

УДК 539.3

УПРАВЛІННЯ ВИМУШЕНИМИ КОЛИВАННЯМИ ОБЕРТОВОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА З ДОВЖИНОЮ І МАСОЮ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСУ

Грищак Д. Д.

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

gristchak@gmail.com

У статті запропоновано метод дослідження проблеми управління вимушеними коливаннями обертого математичного маятника з довжиною і масою, залежними від часу при заданому характері зовнішнього навантаження. Дається порівняння здобутого аналітичного розв'язку з прямим чисельним інтегруванням основного рівняння задачі. На основі гібридного асимптотичного підходу надається вирішення нелінійної проблеми.

Ключові слова: математичний маятник, змінні за часом довжина та маса, асимптотичний розв'язок, нелінійна задача.

УПРАВЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ДЛИНОЙ И МАССОЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ

Грищак Д. Д.

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

gristchak@gmail.com

В работе предложен метод исследования проблемы управления вынужденными колебаниями вращающегося математического маятника с длиной и массой, зависящими от времени, при заданном характере внешнего нагружения. Дается сравнение полученного аналитического решения с прямым численным интегрированием основного уравнения задачи. На основе гибридного асимптотического подхода дается решение нелинейной проблемы.

Ключевые слова: математический маятник, переменные во времени длина и масса, асимптотическое решение, нелинейная задача.

CONTROL FOR FORCED VIBRATIONS OF ROTATING MATHEMATICAL PENDULUM WITH DEPENDENT FROM TIME LENGTH AND MASS

Gristchak D. D.

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

gristchak@gmail.com

This paper deals with the proposed method for investigation of control problem for forced vibrations of rotating mathematical pendulum with dependent from time length and mass under the given external loading. Rotating pendulum with time dependent parameters as a mathematical model of a dynamical system is discussed. The model includes a vibrating ball with dependent from time mass, which is embedded in the inner surface of the solid thin walled two dimensional torus of radius equal to length of pendulum. The ball can slide without friction in the inner surface of the torus, and the torus may be rotated with a circumferential speed (in the general case dependent from time). Basic equation of problem is nonlinear non homogeneous differential equation with variable coefficients that in the general case can not be integrated analytically exactly. There are more popular direct numerical methods of integration this type of equations or approximate asymptotic approaches. For the solution of nonlinear problem on the first step of hybrid asymptotic approximation the solution is presented with respect to perturbation method on parameter nonlinearity. Introducing it into initial equation and acquainting the coefficients at equal order of parameter nonlinearity, the system of singular linear equations with variable coefficients is obtained. On the second step the phase integral (or WKB) method is explored.

Finally an approximate analytical solution for the problem is formulated. Comparison of obtained analytical solution with direct numerical integration of basic equation for forced vibration pendulum with time dependent parameters and an approximate analytical solution for control of forced rotating pendulum with length and mass dependent from time are given.

Key words: mathematical pendulum, dependent from time length and mass, asymptotic solution, nonlinear problem.

ВСТУП

Проблема управління математичним маятником зі змінними за часом параметрами привертає останнім часом увагу дослідників у зв'язку з тим, що модель маятника може суттєво відображати основні динамічні ефекти в реальних системах. Актуальність проблеми простежується як з точки зору застосування сучасних математичних методів дослідження нелінійних задач динаміки систем зі змінними у часі параметрами, так і з точки зору безпосереднього прикладного значення цієї проблеми. У цьому сенсі особлива увага приділяється знаходженню законів заспокоєння коливань систем із заданими параметрами, залежними від часу. Необхідно зазначити, що існуючі розв'язки, зазвичай, зводяться до вирішення рівняння Мат'є за умови наявності кубічної складової нелінійного рівняння динаміки системи зі сталими параметрами. Що стосується огляду сучасного стану проблеми динаміки систем зі змінними за часом параметрами, посилаємось до публікацій [1, 2, 4-7]. На відміну від існуючих досліджень нелінійної динаміки математичного маятника зі змінними параметрами, у нашому дослідженні привертається увага до ефекту обертання маятника зі змінними за часом довжиною і масою як приклад біфуркації системи, яка призводить до спонтанного порушення симетрії діаграми біфуркації [3].

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ПРОБЛЕМИ

Як динамічна модель системи зі змінними в часі параметрами розглядається обертаючий математичний маятник, тобто система (яка складається з коливальної кулі, маса якої є функцією часу), «вкладена» у внутрішню поверхню твердого тонкостінного двомірного тору радіусу $L(t)$ [1]: куля може без тертя ковзати у внутрішній поверхні тору, а сам тор може обертатися, як показано на рис. 1, з кутовою швидкістю Ω , у загальному випадку залежною від часу. Якщо тороїдальна оболонка не обертається, система з маятником і з не залежними від часу маси і довжини має два стаціонарних стани [3]: один стійкий ($v=0$), другий не стійкий ($v=\pm\pi$). Суттєвим є з'ясування впливу характеру зміни параметрів маятника в часі та введення нового степеня свободи, а саме обертання тороїдальної оболонки із заданою швидкістю, на динамічну поведінку системи.

У неінерціальній системі координат на масу діють: тангенціальна складова ваги і тангенціальна складова центробіжної сили.

Запишемо рівняння маятника для кінцевих коливань від стану рівноваги, як це зображено на рисунку 1. Діюча сила – це проекція на дотичну ваги коливальної маси, дорівнює $m(t)g \sin \nu$

, частота коливань – $\omega = \frac{dv}{dt}$, $m(t) \frac{dv}{dt}$ – інерціальна складова,

$m(t) \frac{d[\omega L(t)]}{dt} = m(t) \left[L(t) \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{dL(t)}{dt} \right]$. Діючі сили дорівнюють проекції на дотичну ваги

коливальної маси – $m(t)g \sin \nu$ та від обертання $m(t)\Omega^2 L \sin \nu \cos \nu$.

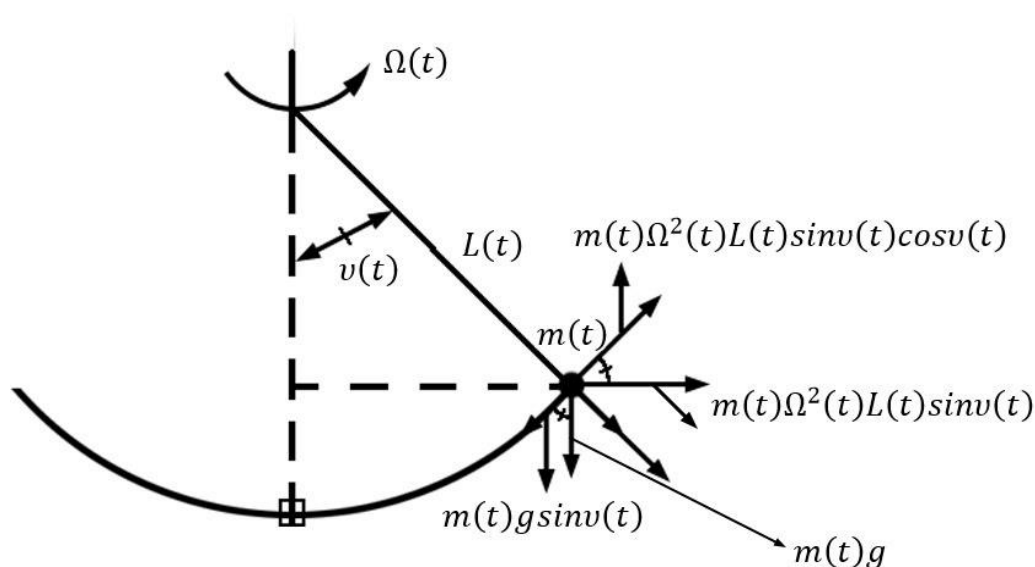


Рис. 1. Обертаючий нелінійний маятниковий осцилятор зі змінними за часом параметрами

Основне диференціальне рівняння вимушених коливань має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left[m(t)L(t) \frac{d\nu}{dt} \right] = -m(t)g \sin \nu + m(t)\Omega^2(t)L(t)\sin \nu \cos \nu + F(t). \quad (1)$$

Рівняння (1) після перетворень може бути представлено у вигляді:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} = \sin \nu \left[\Omega^2(t) \cos \nu - G(t) \right] + \tilde{F}(t), \quad (2)$$

де

$$D'(t) = \frac{m'(t)}{m(t)} + \frac{L'(t)}{L(t)}, \quad Q(t) = \Omega^2(t), \quad \tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{m(t)L(t)},$$

$$G(t) = \frac{g}{L(t)} = \frac{g}{L_0 [1 + \psi(t)]} = \frac{\omega_0^2}{[1 + \psi(t)]}. \quad (3)$$

Задаючи параметри системи як функції від часу

$$m(t) = m_0 [1 + \phi(t)], \quad L(t) = L_0 [1 + \psi(t)], \quad \Omega(t) = \Omega_0 [1 + \eta(t)]. \quad (4)$$

Основне рівняння (2) представляється у формі:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} = \omega_0^2 \left\{ \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2} [1 + \eta(t)]^2 \sin 2\nu - \frac{\sin \nu}{[1 + \psi(t)]} \right\} + \tilde{F}(t). \quad (5)$$

У нових позначеннях рівняння (5) має вигляд:

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + D'(t) \frac{d\nu}{dt} = \mu \left[\beta_0^2 \phi(t) \sin 2\nu - \frac{\sin \nu}{1 + \psi(t)} \right] + \tilde{F}(t), \quad (6)$$

де $\mu = \frac{g}{L_0} = \omega_0^2$ – параметр власної частоти коливань лінеаризованої системи, тобто частоти, з якою коливається лінійний гармонічний маятник при малих відхиленнях від рівноваги;

$\phi(t) = [1 + \eta(t)]^2$ – функція зміни швидкості обертання маятника від часу; $\beta_0^2 = \frac{\Omega_0^2}{2\omega_0^2}$ – відносний параметр частот коливань,

$$D'(t) = \frac{\varphi'(t)}{[1 + \varphi(t)]} + \frac{\psi'(t)}{[1 + \psi(t)]} \quad (7)$$

– функція зміни маси та довжини маятника за часом.

Рівняння (6) є нелінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, яке в загальному вигляді не допускає точного аналітичного розв'язку. У цих випадках застосовуються, зазвичай, прямі чисельні методи інтегрування, або наближені асимптотичні підходи.

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОСНОВНОГО РІВНЯННЯ

Відповідно до роботи [5], на першому етапі застосування гібридного асимптотичного методу розв'язок рівняння (6) подаємо у вигляді розкладу за методом збурення по параметру μ :

$$v(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \dots = \sum_{i=0}^N v_i(t) \mu^i. \quad (8)$$

Підставляючи (8) у рівняння (6) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру μ , отримаємо зв'язану систему лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\mu^0: \frac{d^2 v_0}{dt^2} + D'(t) \frac{dv_0}{dt} = \tilde{F}(t), \quad (9)$$

$$\mu^1: \frac{d^2 v_1}{dt^2} + D'(t) \frac{dv_1}{dt} = \beta_0^2 \phi(t) \sin 2v_0 - \frac{\sin v_0}{1 + \psi(t)}. \quad (10)$$

На першому етапі дослідження основна увага зосереджується на аналізі вимушених коливань лінійної системи зі змінними за часом параметрами, тобто на аналізі рівняння (9).

Розв'язок рівняння (9) має вигляд:

$$v_0(t) = v_0^0(t) + v_0^p(t), \quad (11)$$

де

$$P(t) = D'(t), \quad (12)$$

$$v_0^0(t) = c_1 \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt + c_2, \quad (13)$$

$$v_0^p(t) = \bar{c}_1(t) \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt + \bar{c}_2(t) \quad (14)$$

і загальний розв'язок набуває форми

$$v_0(t) = \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt \left\{ c_1 + \int \frac{\tilde{F}(t)}{\exp \left[\int -P(t) dt \right]} dt \right\} + \left\{ c_2 - \int \frac{\tilde{F}(t) \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt}{\exp \left[\int -P(t) dt \right]} dt \right\}. \quad (15)$$

Довільні константи визначаються з початкових умов

$$\begin{aligned} v_0(0) &= 1, \\ v_0'(t) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

і мають форму для цих початкових умов:

$$\begin{aligned} c_1 &= \int \frac{\tilde{F}(t)}{\exp \left[\int -P(t) dt \right]} dt = \frac{1}{\omega_1}, \\ c_2 &= \int \frac{\tilde{F}(t) \int \left\{ \exp \left[\int -P(t) dt \right] \right\} dt}{\exp \left[\int -P(t) dt \right]} dt = 1 + \text{Sin}[\omega_1] \text{Cos}I[\omega_1] - \text{Cos}[\omega_1] \text{Sin}I[\omega_1], \end{aligned} \quad (17)$$

де $\text{Cos}I$, $\text{Sin}I$ – інтегральні Cos , Sin .

Чисельний аналіз вимушених коливань лінійної системи зі змінними в часі параметрами провадився за даними:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1.0m; \quad \eta(t) = \gamma t; \quad \psi(t) = \beta t; \quad \varphi(t) = \alpha t; \\ m_0 &= 1.0kg; \quad L(t) = L_0(1 + \beta t); \quad \Omega(t) = \Omega_0(1 + \gamma t); \\ m(t) &= m_0(1 + \alpha t); \quad \Omega_0 = 10m/sec; \quad P(t) = 2/(1+t); \\ F(t) &= F_0 \text{Sin} \omega_1 t; \quad \tilde{F}(t) = \text{Sin}[t]/(1+t)^2, \quad \alpha = \beta = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язок неоднорідної лінійної задачі має вигляд

$$v_0(t) = \int \exp I_0(t) dt [c_1 + I_{01}^p(t)] + [c_2 + I_{02}^p], \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} I_0(t) &= \int -P(t) dt = -2 \text{Log}[1+t], \\ I_{01}^p(t) &= \int \text{Sin}[t]/\exp[I_0(t)] dt = -\text{Cos}[t], \\ I_{02}^p(t) &= \int \frac{\tilde{F}(t)}{E_0(t)} \exp[I_0(t)] dt = \int \frac{\text{Sin}[t]}{(1+t)} dt = -0.8415 \text{Cos}I[1+t] + 0.54 \text{Sin}I[1+t], \\ E_0(t) &= \exp I_0(t) = 1/[1+t]^2. \end{aligned} \quad (20)$$

З урахуванням початкових умов (16) розв'язок (19) для $\omega_1 = 1$ можна представити у формі:

$$v_0(t) = \left(-\frac{1}{1+t} \right) (1 - \text{Cos}[t]) + [0.7727 - 0.8415 \text{Cos}I(1+t) + 0.54 \text{Sin}I(1+t)]. \quad (21)$$

Основні залежності розв'язку (21) надані на рис. 2-7.

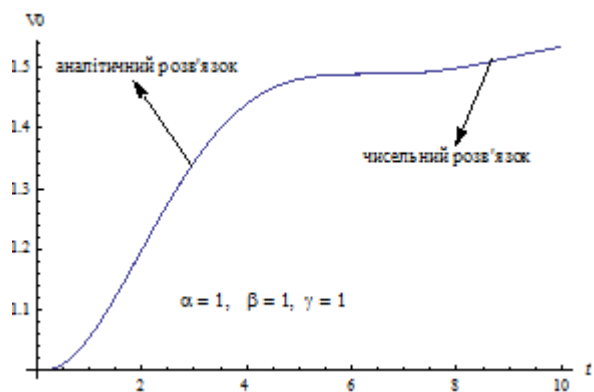


Рис. 2. Співставлення аналітичного (21) та чисельного розв'язків

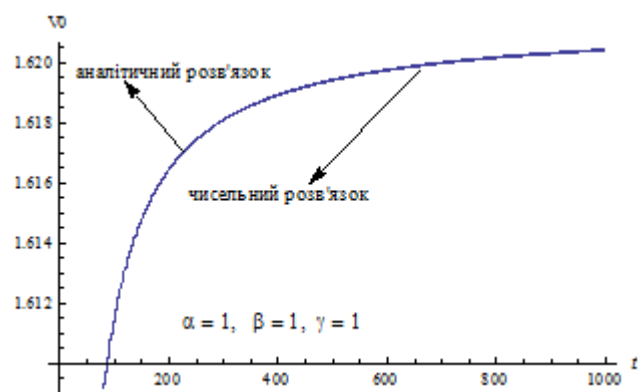


Рис. 3. Співставлення аналітичного (21) та чисельного розв'язків

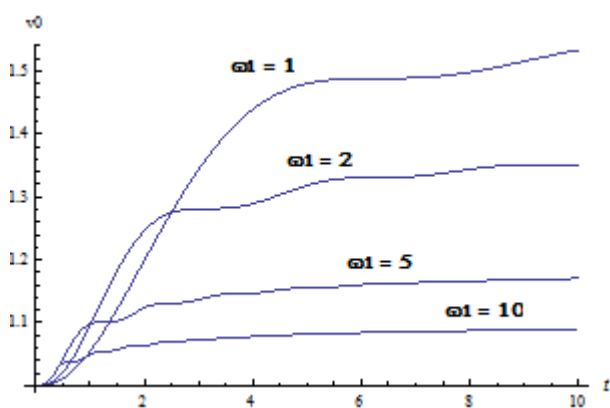


Рис. 4. Залежність розв'язку (21) від частоти зовнішнього навантаження і часу

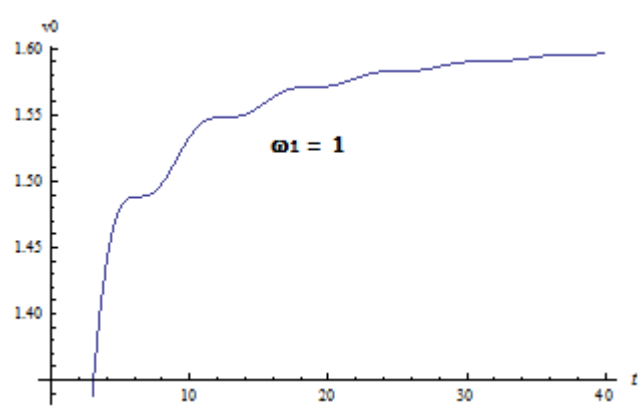


Рис. 5. Характер розв'язку (21) за значним діапазоном часу

Необхідно зазначити, що за певним часом характер розв'язку для різних частот вимушених коливань стабілізується.

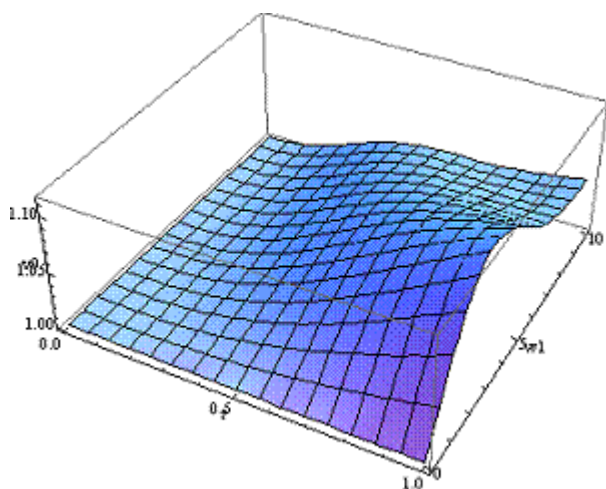


Рис. 6. Тривимірна залежність розв'язку (21) від частоти зовнішнього навантаження і часу

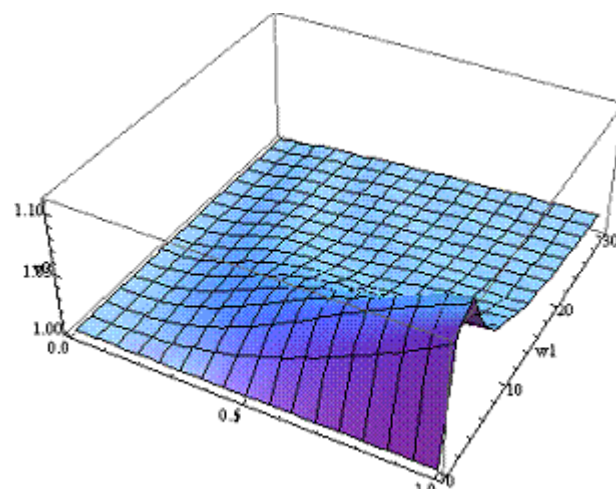


Рис. 7. Тривимірна залежність розв'язку (21) від частоти зовнішнього навантаження і розширеного діапазону часу

Необхідно зазначити, що для даного випадку характер розв'язку для різних частот вимушених коливань стабілізується за певним часом.

Якщо нелінійну складову у правій частині рівняння (6) не розкласти у ряд Маклорена, то загальний розв’язок нелінійної задачі можна представити у формі:

$$v(t) = \int \exp\left[\int -P(t) dt\right] dt \left\{ s_1 + \int \frac{\tilde{F}(t) dt}{\exp\left[\int -P(t) dt\right]} + \mu \int \frac{\beta_0^2 \phi(t) \sin[2v_0(t)] - \frac{\sin[v_0(t)]}{1+\psi(t)}}{\exp\left[\int -P(t) dt\right]} dt \right\} +$$

$$+ \left\{ s_2 + \int \frac{\tilde{F}(t) dt \exp\left[\int -P(t) dt\right]}{\exp\left[\int -P(t) dt\right]} - \mu \int \frac{\exp\left[\int -P(t) dt\right] \left[\beta_0^2 \phi(t) \sin[2v_0(t)] - \frac{\sin[v_0(t)]}{1+\psi(t)} \right]}{\exp\left[\int -P(t) dt\right]} dt \right\}. \quad (22)$$

Прийнявши параметри досліджуваної системи за значеннями:

$$\phi(t) = (1+t)^{-2}, \quad L(t) = (1+t)^2, \quad \exp\left[\int -P(t) dt\right] = 1/(1+t)^2, \quad (23)$$

розв’язок нелінійної задачі матиме вираз:

$$v(t, \omega_1, \beta_0^2) = \left(-\frac{1}{1+t} \right) \left\{ s_1 - \frac{\cos[\omega_1 t]}{\omega_1} + \mu \int \left[\beta_0^2 \phi(t) \sin[2v_0(t)] - \sin[v_0(t)] \right] dt \right\} +$$

$$+ \left\{ s_2 - \sin[\omega_1] \cos[\omega_1(1+t)] + \cos[\omega_1] \sin[\omega_1(1+t)] - \right. \quad (24)$$

$$\left. - \mu \int \left[\sin[v_0(t)] dt + \frac{\beta_0^2}{1+t} \sin[2v_0(t)] dt \right] \right\}.$$

Довільні сталі s_1 і s_2 обчислюються із початкових умов.

Необхідно зауважити, що аналітичний розв’язок нелінійної проблеми за співвідношенням (24) пов’язаний із необхідністю обчислювати інтеграл типу $\int \frac{\sin[2v_0(t)]}{1+t} dt$, що аналітично не завжди можливо. Тому необхідно його обчислювати наближено у заданому діапазоні зміни часу.

Однак, значною привабливістю розв’язку (24) є той факт, що на першому етапі дослідження при розв’язку неоднорідного рівняння отримується точний аналітичний розв’язок. Тому є можливість застосування цього алгоритму в подальших дослідженнях нелінійної проблеми.

УПРАВЛІННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА БЕЗ ОБЕРТАННЯ ІЗ ЗМІННИМИ ДОВЖИНОЮ І МАСОЮ НА БАЗІ ГІБРИДНОГО АСИМПТОТИЧНОГО ПІДХОДУ

Для розв’язку нелінійної задачі управління математичного маятника без обертання його рівняння для кінцевих коливань від стану рівноваги береться у формі:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2 \left(\frac{L'(t)}{L(t)} + \frac{m'(t)}{m(t)} \right) \frac{dV}{dt} + \frac{g}{L(t)} \sin V = 0. \quad (25)$$

Після заміни $\hat{\phi}(t) = 2 \left(\frac{L'(t)}{L(t)} + \frac{m'(t)}{m(t)} \right)$, $L(t) = L_0 \phi(t)$ маємо:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \hat{\phi}(t) \frac{dV}{dt} + \frac{g}{L_0} \frac{1}{\varphi(t)} \sin V = 0. \quad (26)$$

Позначивши $\omega_0^2 = \frac{g}{L_0}$ і, застосовуючи розвинення в ряд Тейлора нелінійної складової рівняння, отримаємо

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \hat{\phi}(t) \frac{dV}{dt} + \frac{\omega_0^2}{\varphi(t)} V - \frac{\omega_0^2}{6\varphi(t)} V^3 = 0. \quad (27)$$

Розділивши рівняння (27) на ω_0^2 і позначивши

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\omega_0^2}, \quad (28)$$

отримуємо рівняння (27) у вигляді:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2V}{dt^2} + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\varphi(t)} - \frac{V^3}{6\varphi(t)} = 0. \quad (29)$$

Після позначення

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \quad (30)$$

рівняння (29) набуває вигляду

$$\varepsilon^2 \frac{d^2V}{dt^2} + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) \frac{dV}{dt} + \phi_0(t) V - \lambda \phi_0(t) V^3 = 0, \quad (31)$$

де

$$\lambda = \frac{1}{6}. \quad (32)$$

Розв'язок рівняння (31) шукається на першому етапі відповідно до [5] за методом збурення у вигляді розкладання функції $V(t)$ за малим параметром λ :

$$V(t) = V_0 + \lambda V_1. \quad (33)$$

Результуюче рівняння (31) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 [V_0'' + \lambda V_1''] + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) [V_0' + \lambda V_1'] + \phi_0(t) [V_0 + \lambda V_1] - \\ - \lambda \phi_0(t) [V_0^3 + 3\lambda V_0^2 V_1 + 3\lambda^2 V_0 V_1^2 + \lambda^3 V_1^3] = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях λ , отримуємо систему сингулярних лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами:

$$\lambda^0: \quad \varepsilon^2 V_0'' + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) V_0' + \phi_0(t) V_0 = 0, \quad (35)$$

$$\lambda^1: \quad \varepsilon^2 V_1'' + \varepsilon^2 \hat{\phi}(t) V_1' + \phi_0(t) V_1 = \phi_0(t) V_0^3. \quad (36)$$

З метою усунення першої похідної, розв'язок рівняння (35) знаходиться у вигляді:

$$V_0 = U_0 \exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right), \quad (37)$$

$$V_0' = \left(U_0' - \frac{\hat{\phi}(t)}{2} U_0 \right) \exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right), \quad (38)$$

$$V_0'' = \left(U_0'' - \frac{\hat{\phi}'(t)}{2} U_0 - \phi(t) U_0' - \frac{\hat{\phi}^2(t)}{4} U_0 \right) \exp \left(-\int \frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right). \quad (39)$$

Підставимо (37)-(39) у рівняння (35)

$$\varepsilon^2 U_0''(t) + \left[\phi_0(t) - \varepsilon^2 \frac{\hat{\phi}'(t)}{2} - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \hat{\phi}^2 \right] U_0(t) = 0. \quad (40)$$

Розв'язком рівняння (40) у двох ВКБ-наближеннях за другим етапом гібридного асимптотичного підходу буде

$$U_0(t) = \frac{1}{Q(t)^{0.25}} [c_1 \sin K_0(t) + c_2 \cos K_0(t)], \quad (41)$$

де $K_0(t) = \int \varepsilon^{-1} Q(t)^{1/2} dt$, $Q(t) = \phi_0(t) - \varepsilon^2 \frac{\hat{\phi}'(t)}{2} - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \hat{\phi}^2$.

З урахуванням (41) розв'язок (37) має форму:

$$V_0(t) = \exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} \right) dt \left\{ \frac{1}{Q(t)^{0.25}} [c_1 \sin K_0(t) + c_2 \cos K_0(t)] \right\}. \quad (42)$$

Для отримання довільних сталих початкові умови задаються у вигляді:

$$V_0(0) = 1, \quad V_0'(0) = 0. \quad (43)$$

Як приклад розглядається випадок, коли параметри маятника мають вигляд:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1.0m; \quad \eta(t) = \gamma t; \quad \psi(t) = \beta t; \quad \varphi(t) = \alpha t; \\ m_0 &= 1.0kg; \quad L(t) = L_0 \exp[\beta t]; \quad \Omega(t) = \Omega_0 \exp[\gamma t]; \\ m(t) &= m_0 \exp[-\alpha t]; \quad \Omega_0 = 10m/sec; \quad P(t) = \beta - \alpha. \end{aligned} \quad (44)$$

Результати чисельного аналізу для вільних коливань маятника зі змінної за часом довжини надано на рис. 8.

Що стосується нелінійної задачі, то рівняння (36) розв'язується відповідно до замінін

$$a_1(t) = \varepsilon^2 \hat{\phi}(t), \quad a_2 = \frac{1}{\varphi(t)}, \quad f(t) = \frac{V_0^3}{\varphi(t)} \quad (45)$$

рівнянням

$$\varepsilon^2 V_1''(t) + a_1(t) V_1'(t) + a_2 V_1(t) = f(t). \quad (46)$$

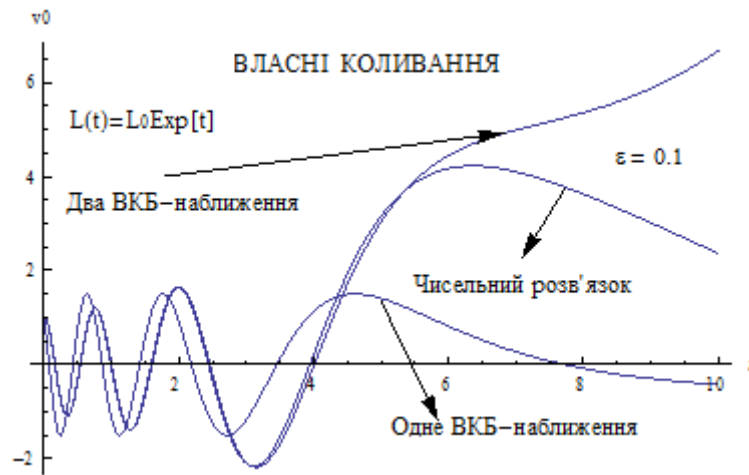


Рис. 8. Порівняння аналітичних та чисельного розв'язків для випадку власних коливань

Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння

$$\varepsilon^2 V_1''(t) + a_1(t) V_1'(t) + a_2 V_1(t) = 0, \quad (47)$$

$$V_1''(t) + \bar{a}_1(t) V_1'(t) + \bar{a}_2(t) V_1(t) = 0, \quad (48)$$

$$V_1(t) = U_1(t) \exp\left(\int -\frac{\bar{a}_1(t)}{2} dt\right), \quad (49)$$

$$V_1'(t) = \left[U_1'(t) - U_1(t) \frac{\bar{a}_1(t)}{2} \right] \exp\left(\int -\frac{\bar{a}_1(t)}{2} dt\right), \quad (50)$$

$$V_1''(t) = \left[U_1''(t) - U_1'(t) \bar{a}_1(t) - U_1(t) \frac{\bar{a}_1'(t)}{2} + U_1(t) \frac{\bar{a}_1^2(t)}{4} \right] \exp\left(\int -\frac{\bar{a}_1(t)}{2} dt\right), \quad (51)$$

де $\bar{a}_i(t) = \frac{a_i(t)}{\varepsilon^2}$.

Підставляючи (49)-(51) в рівняння (47), отримаємо:

$$U_1''(t) + \left[\bar{a}_2(t) - \frac{\bar{a}_1(t)}{2} - \frac{3\bar{a}_1(t)}{4} \right] U_1(t) = 0. \quad (52)$$

Розв'язком рівняння (52) буде

$$U_1(t) = c_1(t) \sin K_1(t) + c_2(t) \cos K_1(t), \quad (53)$$

де

$$K_1(t) = \int \varepsilon^{-1} Q_1^{1/2}(t) dt, \quad Q_1(t) = \bar{a}_2(t) - \frac{\bar{a}_1(t)}{2} - \frac{3\bar{a}_1^2(t)}{4}, \quad (54)$$

$$c_1(t) = \int \frac{f(t) \cos K_1(t)}{K_1'(t)} dt + d_2, \quad (55)$$

$$c_2(t) = -\int \frac{f(t) \sin K_1(t)}{K_1'(t)} dt + d_2. \quad (56)$$

Отже, розв'язок $V(t)$ нелінійної задачі має вигляд (33).

$$V(t) = \left[\exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right) \right] \left\{ \frac{1}{Q(t)^{0.25}} \left[\text{Sin } K_1(t) \left(s_1 + \lambda \int \frac{f(t) \text{Cos } K_1(t)}{K'(t)} dt \right) + \text{Cos } K_1(t) \left(s_2 - \lambda \int \frac{f(t) \text{Sin } K_1(t)}{K'(t)} dt \right) \right] \right\}, \quad (57)$$

де

$$s_1 = c_1 + \lambda d_1, \quad s_2 = c_2 + \lambda d_2. \quad (58)$$

З урахуванням обертання маятника та наявності змушуючої зовнішньої сили розв'язок нелінійної задачі управління (6) математичного маятника змінної довжини і маси за часом матиме вигляд:

$$V(t) = \left[\exp \int \left(-\frac{\hat{\phi}(t)}{2} dt \right) \right] \left\{ \frac{1}{Q(t)^{0.25}} \left[\text{Sin } K_1(t) \left(s_1 + \int \frac{\tilde{F}(t) \text{Cos } K_1(t)}{K_1'(t)} dt + \lambda \int \frac{N(t) \text{Cos } K_1(t)}{K'(t)} dt \right) + \text{Cos } K_1(t) \left(s_2 - \lambda \int \frac{N(t) \text{Sin } K_1(t)}{K'(t)} dt \right) \right] \right\}, \quad (59)$$

де

$$a_2 = \mu \left[2\beta_0^2 \hat{\phi}(t) - \frac{1}{\psi(t)} \right], \quad N(t) = \mu \left[2\beta_0^2 \hat{\phi}(t) - \frac{1}{\psi(t)} \right] v_0^3(t). \quad (60)$$

Для випадку власних лінійних коливань обертового маятника зі сталою кутовою швидкістю розв'язок задачі у другому ВКБ-наближенні із заданими початковими умовами (43) має вигляд:

$$v_0(t) = (100/\exp[t] - 2)^{-0.25} [-0.081 \text{Sin } K_1(t) + 3.146 \text{Cos } K_1(t)], \quad (61)$$

де

$$K_1(t) = \int \varepsilon^{-1} Q_1^{1/2}(t) dt = \int 10(100/\exp[t] - 2)^{0.5} dt = 99t - 25.2t^2 + 4.12t^3 - 0.527t^4, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (62)$$

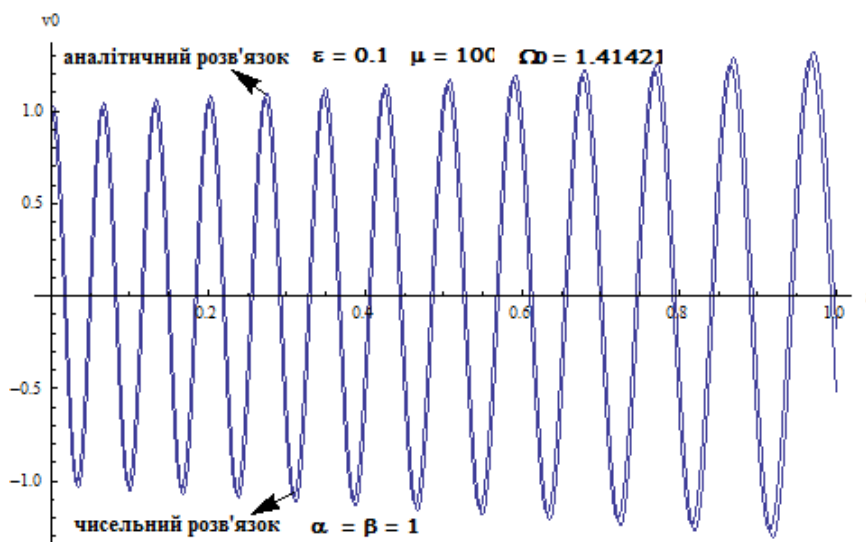


Рис. 9. Порівняння аналітичного (у двох ВКБ-наближеннях) та чисельного розв'язків для випадку власних коливань обертового маятника зі змінною довжиною і масою за експоненціальним законом ($m(t) = m_0 \text{Exp}[-\alpha t]$, $L(t) = L_0 \text{Exp}[\beta t]$)

Результати порівняння аналітичних і чисельних розв'язків задачі динаміки обертового маятника надано на рис. 10-14.

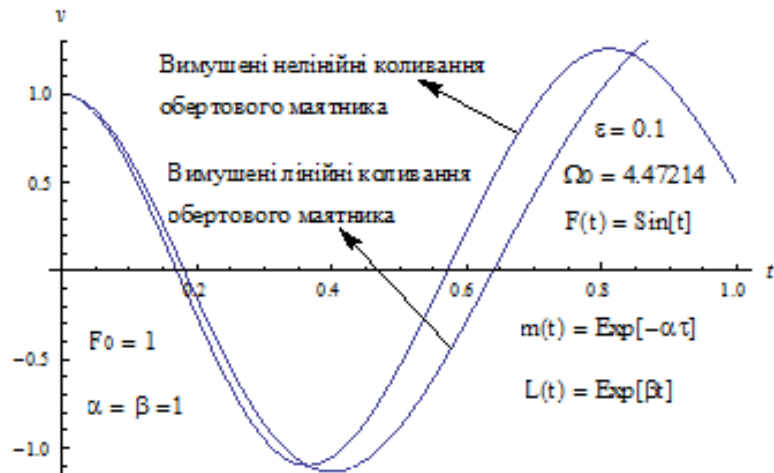


Рис. 10. Порівняння аналітичного та чисельного розв'язків для випадку вимушених коливань обертового маятника зі змінними довжиною і масою за експоненціальним законом

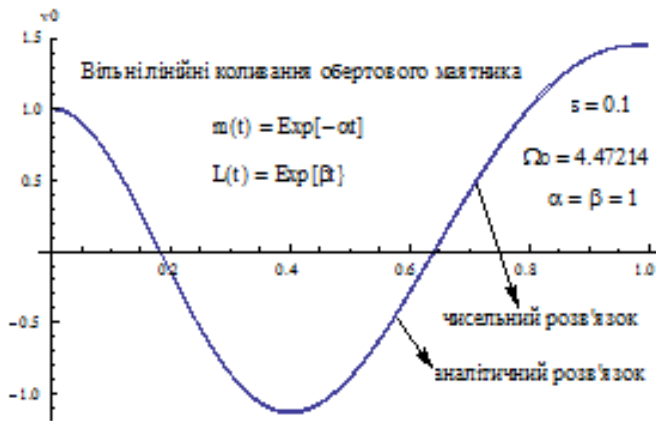


Рис. 11. Порівняння аналітичного і чисельного розв'язків лінійної задачі про вільні коливання обертового маятника

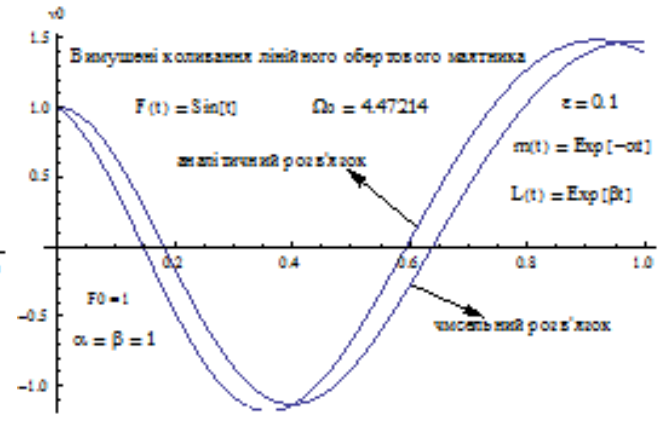


Рис. 12. Порівняння аналітичного і чисельного розв'язків лінійної задачі вимушених коливань обертового маятника

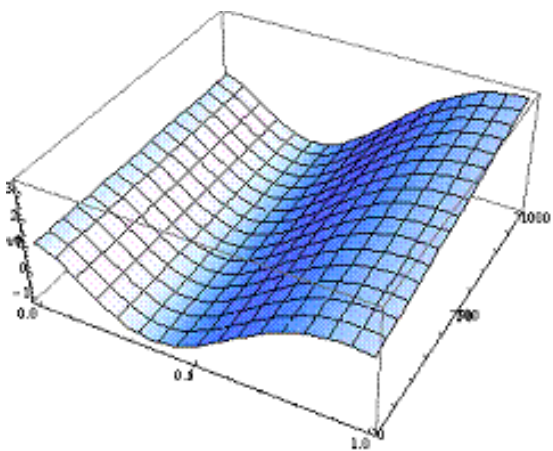


Рис. 13. Залежність вимушених лінійних коливань обертового маятника від амплітуди зовнішнього навантаження

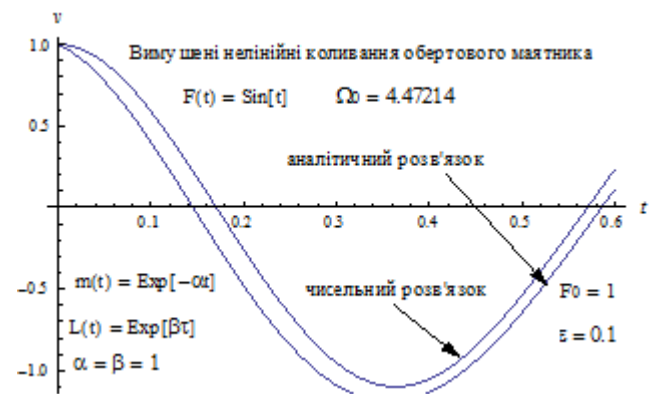


Рис. 14. Вплив нелінійної складової на динамічний процес обертового маятника

ВИСНОВКИ

У статті запропоновано розв'язок нелінійної задачі про вимушені коливання математичного маятника зі змінними за часом довжиною і масою, який обертається із заданою швидкістю. Гібридний асимптотичний підхід при заданих параметрах досліджуваної системи і характеру зовнішнього навантаження показав можливість його ефективного застосування. У часткових випадках дається порівняння здобутого аналітичного розв'язку з прямим чисельним інтегруванням основного рівняння задачі. Обговорено два підходи до розв'язку нелінійної проблеми динаміки систем зі змінними у часі параметрами. Результати аналізу можуть бути застосовані для подальшого дослідження ефекту спонтанного порушення діаграми біфуркації цієї нелінійної системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красильников П. С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании / П. С. Красильников // ПММ. – 2012. – Т. 76, вып. 1. – С. 36-51.
2. Безгласный С. П. Управление колебаниями маятника переменной длины / С. П. Безгласный, Н. И. Кутырев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2013. – Т. 15, №6(3). – С. 590-593.
3. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление / Дж. Николис. – М. : Мир, 1989. – 486 с.
4. Ольшанский В. П. Нестационарные колебания осциллятора переменной массы с учетом вязкого трения / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вібрації в техніці і технологіях. – 2014. – № 3(75). – С. 18-27.
5. Азарсков В. Н. Приближенное аналитическое решение задачи динамики математического маятника переменной массы и длины / В. Н. Азарсков, Д. Д. Грищак // Матеріали XI міжнар. наук.-техн. конф. «AVIA-2013», 21-23 травня 2013 р. – Т. 4. – К. : НАУ, 2013. – С. 22.1-22.4.
6. Azarskov V. N. Vibration damping for the problems of aircraft motion / V. N. Azarskov, D. D. Gristchak // Electronics and Control Systems. – 2014. – N 4(42). – P. 30-34.
7. Marco B. Quadrelli. Modeling and Simulation of Flight Dynamics of Variable Mass Systems / Marco B. Quadrelli, Jonathan Cameron, Bob Balarm, Mayank Baranwal, Alesandro Bruno //Space Conf. San-Diego, Ca, AIAA/AAS Aerodynamics Specialist Conference, 2014.

REFERENCES

1. Krasilnikov, P.S. (2012), "For nonlinear vibrations of pendulum on vibrating foundation", *PMM*, vol. 76, issue 1, pp. 36-51.
2. Bezglasnij, S.P. and Kutirjov, N.I. (2013), "Control vibrations for pendulum of variable length", *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk*, vol. 15, no. 6(3), pp. 590-593.
3. Nikolis, J.S. (1989), *Dinamika ierarkhicheskikh sistem. Evolyutsionnoe predstavlenie* [Dynamics of Hierarhial Systems. An Evolutionary Approach], Mir, Moskow.
4. Olshansky, V.P. and Olshansky, S.V. (2014), "Non stationary vibrations for variable mass pendulum with friction influence", *Vibratsiyi v tekhnitsi i tekhnolohiyakh*, no. 3(75), pp. 18-27.
5. Azarskov, V.N. and Gristchak, D.D. (2013), "An approximate analytical solution for dynamic problem of pendulum with variable mass and length", *Materialy XI mizhnar. nauk.-tekhn. konf. "AVIA-2013"* [Proc. XI Int. Sci.-Technical Conf. "AVIA-2013"], Kiev, NAU, May 21-23, 2013, vol. 4, pp. 22.1-22.4.
6. Azarskov, V.N. and Gristchak, D.D. (2014), "Vibration damping for the problems of aircraft motion", *Electronics and Control Systems*, no. 4(42), pp. 30-34.
7. Marco B. Quadrelli, Jonathan Cameron, Bob Balarm, Mayank Baranwal and Alesandro Bruno (2014), "Modeling and Simulation of Flight Dynamics of Variable Mass Systems", *Space Conf. San-Diego, Ca, AIAA/AAS Aerodynamics Specialist Conference*, 2014.