочетании с теми или иными граничными условиями уравнения (12) образуют двумерную краевую задачу в уточненной постановке. Поскольку исходная область в виде произвольного четырехугольника в новых координатах имеет вид квадрата, упрощается задание граничных условий и для решения краевой задачи становится возможным использование метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом сплайн-коллокации.

Для анализа ограничений на форму четырехугольной пластины, которые обусловлены применением предложенного подхода, рассмотрим два набора фигур: дельтоиды и трапеции. Переменным параметром, допустимые значения которого предстоит определить, будет угол  $\alpha$  (рис. 1) в первом случае и соотношение оснований  $a/b$  (рис. 2) во втором. Для угла  $\alpha$  дельтоидов рассмотрим как предельно малые, так и предельно большие значения. Длина сторон дельтоида, непосредственно образующих угол  $\alpha$ , принята за 1, а оставшиеся углы  $\beta$  приняты равными. У равнобедренной трапеции приняты за 1 длины основания  $a$  и боковых сторон.

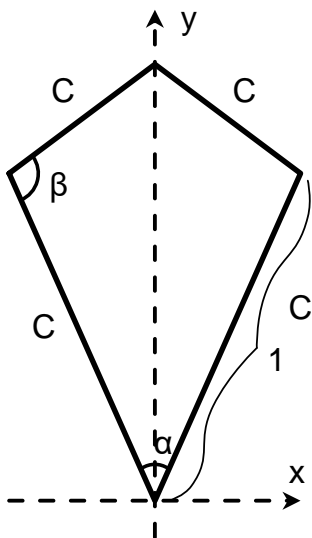


Рис. 1

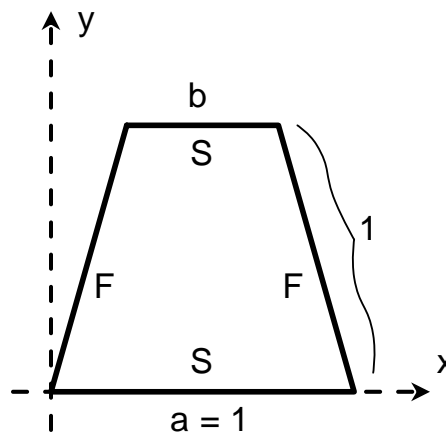


Рис. 2

Граничные условия для дельтоидов рассмотрены в виде жесткого защемления (clamped, C), а для трапеций — с шарнирным закреплением на основаниях (simply supported, S) и свободным краем на сторонах (free edge, F).

Поверхностную нагрузку  $q(x_1, x_2)$  будем полагать равномерно распределенной ( $q = q_0$ ), а пластины толщиной  $h = 0,1$  с целью упрощения расчета — изотропными ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ).

## 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Для решения сформированного набора задач применен многократно описанный в научной литературе и публикациях [2, 6, 7] метод дискретной ортогонализации (дискретной прогонки) в сочетании с методом сплайн-коллокации.

Поскольку разрешающая система уравнений получена на базе уточненной теории пластин и, соответственно, в уравнениях присутствуют частные производные искомым функций до второго порядка включительно, для сплайн-аппроксимации использованы В-сплайны третьей степени. Решение задачи, например для функции прогиба  $w(x_1, x_2)$ , ищется в виде

$$w(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^N w_i(x_1) \varphi_i(x_2), \quad (13)$$

где  $w_i$  — неизвестные функции,  $\varphi_i$  — линейные комбинации В-сплайнов третьей степени. Расчет аппроксимирующих функций  $\varphi_i$  с учетом условий закрепления на краях производится по схеме, приведенной в [5]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_2) &= \alpha_{11} B_3^{-1} + \alpha_{12} B_3^0, \\ \varphi_1(x_2) &= B_3^{-1} + \alpha_{21} B_3^0 + \alpha_{22} B_3^1, \\ \varphi_i(x_2) &= B_3^i, \quad i = 2, \dots, N-2, \\ \varphi_{N-1}(x_2) &= B_3^{N+1} + \beta_{21} B_3^N + \beta_{22} B_3^{N-1}, \\ \varphi_N(x_2) &= \beta_{11} B_3^{N+1} + \beta_{12} B_3^N. \end{aligned}$$

Сплайн-функции  $B_3^i$  строятся на равномерной сетке узлов  $\Delta$  с шагом  $x_2^{i+1} - x_2^i$ ; коэффициенты  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$ , с учетом обозначений

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad A_\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix},$$

для жесткого закрепления на краях  $x_2 = const$  равны

$$A_\alpha = A_\beta = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

а для шарнирного —

$$A_\alpha = A_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

С целью повышения точности аппроксимации, точки коллокации выбираются внутри интервалов между узлами сетки  $x_2^{2i}, x_2^{2i+1}$  по схеме:  $\epsilon_{2i} = x_2^{2i} + t_1(x_2^{2i+1} - x_2^{2i})$ ,  $\epsilon_{2i+1} = x_2^{2i} + t_2(x_2^{2i+1} - x_2^{2i})$ , где  $t_1, t_2$  — корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке  $[0; 1]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Используя представление искомым функций в форме (13), из исходной двумерной краевой задачи получаем одномерную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Последняя решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [7].

При расчетах для всех обозначенных ранее задач была использована аппроксимация по координате  $\xi_2$  с 30 парами точек коллокации. Решение полученной таким образом системы ОДУ произведено для 1500 точек интегрирования.

### 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Влияние формы изотропных пластин в виде дельтоида на численное решение задачи и параметры искомой поверхности прогиба  $w(x_1, x_2)$  при воздействии равномерно распределенной нагрузки было исследовано для 10 вариантов значений угла  $\alpha$ . Последние наряду с нормированной величиной максимального прогиба  $\hat{w} = wE/q_0$  и координатами соответствующих точек приведены в табл. 1.

Общая форма поверхности прогиба для угла  $\alpha = 15^\circ$  показана на рис. 3 с сохранением масштаба по осям, а на рис. 4 — с числовыми значениями изолиний поверхности без сохранения масштаба. Поверхность прогиба для некоторых других значений  $\alpha$  показана на рис. 6–9. При значении  $\alpha = 1^\circ$  расчет привел к некорректному результату, что нашло свое отражение в табл. 1 и на рис. 5.

Таблица 1 — Результаты расчетов максимального прогиба  $\hat{w}$  и координат соответствующей точки для дельтоидов при различных значениях угла  $\alpha$

$\alpha$	$\hat{w}_{max}$	$x_1$	$x_2$
$1^\circ$	—*	—	—
$2^\circ$	0,0043426	9,31E-05	0,962714
$5^\circ$	0,0257738	8,72E-05	0,931212
$10^\circ$	0,103236	-5,81E-05	0,896618
$15^\circ$	0,245628	-5,22E-04	0,872174
$165^\circ$	33,8905	-0,00132193	0,600752
$170^\circ$	33,8474	-0,00199239	0,593863
$175^\circ$	33,6256	-0,00266413	0,587146
$178^\circ$	33,4112	-9,99E-16	0,579916
$179^\circ$	33,3252	0,00133328	0,577947

\* получен некорректный результат

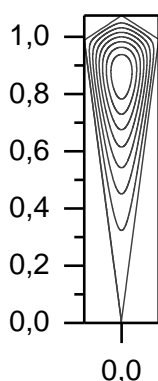


Рис. 3.  $\alpha = 15^\circ$

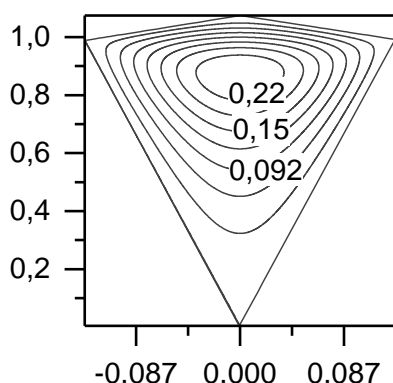


Рис. 4.  $\alpha = 15^\circ$

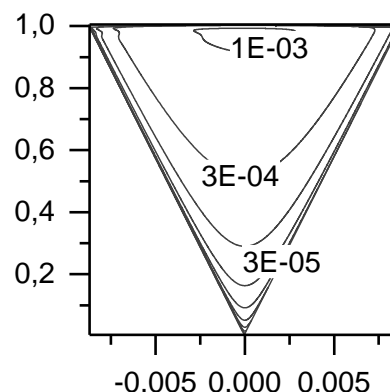


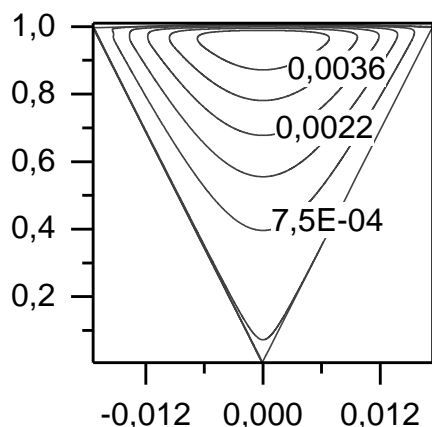
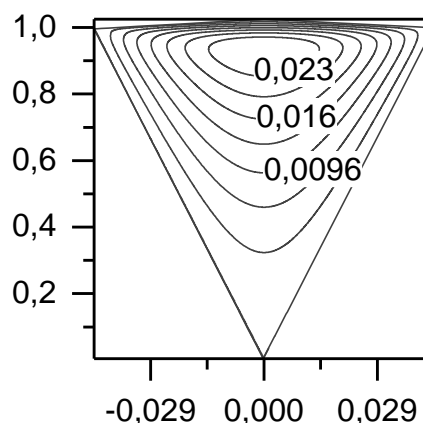
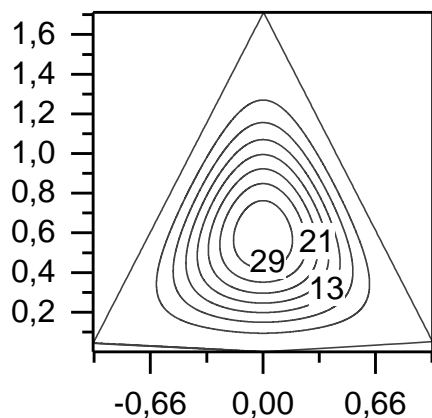
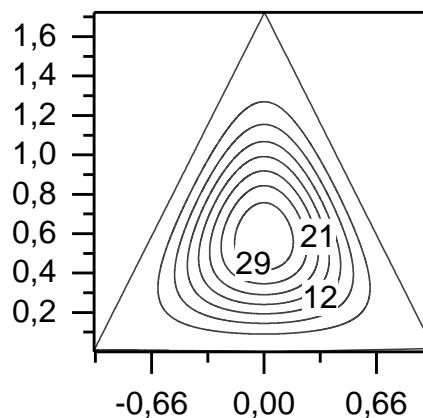
Рис. 5.  $\alpha = 1^\circ$

Как видно из схемы (рис. 1) и вида поверхностей прогиба (рис. 3–7) при малых значениях  $\alpha$  пластина, фактически, приобретает форму «плоской иглы». При этом предложенный численно-аналитический подход для статического анализа обеспечивает корректный результат для значений угла  $\alpha \geq 2^\circ$ .

Для больших значений углов ( $165^\circ$ – $179^\circ$ ), когда дельтоид приближается по форме к треугольнику (рис. 8, 9), все варианты задач получили корректное решение: с приближением к треугольнику и, соответственно, уменьшением площади воздействия нагрузки  $q_0$  происходит уменьшение значений максимального прогиба  $\hat{w}_{max}$ . Координата  $x_1$  соответствующей точки для всех вариантов угла  $\alpha$  близка к 0, что говорит о высокой степени симметрии поверхности относительно оси  $x_2$ .

Влияние соотношения оснований трапеции  $a/b$  (схема рис. 2) на ход расчета и вид результирующей поверхности прогиба  $\hat{w}$  произведен для значений  $a/b = 1..1000$ , т.е. в крайних значениях трапеция превращается в квадрат ( $a/b = 1$ ) или почти треугольник

( $a/b = 1000$ ). Числовые значения рассмотренных вариантов параметра  $a/b$  и результаты расчета максимального прогиба  $\hat{w} = wE/q_0$  приведены в табл. 2. Вид поверхности прогиба для некоторых из них приведен на рис. 10, 11.

Рис. 6.  $\alpha = 2^\circ$ Рис. 7.  $\alpha = 5^\circ$ Рис. 8.  $\alpha = 175^\circ$ Рис. 9.  $\alpha = 179^\circ$ 

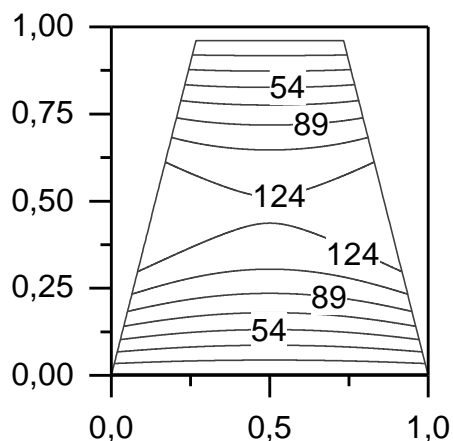
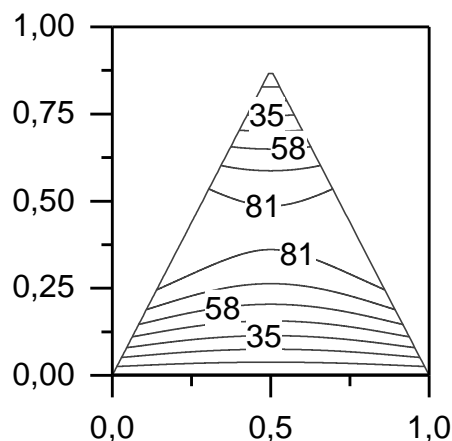
Поскольку условия закрепления на боковых сторонах трапеции приняты свободными, максимальный прогиб достигается в двух точках, на краю левой и правой стороны. Соответственно для значений максимального прогиба  $\hat{w}_{max}$  в табл. 2 приведены два значения координаты  $x_1$  и только одно для  $x_2$ .

По характеру изменения значений в табл. 2 видно, что величина прогиба  $\hat{w}$ , начиная со значений  $a/b = 100$ , изменяется незначительно, а расчет остается корректным для всех рассмотренных вариантов значений  $a/b$  вплоть до 1000.

Таблица 2 — Результаты расчетов максимального прогиба  $\hat{w}$  и координат соответствующих точек для трапеций при различных значениях соотношения оснований  $a/b$

$a/b$	$\hat{w}_{max}$	$x_1$	$x_2$
1,000	170,35	0,000 / 1,000	0,501
2,154	141,39	0,126 / 0,874	0,452
4,641	114,25	0,178 / 0,822	0,416
10,00	101,17	0,201 / 0,799	0,399
21,54	95,87	0,211 / 0,789	0,389
46,41	93,71	0,216 / 0,784	0,385
100,0	92,79	0,219 / 0,781	0,384
215,4	92,37	0,220 / 0,780	0,383
464,1	92,18	0,221 / 0,779	0,383
1000	92,10	0,221 / 0,779	0,383



Рис. 10.  $a/b = 2,154$ Рис. 11.  $a/b = 100,0$ 

## ВЫВОДЫ

В статье приведено решение задач о напряженно-деформированном состоянии четырехугольных пластин сложной геометрии в уточненной постановке. Для рассматриваемого класса объектов исходные соотношения уточненной теории пластин записываются в неортогональной системе координат. Авторами предложен численно-аналитический подход, который позволяет проводить статический анализ пластин сложной формы с различными геометрическими параметрами.

На первом этапе основные соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние пластин сложной формы в неортогональной системе координат, приводятся с помощью преобразования к задаче по исследованию прямоугольной пластины в ортогональной системе координат. Модифицированная таким способом краевая задача решается с помощью численно-аналитического подхода, который состоит из двух этапов. На первом этапе двумерная краевая задача в частных производных преобразуется в одномерную задачу с помощью метода сплайн-коллокации. Полученная краевая задача для системы ОДУ решается устойчивым методом дискретной ортогонализации.

В качестве примера рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии серии пластин в форме дельтоидов и трапеций. Рассмотрены граничные условия для жесткого, шарнирного и свободного закрепления краев. Показаны особенности применения предложенного подхода в случае различных геометрических параметров пластин. Показано влияние геометрии пластины и граничных условий на характеристики поверхности прогиба.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Grigorenko Ya. M. Using spline-functions to solve boundary-value problems for laminated orthotropic trapezoidal plates of variable thickness / Ya. M. Grigorenko, N. N. Kryukov, N. S. Yakovenko // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – 41, No. 4. – P. 413–420.
2. Grigorenko A. Ya. Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory / A. Ya. Grigorenko et al. – *SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Continuum Mechanics.* – 2016. – Vol. 1.
3. Kryukov N. N. Design of oblique and trapezoidal plates using spline functions / N. N. Kryukov // *Prikl. Mekh.* – 1997. – 33, No. 5. – P. 3–27.
4. Shufrin I. A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates / I. Shufrin, O. Rabinovitch, M. Eisenberger // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2010. – 52. – P. 1588–1596.
5. Shahidi A. R. Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections / A. R. Shahidi, M. Mahzoon, M. M. Saadatpour, M. Azhari // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2007. – 12. – P. 832–848.

6. Григоренко Я. М. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів : навчальний посібник / Я. М. Григоренко, В. Д. Будак, О. Я. Григоренко. – Миколаїв : Ліон, 2010. – 294 с.
7. Godunov S. K. Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations / S. K. Godunov // Usp. Mat. Nauk. – 1961. – 16, No. 3. – P. 171–174.

### REFERENCES

1. Grigorenko, Ya.M., Kryukov, N.N. AND Yakovenko, N.S. (2005), “Using spline-functions to solve boundary-value problems for laminated orthotropic trapezoidal plates of variable thickness”, *Int. Appl. Mech.*, **41**, no. 4, pp. 413–420.
2. Grigorenko, A.Ya. et al. (2016), *Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory*, vol. 1, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Continuum Mechanics.
3. Kryukov, N.N. (1997), “Design of oblique and trapezoidal plates using spline functions”, *Prikl. Mekh.*, **33**, no. 5, p. 3–27.
4. Shufrin, I., Rabinovitch, O. and Eisenberger, M. (2010), “A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **52**, pp. 1588–1596.
5. Shahidi, A.R., Mahzoon, M., Saadatpour, M.M. and Azhari, M. (2007), “Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **12**, pp. 832–848.
6. Grigorenko, Ya.M., Budak, V.D. and Grigorenko, A.Ya. (2010), *Rozv'yazannya zadach teorii obolonok na osnovi dyskretno-kontynual'nykh metodiv* [Solving the problems of shells based on discrete-continuous methods] Ilion, Nikolaev.
7. Godunov S.K. (1961), “Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations,” *Usp. Mat. Nauk*, **16**, no. 3, pp. 171–174.

УДК 539.3

## NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED SHALLOW SHELLS WITH TIME DEPENDENT PARAMETERS UNDER STATIC LOADING

Gristchak V. Z., Dr. Techn. Sci., professor, Fatieieva Yu. A., PhD student

*Zaporizhzhya national university,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

fateevajulia@gmail.com

This paper deals with research of nonlinear vibration of imperfect shallow shells made of functionally graded materials (FGM) with thickness dependent from time under static and dynamic loadings. The material properties are changing in the thickness direction according to the given power law distribution and the non-linear strain-displacement relationships based on the von Karman theory for moderately large normal deflections. Initial nonlinear system of differential equations transforms to singular ordinary differential equations with variable in time coefficients, which is solved by hybrid perturbation and WKB-Galerkin methods in three steps. Comparison of numerical integration of initial equation and approximate analytical solutions are given.

*Key words: Asymptotic approach, nonlinear dynamic problem, FGM shallow shells, time dependent parameters.*