3. Pasternak, Ya.M. and Sulim, G.T. (2012), "Solving problems means non-plate integral equations of deformation of thin belt body inclusions. II. Analysis of concentration and intensity", *Fiz.-khim. mekh. materialiv*, 48, no. 6, pp. 86-91.
4. Wen, P.H. and Aliabadi, M.H. (2011), "A variational approach for evaluation of stress intensity factors using the element free Galerkin method", *Int. J. Solids Struct.*, vol. 48, iss. 7-8, pp. 1171-1179.
5. Alwar, R.S. and Ramachandran Nambissan, K.N. (1983), "Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis", *Eng. Fracture Mech.*, vol. 17, iss. 4, pp. 323-333.
6. Zaytsev, B.F., Shulzhenko, N.G. and Asaenok, A.V. (2007), "Methods of modeling of cracks in contact with the banks on the basis of the finite element method", *Visnik NTU "HPI": Seriya "Dinamika ta mitsnist mashin"*, no. 22, pp. 48-61.
7. Song, J., Wang, H. and Belytschko, T. (2008), "A comparative study on finite element methods for dynamic fracture", *Comput. Mech.*, vol. 42, pp. 239-250.
8. Dolbow, J. and Harari, I. (2009), "An efficient finite element method for embedded interface problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, iss. 2, pp. 229-252.
9. Osadchuk, V.A. (1985), *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie i predelnoe ravnovesii obolochek s razrezami* [Stress-strain state and limit equilibrium of shells with cuts], Naukova dumka, Kiev.
10. Vorovich, I.I. (1989), *Matematicheskie problemy nelineinoi teorii pologikh obolochek* [Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells], Nauka, Moskow.

УДК 519.8

О ГРАНЯХ ОБЩЕГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА

Емец О. А., д. ф.-м. н., профессор, Емец А. О., к. ф.-м. н., доцент, Поляков И. М.

Полтавский университет экономики и торговли,
ул. Коваля, 3, Полтава, Украина

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

В статье рассматриваются новые свойства для граней общего перестановочного многогранника. На основе критерия m-грани общего перестановочного многогранника в прямой форме получен новый критерий m-грани общего перестановочного многогранника в симметричной форме.

Ключевые слова: перестановочный многогранник, грани многогранника, выпуклая оболочка, перестановки.

ПРО ГРАНІ ЗАГАЛЬНОГО ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО МНОГОГРАННИКА

Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор, Ємець Ол-ра О., к. ф.-м. н., доцент, Поляков І. М.

Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

У статті розглядаються нові властивості для граней загального перестановочного многогранника. На основі критерію m-грані загального перестановочного многогранника у прямій формі одержано новий критерій m-грані загального перестановочного многогранника в симетричній формі.

Ключеві слова: перестановочний многогранник, грані многогранника, випукла оболонка, перестановки.

ABOUT FACES OF THE GENERAL PERMUTABLE POLYHEDRON

Iemets O. O., D. Sc. in Physics and Maths, Professor, Yemets` O. O., Ph. D., Polyakov I. M.

Poltava University of Economics and Trade, Poltava, Ukraine

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

New facts for the faces of arbitrary dimension of general permutation polyhedron are considered in the article.

Herewith the general permutation polyhedron is set as the convex hull of the multiset of elements, each of which has its own multiplicity.

Two forms of general permutation polyhedron are considered: the so-called direct form, in which the elements of the multiset are numbered (are ordered) by not ascending order and the symmetrical to it form with the opposite numbered elements.

The system of required sets of indices and their characteristics are built on the basis of the m-faces criterion of general permutation polyhedron in the direct form. They allow getting a new criterion of m-faces of general permutation polyhedron in a symmetrical form.

Two equivalent forms for the symmetrical form are offered. They are suitable for the use in different cases.

Key words: a permutable polyhedron, faces of a polyhedron, convex hull, permutations.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование полиэдральной структуры выпуклых оболочек комбинаторных множеств является актуальным направлением исследований в комбинаторной оптимизации (см., например, [1-16]).

Изучение граневой структуры перестановочных многогранников для разных множеств и мультимножеств, элементы которых переставлялись, рассматривалось в [2-6, 17-22]. При этом в [2, 17] и в [18] рассматривались только множества, причем в [18] – множество натуральных чисел.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть задано мультимножество $G=\{g_1,...,g_k\}$, с основой $S(G)=(e_1,...,e_n)$, первичной спецификацией $[G]=(\eta_1,...,\eta_n)$, считаем, что $e_1>...>e_n$, $g_1\ge...\ge g_k$.

Введем такие необходимые далее параметры:

$$k_0=0,\ k_1=\eta_1,\ \ldots,\ k_i=\eta_1+...+\eta_i,\ \ldots,\ k_n=\eta_1+...+\eta_n=k.$$

Обозначим $J_k=\{1,2,...,k\}$.

Известна теорема (теорема 2.5 [4]), описывающая m-грани выпуклой оболочки всех перестановок элементов G – общего перестановочного многогранника $\Pi_{kn}(G)$ – в форме (назовем ее прямой):

$$\begin{cases} \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall\omega\subset J_k,\ |\omega|<k, & (1)\\ \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} g_i. & (2)\end{cases}$$

В этой теореме (пункт б), в частности, утверждается следующее. Если для подмножеств $\omega_1\subset...\subset\omega_\lambda=J_k$ неравенства в системе (1), (2) заменить равенствами, то множество F решений полученной системы является m-гранью общего перестановочного многогранника $\Pi_{kn}(G)$, а

$$m=\dim F=k-\left\{\lambda+\sum\left(|\omega_\sigma|-|\omega_{\sigma-1}|-1\right)\right\}, \tag{3}$$

где суммирование в (3) происходит по всем $\sigma \in J_\lambda$, для каждого из которых найдется такое $j \in J_n$, что

$$k_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|, \quad |\omega_\sigma| \le k_j,$$

при этом считаем, что $|\omega_0| = 0$.

В формулах (1)-(3) и далее $|A|$ обозначает количество элементов в множестве (мультимножестве) A.

Часто используется другая форма общего перестановочного многогранника (ОПМ), которую приведем далее. Цель статьи – изложение результатов получения критерия m-грани для этой формы ОПМ.

Рассмотрим вместе с G равное ему переупорядоченное мультимножество $Q = G = \{q_1, ..., q_k\}$, где $q_1 = g_k$, $q_2 = g_{k-1}$, …, $q_i = g_{k-i+1}$, …, $q_{k-1} = g_2$, $q_k = g_1$, обозначим основу $S(Q) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_1 = e_n$, $\varepsilon_2 = e_{n-1}$, …, $\varepsilon_i = e_{n-i+1}$, …, $\varepsilon_n = e_1$, таким образом $q_1 \le ... \le q_k$, $\varepsilon_1 < ... < \varepsilon_n$. Первичная спецификация мультимножества Q – кортеж в соответствии с порядком основы $S(Q)$ – вектор $[Q] = (\nu_1, ..., \nu_i, ..., \nu_n)$, состоящий из кратностей элементов ε_i основы:

$$\nu_i = k_Q(\varepsilon_i) = \eta_{n-i+1} \quad \forall i \in J_n = \{1, 2, ..., n\}, \tag{4}$$

где $k_Q(\varepsilon_i)$ означает кратность элемента основы ε_i в мультимножестве Q.

Как известно [3, 4, 19], многогранник перестановок $\Pi_{kn}(G)$ может быть описан так:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in \Omega} x_i \ge \sum\limits_{i=1}^{|\Omega|} q_i \quad \forall \Omega \subset J_k, |\Omega| < k, & (5) \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i. & (6) \end{cases}$$

Эту форму ОПМ назовем симметричной для формы (1), (2).

Рассмотрим вместе с системой (5) следующие неравенства:

$$\sum_{i \in W} x_i \ge \sum_{i=1}^{|W|} g_{k-i+1}, \quad \forall W \subset J_k, \quad |W| < k. \tag{7}$$

Понятно, что при $\Omega = W$ каждое неравенство в (5) с учетом (6) одинаково с соответствующим неравенством в (7).

Заметим, что множество

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in \omega} x_i \le \sum\limits_{i=1}^{|\omega|} g_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} g_i, \end{cases} \tag{8}$$

при фиксированном ω и $\Omega = J_k \setminus \omega$ совпадает с множеством

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\Omega} x_i \ge \sum\limits_{i=1}^{|\Omega|} q_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим множества $\omega_1 \subset ... \subset \omega_\lambda = J_k$ из приведенного выше пункта «б» теоремы 2.5 из [4]. Им соответствуют множества Ω_i со следующими свойствами:

$$\Omega_i = J_k \setminus \omega_i, \quad \forall i \in J_\lambda^0 = \{0,1,2,...,\lambda-1,\lambda\},$$
$$J_k = \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset ... \supset \Omega_{\lambda-1} \supset \Omega_\lambda = \varnothing, \tag{10}$$
$$\omega_0 = \varnothing.$$

Очевидно,

$$|\Omega_i| = k - |\omega_i| \quad \forall i \in J_\lambda^0. \tag{11}$$

Итак, система (1), (2) эквивалентна системе (5), (6), а множество F, задаваемое подмножеством $\omega_1 \subset ... \subset \omega_\lambda = J_k$ из (1) равно, согласно (8) и (9), множеству, которое из (5) задается подмножествами Ω_i вида (10).

Рассмотрим формулу (3) определения размерности m-грани F, используя связь (4) между ν_i и η_i.

Имеем,

$$m = \dim F = k - \left\{\lambda + \sum\left(k - |\Omega_\sigma| - \left(k - |\Omega_{\sigma-1}|\right) - 1\right)\right\} =$$
$$= k - \left\{\lambda + \sum\left(|\Omega_{\sigma-1}| - |\Omega_\sigma| - 1\right)\right\}. \tag{12}$$

Суммирование в (12) производят по всем $\sigma \in J_\lambda$, для каждого из которых найдется такое $j \in J_n$, что

$$k_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|; \quad |\omega_\sigma| \le k_j \tag{13}$$

с учетом $|\omega_0| = 0$.

Введем в рассмотрение параметры

$$\kappa_0 = 0;\ \kappa_1 = \nu_1 = \eta_n;\ \kappa_2 = \nu_1 + \nu_2 = \eta_n + \eta_{n-1},\ \ldots,\ \kappa_i = \nu_1 + ... + \nu_i = \eta_n + ... + \eta_{n-i+1},$$
$$\ldots,\ \kappa_n = \nu_1 + ... + \nu_n = \eta_n + ... + \eta_1 = k. \tag{14}$$

Условия (13) с учетом (11) и (14), если учесть, что

$$k_i = \eta_1 + ... + \eta_i = k - \kappa_{n-i} \quad \forall i \in J_n^0, \tag{15}$$

записываются так:

$$k - \kappa_{n-j+1} \le k - |\Omega_{\sigma-1}|; \quad k - |\Omega_\sigma| \le k - \kappa_{n-j},$$

или после упрощения

$$\kappa_{n-j} \le |\Omega_\sigma|, \quad |\Omega_{\sigma-1}| \le \kappa_{n-j+1},$$

где $|\Omega_\lambda|=0$, $\sigma\in J_\lambda=\{1,2,...,\lambda-1,\lambda\}$; $j\in J_n$. Заметим, что, если $j\in J_n$, то при этом то же можно сказать и про параметр $t=n-j+1$, т.е. $t\in J_n$.

Отметим, что в силу равенства множеств (8) и (9) получаем из части «а» теоремы 2.5 [4] такое: для m-грани F перестановочного многогранника $\Pi_{kn}(Q)$ существуют такие подмножества $J_k=\Omega_0\supset\Omega_1\supset...\supset\Omega_{k-m-1}$, для которых неравенства в (5) обращаются в равенства при любом $x\in F$, где F – множество решений системы, которая получается из (5), (6) заменой неравенств на равенства для $\Omega=\Omega_\sigma$, $\forall\sigma\in J_{k-m-1}$. Заметим, что для ω_{k-m} из «а» в 2.5 [4] соответствующее множество есть пустым, т.е. $\Omega_{k-m}=\varnothing$ в силу (10).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть мультимножество $Q=\{q_1,...,q_k\}$ имеет основу $S(Q)=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$, первичную спецификацию $[Q]=(\nu_1,...,\nu_n)$. Элементы Q и $S(Q)$ пронумерованы так, что

$$q_1\le...\le q_k;\quad \varepsilon_1<...<\varepsilon_n.$$

а) Пусть F – m-грань многогранника $\Pi_{kn}(Q)$, который определяется системой (5), (6). Тогда существуют такие подмножества $\Omega_{k-m-1}\subset\Omega_{k-m-2}\subset...\subset\Omega_1\subset\Omega_0=J_k$, для которых неравенства в (5) обращаются в равенства $\forall x\in F$, где F – множество решений системы, полученной из (5), (6) заменой в (5) знака неравенства на знак равенства $\forall\Omega=\Omega_\sigma$, $\sigma\in J_{k-m-1}$.

б) Если для подмножеств $\Omega\in\{\Omega_1,...,\Omega_{\lambda-1}\}$, где $\varnothing=\Omega_\lambda\subset\Omega_{\lambda-1}\subset...\subset\Omega_2\subset\Omega_1\subset\Omega_0=J_k$, неравенства в (5), (6) заменить равенствами, то множество F решений полученной системы является m-гранью многогранника $\Pi_{kn}(Q)$, где

$$m=\dim F=k-\left\{\lambda+\sum\left(|\Omega_{\sigma-1}|-|\Omega_\sigma|-1\right)\right\},\tag{16}$$

и нахождение суммы в формуле (16) проводится $\forall\sigma\in J_\lambda^0$, для каждого из которых найдется такое $t\in J_n$, что

$$\kappa_{t-1}\le|\Omega_\sigma|,\quad |\Omega_{\sigma-1}|\le\kappa_t,$$

при этом считаем, что $|\Omega_\lambda|=0$, а параметры κ_t $\forall t\in J_n^0$ заданы соотношениями (14).

Замечание 1. Иногда условия (10), (11), (16) удобно записывать так:

условие (10) в виде:

$$W_{\lambda-\sigma}=\Omega_\sigma=J_k\setminus\omega_\sigma,\quad \forall\sigma\in J_\lambda^0;\tag{17}$$

формулу (11) – таким образом:

$$|W_{\lambda-\sigma}|=k-|\omega_\sigma|,\quad \forall\sigma\in J_\lambda^0,\tag{18}$$

а формула размерности m из (16) трансформируется следующим образом:

$$m=k-\left\{\lambda+\sum\left(|W_{\lambda-\sigma+1}|-|W_{\lambda-\sigma}|-1\right)\right\},\tag{19}$$

где сумма определяется $\forall\sigma\in J_\lambda^0$, для которых $\exists t\in J_n$, что

$$\kappa_{t-1}\le|W_{\lambda-\sigma}|,\quad |W_{\lambda-\sigma+1}|\le\kappa_t;\tag{20}$$

 ISSN 2518-1785 (Online), ISSN 2413-6549 (Print)

при этом $|W_0| = 0$.

Заметим, что поскольку $\sigma \in J_\lambda^0$, то $l = \lambda - \sigma \in J_\lambda^0$. Поэтому формулы (17)-(20) можно переписать, учитывая, что выполняется условие

$$l + \sigma = \lambda. \tag{21}$$

Формула (17) принимает вид:

$$W_l = \Omega_\delta = J_k \setminus \omega_\sigma \quad \forall \sigma \in J_\lambda^0 \quad (\forall l \in J_\lambda^0), \quad \varnothing = W_0 \subset W_1 \subset ... \subset W_{\lambda-1} \subset W_\lambda = J_k; \tag{22}$$

формула (18):

$$|W_l| = k - |\omega_\sigma| \quad \forall \sigma \in J_\lambda^0 \quad (\forall l \in J_\lambda^0); \tag{23}$$

формула (19):

$$m = k - \left\{\lambda + \sum\left(|\omega_{l+1}| - |\omega_l| - 1\right)\right\}, \tag{24}$$

где суммирование ведется $\forall l \in J_\lambda^0$, для которых $\exists t \in J_n$, что

$$\kappa_{t-1} \le |\omega_l|; \quad |\omega_{l+1}| \le \kappa_t, \tag{25}$$

где (25) – трансформация формулы (20) при условии (21).

Замечание 2. Не нужно путать W_l из замечания 1 и множество W в формуле (7).

ВЫВОДЫ

В работе получен новый критерий m-грани для ОПМ в симметричной форме по критерию m-грани для прямой формы ОПМ.

Как направление дальнейших исследований представляется возможным обобщить изложенные результаты на множество k-размещений, используя обе формы теоремы (для прямой формы ОПМ в виде системы (1)-(2) и для симметричной формы ОПМ в виде системы (5), (6)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Емеличев В. А. Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М. : Наука, 1981. – 344 с.
3. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : учеб. пособие [Електронний ресурс] / О. А. Емец. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489.
4. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
5. Ємець О. О. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна, С. І. Недобачій. – Полтава : Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. – 64 с. – Ч.1. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488.
6. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.

7. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізація з дробово-лінійними функціями [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна. – К. : Наук. думка, 2005. – 117 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.

8. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв’язування : Монографія [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377.

9. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях [Електронний ресурс] / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 159 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/ handle/123456789/ 473.

10. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках [Електронний ресурс] / О. А. Емец, Н. Г. Романова. – К. : Наук. думка, 2010. – 105 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/ handle/123456789/474.

11. Ємець О. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв’язування, узагальнення : монографія [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 174 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.

12. Ємець О. О. Розв’язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : монографія [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.

13. Емец О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях : монография [Електронний ресурс] / О. А. Емец, О. А. Черненко. – К. : Наук. думка, 2011. – 154 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467.

14. Ємець О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації : монографія [Електронний ресурс] / О. О.Ємець, О. О. Черненко. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 204 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354.

15. Гуляницький Л. Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук : спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Л. Ф. Гуляницький. – К., 2005. – 32 с.

16. Донець Г. П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях : монографія / Г. П. Донець, Л. М. Колєчкіна. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – 309 с.

17. Ковалев М. М. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации / М. М. Ковалев, А. Н. Исаченко, Нгуен Нгиа // Докл. АН БССР. – 1978. – Т. 22, №10. – С. 869-872.

18. Gaiha P. Adjacent vertices on a permutohedron / P. Gaiha, S. Gupta // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – V. 32. N 2. – P. 323-327.

19. Емец О. А. Общий перестановочный многогранник и некоторые его свойства / О. А. Емец. – Полтава, 1983. – 20 с. – Деп. В УкрНИИНТИ 28.06.83, № 616-УкД83.

20. Емец О. А. Об общем полиперестановочном многограннике и некоторых его свойствах / О. А. Емец // Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1989.– 11 с. – Деп. В УкрНИИНТИ 31.10.89, № 2362-Ук-89.

21. Емец О. А. О геометрических свойствах множества перестановок / О. А. Емец // Тезисы докл. 42 научн. конф. проф., препод., науч. работн., аспир. и студент. ин-та / Минвуз УССР. Полт. инж.-строит. ин-т. – Полтава, 1990. – С. 215.

22. Бондаренко В. А. Обобщенные перестановочные многогранники и свойства алгоритмов сортировки / А. В. Бондаренко, Е. В. Шуникова // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – М., 1985. – 13 с. Деп. В ВИНИГИ № 7454-В85.

REFERENCES

1. Sergienko, I.V. and Kaspshitskaya, M.F. (1981), *Modeli i metody resheniia na EVM kombinatornykh zadach optimizatcii* [Models for Computer Solution of Combinatorial Optimization], Naukova Dumka, Kyiv.

2. Emelichev, V.A., Kovalev, M.M.and Kravtsov, M.M. (1981), *Mnogogranniki, grafy, optimizatciia* [Polyhedra, Graphs, Optimization], Gl. Red. Fiz.-Mat. Lit., Moscow.

3. Iemets, O.A. (1992), *Evklidovy kombinatornye mnozhestva i optimizatciia na nikh. Novoe v matematicheskom programmirovanii: ucheb. posobie* [Euclidian Combinatorial Sets and Optimization on Them. New in Mathematical Programming (An Educational Book)], UMK VO, Kiev, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489.

4. Stoyan, Y.G. and Iemets, O.O. (1993), *Teoriya i metody evklidovoyi kombinatornoyi optymizatsiyi* [Theory and Methods of Euclidian Combinatorial Optimization], Inst. Syst. Doslidzh. Osvity, Kyiv, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.

5. Iemets, O.O., Kolechkina, L.M. and Nedobachii, S.I. (1999), *Doslidzhennya oblastey vyznachennya zadach evklidovoyi kombinatornoyi optymizatsiyi na perestavnykh mnozhynakh* [Investigation of Domains of Euclidean Combinatorial Optimization Problems on Permutable Sets], Yu. Kondratyuk Techn. Univ., ChPKP Legat, Poltava, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488.

6. Stoyan, Yu.G., Iemets, O.O. and Yemets, E.M. (2005), *Optymizatsiya na polirozmishchennyakh: teoriya ta metody* [Optimization on Polypermutations: Theory and Methods], RVTs PUSKU, Poltava, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.

7. Iemets, O.O. and Kolechkina, L.M. (2005), *Zadachi kombinatornoyi optymizatsiya z drobovo-liniynymy funktsiyamy* [Combinatorial Optimization with Linear Fractional Functions], Naukova Dumka, Kyiv, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.

8. Iemets, O.O. and Roskladka, O.V. (2005), *Zadachi optymizatsiyi na polikombinatornykh mnozhynakh: vlastyvosti ta rozv"yazuvannya* [Optimization Problems on Polyarrangements: Properties and Solution], RVTs PUSKU, Poltava, available at: http://dspace.uccu.org.ua/ handle/123456789/377.

9. Yemets, O.A. and Barnolina, T.N. (2008), *Kombinatornaia optimizatciia na razmeshcheniiakh* [Combinatorial Optimization on Arrangements], Naukova Dumka, Kyiv, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.

10. Iemets, O.A. and Romanova, N.G. (2010), *Optimizatsiya na poliperestanovkakh* [Optimization on Polypermutations], Naukoba Dumka, Kyiv, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/ 123456789/474.

11. O. O. Iemets and T. O. Parfyonova, (2011), *Transportni zadachi kombinatornoho typu: vlastyvosti, rozv"yazuvannya, uzahal'nennya* [Combinatorial Transportation Problems: Properties, Solutions, Generalizations], RVV PUET, Poltava, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.

12. Iemets, O.O. and Yemets', Ol.O. (2011), *Rozv"yazuvannya zadach kombinatornoyi optymizatsiyi na nechitkykh mnozhynakh* [Solving Combinatorial Optimization Problems on Fuzzy Sets], PUET, Poltava, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.

13. Yemets, O.A. and Chernenko, O.A. (2011), *Optimizatsiya drobno-lineynykh funktsiy na razmeshcheniyakh* [Optimization of Linear Fractional Functions on Arrangements], Naukova Dumka, Kyiv, available at: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467.

14. Iemets, O.O. and Chernenko, O.O. (2011), *Modeli evklidovoyi kombinatornoyi optymizatsiyi* [Models of Euclidean Combinatorial Optimization], RVV PUET, Poltava, available at: http://dspace.uccu. org.ua/handle/123456789/354.

15. Hulianytskyi, L.F. (2005), "Development of models and approximate combinatorial optimization methods and their application in information technologies", Thesis abstract for Ph.D., 01.05.02, V.M. Glushkov Inst. Of Cybernetis, NAS of Ukraine.

16. Donets, G.P. and Kolechkiva, L.M. (2011), *Ekstremal'ni zadachi na kombinatornykh konfihuratsiyakh* [Extremum Problems on Combinatorial Configurations], RVV PUET, Poltava.

17. Kovaliov, M.M., Isachenko, A.N. and Ngia, Nguen (1978), "Linearization of Combinatorial Optimization Problems", *Dokl. AN BSSR*, vol. 22, no. 10, pp. 869-872.

18. Gaiha, P. and Gupta, S. (1977), "Adjacent Vertices on a Permutohedron", *SIAM J. Appl. Math*, vol. 32, no. 2, pp. 323-327.

19. Yemets, O.A. (1983), “General Polyhedron of Permutations and Some of Its Properties”, Dep. in UkrNIINTI 28.06.83, № 616-UkD 83, Poltava.

20. Yemets, O.A. (1989), “About General Polyhedron of Permutations and Some of Its Properties, Poltava civil engineering institute”, Dep. in UkrNIINTI 31.10.89, № 2362-Uk-89, Polt. inzh.-stroit. in-t., Poltava.

21. Yemets, O.A. (1990), “About Geometrical Properties of the Set of Permutations”, *Tezisy dokl. 42 nauchn. konf. prof., prepod., nauch. rabotn., aspir. i student. in-ta* [Proc. 42th Sci. Conf. of Professors, Teachers, Scientists, Post graduate Students and Students of the Institute], Minvuz USSR, Polt. inzh.-stroit. in-t., Poltava, 1990, p. 215.

22. Bondarenko, V.A. and Shunikova, E.V. (1985), “Generalized Polyhedrons of Permutation and Properties of Sort Algorithms”, *Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki*, Moscow, Dep. in VINIGI № 7454-V85.

УДК 531:383-62:50

ПРО АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛЯПУНОВА ТА РІККАТІ ДЛЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

[1]Зінчук М. О., к. т. н., [2]Святовець І. Ф.,[3]Тетерятник О. В.

[1,3]*Інститут математики НАН України,*
вул. Терещенківська, 3, Київ-4, 301601, Україна

[2]*Запорізька державна інженерна академія,*
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69006, Україна

sv.irina0702@gmail.com, E.Teteryatnik@gmail.com

Розглянуто неперервні та дискретні майже консервативні автономні та керовані системи, які за допомогою деякого ортогонального перетворення зводяться до канонічних форм. Для перетворених систем побудовані рівняння Ляпунова та Ріккаті і показано, при яких значеннях параметра ε їх асимптотичні розв’язки коректні, тобто відповідні ряди збіжні. За допомогою зворотного перетворення отримана збіжність аналогічних рядів для початкових систем.

Ключові слова: майже консервативна система, рівняння Ляпунова і Ріккаті, асимптотичні рішення, збіжність рядів.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА И РИККАТИ ДЛЯ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

[1]Зинчук Н. А., к. т. н., [2]Святовец И. Ф., [3]Тетерятник Е. В.

[1,3]*Институт математики НАН Украины,*
ул. Терещенковская, 3, Киев-4, 301601, Украина

[2]*Запорожская государственная инженерная академия,*
просп. Соборный, 226, Запорожье, 69006, Украина

sv.irina0702@gmail.com, E.Teteryatnik@gmail.com

Рассмотрены непрерывные и дискретные почти консервативные автономные и управляемые системы, которые с помощью некоторого ортогонального преобразования сводятся к каноническим формам. Для преобразованных систем построены уравнения Ляпунова и Риккати и показано, при каких значениях параметра ε их асимптотические решения корректны, то есть соответствующие ряды сходящиеся. С помощью обратного преобразования получена сходимость аналогичных рядов для начальных систем.

Ключевые слова: почти консервативная система, уравнения Ляпунова и Риккати, асимптотические решения, сходимость рядов.