9. Balitskii, O.O., Eliash, Jacek, Grishchenko, S., Kvashnivska, N. and Polischuk, N. (2015), "Layered crystals of growth in vodneviy enerhetytsi", *Netradytsiyni I ponovlyuvalni energy sources as alternatyvni primary sources of energy in the region*, pp. 152-154.

10. Boledzyuk, V.B., Kovalyuk, Z.D, Kudrynskyy., Z.R., Lytvyn, A.S. and Shevchenko, A.D. (2014), "Structure and properties mahnytnыe sloystыh krystallov InSe, ynterkalyrovannыh cobalt", *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, vol. 84, issue 10, pp. 44-47.

11. Eliash, Jacek, Kvashnivska, N.M., Balitskii, O.O., Gryshchenko, S.A. and Polischuk, N.M. (2014), "Tverdi layered interkalovani hydrogen oil on the basis selenidiv holiyu and indium problems himmotolohiyi", *Teoriia ta praktyka ratsionalnoho vykorystannia tradytsiinykh i alternatyvnykh palyvno-mastylnykh materialiv*, pp. 226-229.

12. Kovalyuk, Z.D., Pyrlya, N.M., Boledzyuk, V.B. and Szewczyk, V.V. (2011), "The pressure and tenzochutlyvist layered semiconductor InSe and GaSe", *Ukr. fiz. zhurn.*, vol. 56, no. 4, pp. 368-372.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ ЗСУВУ ОДНОСПРЯМОВАНОГО КОМПОЗИТУ ПРИ НОРМАЛЬНОМУ РОЗПОДІЛІ РАДІУСА ВОЛОКНА

Клименко М. І., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. М., к. т. н., доцент, Смолянкова Т. М., аспірант

Запорізький національний університет, вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

tanya-smolyankova@yandex.ru

У роботі пропонується методика визначення ефективного модуля зсуву для односпрямованого композиційного матеріалу. Композит, що складається з трансверсально-ізотропної матриці та трансверсально-ізотропного волокна, моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. При цьому волокно розглядається як циліндр, радіус якого є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Запропоновано методику для визначення математичного сподівання модуля зсуву.

Ключові слова: композиційний матеріал, матриця, волокно, ефективний модуль зсуву, нормальний закон розподілу, умови узгодженості.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ СДВИГА ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА ПРИ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАДИУСА ВОЛОКНА

Клименко М. И., к. ф.-м. н., доцент, Гребенюк С. Н., к. т. н., доцент, Смолянкова Т. Н., аспирант

Запорожский национальный университет, ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

tanya-smolyankova@yandex.ru

В работе предлагается методика определения эффективного модуля сдвига для однонаправленного композиционного материала. Композит, состоящий из трансверсально-изотропной матрицы и трансверсально-изотропного волокна, моделируется сплошным однородным трансверсально-изотропным материалом. При этом волокно рассматривается как цилиндр, радиус которого является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Приведена методика для определения математического ожидания модуля сдвига.

Ключевые слова: композиционный материал, матрица, волокно, эффективный модуль сдвига, нормальный закон распределения, условия согласованности.

DETERMINATION OF EFFECTIVE SHEAR MODULUS OF UNIDIRECTIONAL COMPOSITE UNDER THE NORMAL DISTRIBUTION OF FIBER RADIUS

Klymenko M. I., Hrebeniuk S. M., Smolyankova T. N.

Zaporizhzhya National University,
Zhykovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

tanya-smolyankova@yandex.ru

This paper proposes a method of determining the effective longitudinal shear modulus for the composite material in the problem of longitudinal tensile composite. Object of study is unidirectional composite material with a hexagonal arrangement of fibers. The composite's fiber is represented as a solid cylinder, and the matrix corresponds a hollow cylinder. In the composite matrix and fiber are assumed to be transversely isotropic. The radius of the fiber is considered as a continuous random quantity, normally distributed, respectively, the volume content of the fiber in the composite is also a random quantity. Its mathematical expectation is expressed through the mathematical expectation and variance of the fiber radius.

To determine the effective shear modulus of the composite is supposed to use the kinematic matching conditions. First, to solve the boundary value problem for joint deformation of an transversely isotropic matrix and transversely isotropic fiber. For this, previously founding a general solution of the problem on axisymmetric deformation of isotropic cylinder under longitudinal tension, herewith uses the basic equations of elasticity theory in a cylindrical coordinate system. The obtained solution is used for determining the constituent elements of the tension and deformation of the fiber and the matrix. It is assumed, that at the contact surface of the matrix and the fiber is the normal displacement and tension of the fiber and the matrix are the same, axial movement of the fiber and the matrix are also equal for all values of the axial coordinate. The normal tension on the outer surface of the cylinder modeling the matrix are equal to zero. Found using these conditions, axial and radial displacements and tensions are functions of the fiber volume content in the cell matrix, as well as technical elastic constants of the matrix and the fiber.

Next, obtained a solution corresponding to the boundary value problem for the composite. Here is a model of composite solid homogeneous transversely isotropic cylinder. This solution depends on the effective elastic constants of transversely isotropic material. For both tasks, axial tension is assumed to be constant. The ratio between the axial tension of the matrix and the fiber, and the axial tension in the transversely isotropic material model of the composite is determined by the equilibrium conditions. As the matching conditions for considering the problem of longitudinal tensile homogeneous transversely isotropic composite and joint longitudinal tensile of transversely isotropic matrix and transversely isotropic fiber are selected conditions of the axial displacement at arbitrary axial coordinate and equality of radial displacements on an outer surface of the cylinder, modeling composite. The use of such matching conditions allowed to determine the effective longitudinal shear modulus as a function of the determined values – the elastic constants of the matrix and the fiber, as well as random argument – the volumetric fiber content in the composite cell. Found mathematical expectation of this indicator. Methodology proposed in the paper also allows to determine the effective elastic constants for composites, having random characteristics with different distribution laws.

Keywords: composite material, matrix, fiber, effective shear modulus, normal distribution, matching conditions.

ВСТУП

Одним з найбільш поширених методів моделювання в механіці композиційних матеріалів є побудова моделі композита у вигляді суцільного однорідного середовища з ефективними сталими, які найточніше відображають найбільш суттєві механічні властивості матеріалу. Ці сталі визначаються як коефіцієнти, що пов'язують усереднені за об'ємом значення компонентів тензорів напружень та деформацій за певних крайових умов. Знаходженню ефективних характеристик для композиційних матеріалів з транстропними властивостями присвячена значна кількість наукових досліджень. Зокрема, у роботі [1] розглянуто розв'язання цієї задачі для випадку трансверсально-ізотропних властивостей волокна, у [2] отримані ефективні пружні сталі для композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропним волокном та ізотропною матрицею. У дослідженнях [3, 4] визначені ефективні пружні сталі для трансверсально-ізотропних матриці та волокна, при цьому за умову узгодження було прийнято рівність відповідних компонент вектора переміщень. У монографії [5] висвітлюються основи теорії деформування та ефективних властивостей композиційних матеріалів стохастичної структури, зокрема, розглянуто ряд задач, пов'язаних з визначенням ефективних характеристик композитів різних типів зі стохастичними параметрами. Задачі визначення ефективних пружних сталих для односпрямованих композитів зі стохастичними геометричними характеристиками розглянуто в [6, 7].

Дослідження сучасних технологій виробництва композиційних матеріалів свідчить про актуальність математичного моделювання їх властивостей з урахуванням стохастичності деяких характеристик композитів. Метою даної роботи є знаходження залежності ефективного модуля зсуву композиту від об'ємного вмісту волокон з радіусом, розподіленим за нормальним законом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЗАГАЛЬНА СХЕМА ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Об'єктом дослідження є односпрямований композитний матеріал з гексагональним розташуванням волокон. Розглядається випадок, коли трансверсально-ізотропні властивості проявляють матеріали матриці і волокна. Радіус волокна розглядається як випадкова величина, розподілена за нормальним законом. Задача полягає у визначенні ефективного модуля зсуву композита при його представленні у вигляді однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу.

Представимо елемент волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними властивостями у вигляді комбінації двох нескінченних циліндрів – трансверсально-ізотропного порожнистого, який моделює матрицю і трансверсально-ізотропного суцільного, що відповідає волокну (рис. 1).

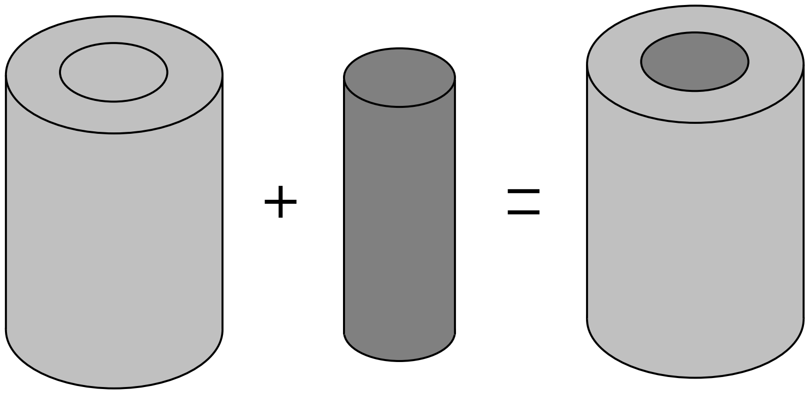

Рис. 1. Елемент волокнистого композита

Для цього об'єм гексагональної комірки апроксимується об'ємом циліндра так, щоб співвідношення об'єму волокон у гексагональній комірці і об'єму волокон у циліндричній комірці були рівними. Волокно розглядається як суцільний циліндр з радіусом a, елементарну гексагональну комірку матриці апроксимує порожнистий циліндр, радіус якого дорівнює b (рис.2).

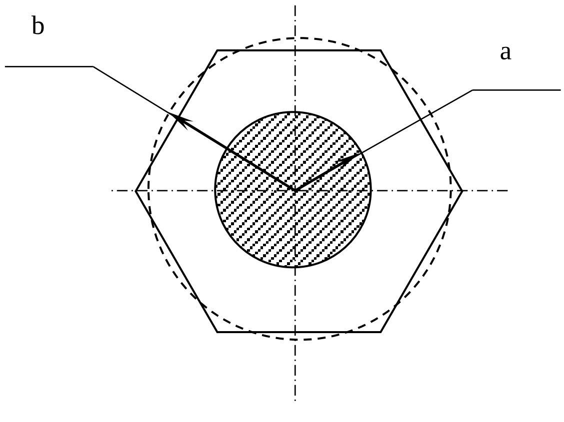

Рис. 2. Гексагональна комірка

Якщо об'ємний вміст волокон у композиті дорівнює f, то враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку займає волокно в елементарній комірці, мають однакову висоту, маємо співвідношення:

$$f = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2}. \tag{1}$$

Технології виробництва композитних матеріалів переважно зумовлюють випадковий характер їх параметрів. Зокрема, за відсутності системних відхилень, ці параметри можна розглядати як нормально розподілені випадкові величини. Нехай радіус a волокна є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з відомими параметрами розподілу: математичним сподіванням a_0 та середнім квадратичним відхиленням s, які можуть бути визначені зі статистичних даних контролю якості виробництва композитних матеріалів. Тоді об'ємний вміст f волокна в комірці теж є випадковою величиною, математичне сподівання f_0 якої дорівнює:

$$f_0 = m(f) = \frac{m\left(a^2\right)}{b^2} = \frac{a_0^2 + s^2}{b^2}. \tag{2}$$

Пружні характеристики знаходяться із розв'язання двох крайових задач. Спочатку розв'яжемо крайову задачу сумісного деформування трансверсально-ізотропних матриці та волокна, звідки знайдемо компоненти напружено-деформованого стану композиту як функції пружних сталих їх матеріалів та об'ємної частки волокна в композиті. Потім знайдемо розв'язок аналогічної крайової задачі для композиту, представленого у вигляді однорідного трансверсально-пружного матеріалу з поки що невідомими пружними константами. При цьому отримаємо компоненти напружено-деформованого стану у вигляді функцій ефективних пружних сталих матеріалу, що моделює композит. З умов узгодженості, зокрема, умови рівності компонент вектора переміщень для вказаних першої та другої крайових задач, визначаються невідомі величини [2].

ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ ЗСУВУ КОМПОЗИТУ

Знайдемо загальний розв'язок задачі про вісесиметричне деформування нескінченного циліндра. Для цього наведемо основні співвідношення, що характеризують чистий поздовжній зсув в циліндричній області (рис. 3).

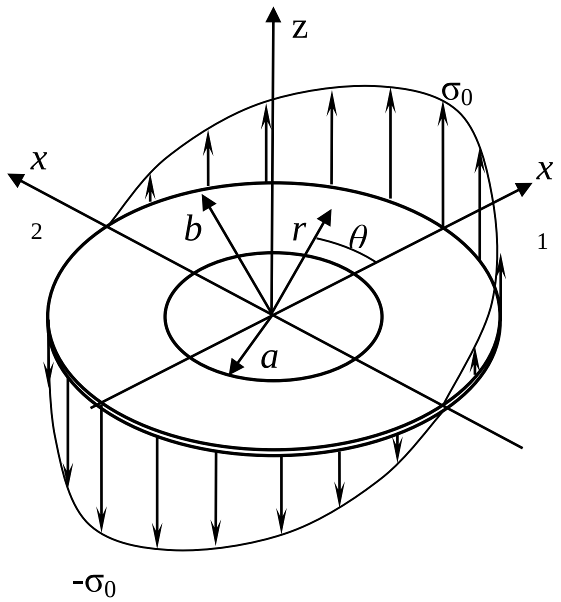

Рис. 3. Крайові умови (для напружень $\sigma_{zr}\left(b,\theta\right)$) при поздовжньому зсуві в кільці

Напружено-деформований стан визначається такими характеристиками: $\sigma_{zz}=\sigma_{rr}=\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{r\theta}=0$, $\sigma_{zr}=\sigma_{zr}\left(r,\theta\right)$, $\sigma_{\theta z}=\sigma_{\theta z}\left(r,\theta\right)$; $\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{rr}=\varepsilon_{\theta\theta}=\gamma_{r\theta}=0$, $\gamma_{zr}=\gamma_{zr}\left(r,\theta\right)$, $\gamma_{\theta z}=\gamma_{\theta z}\left(r,\theta\right)$.

Для моделювання напружено-деформованого стану чистого поздовжнього зсуву в циліндричній області, необхідно, щоб виконувалася крайова умова:

$$\sigma_{zr}\left(b,\theta\right)=\sigma_0\cos\theta . \tag{3}$$

При цьому виконуються співвідношення:

$$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u_\theta}{\partial z}=0 .$$

У цьому випадку рівняння рівноваги матимуть вигляд:

$$\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_{zr}}{r}=0,$$

або в переміщеннях

$$\frac{\partial^2u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u_z}{\partial\theta^2}=0 .$$

Розв’язком цього рівняння є функція:

$$u_z\left(r,\theta\right)=\left(C_1r+\frac{C_2}{r}\right)\cos\theta , \tag{4}$$

тоді, зважаючи на формули

$$\gamma_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial\theta},\quad \gamma_{zr}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z},$$

можна отримати співвідношення для деформацій:

$$\gamma_{\theta z}\left(r,\theta\right)=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial\theta}=-\left(C_1+\frac{C_2}{r^2}\right)\sin\theta ; \tag{5}$$

$$\gamma_{zr}\left(r,\theta\right)=\frac{\partial u_z}{\partial r}=\left(C_1-\frac{C_2}{r^2}\right)\cos\theta . \tag{6}$$

Враховуючи формули

$$\sigma_{zr}=G_{12}\gamma_{zr},\quad \sigma_{z\theta}=G_{12}\gamma_{z\theta},$$

знаходимо співвідношення для напружень у наступному вигляді:

$$\sigma_{zr}\left(r,\theta\right)=G_{12}\left(C_1-\frac{C_2}{r^2}\right)\cos\theta ; \tag{7}$$

$$\sigma_{z\theta}\left(r,\theta\right)=-G_{12}\left(C_1+\frac{C_2}{r^2}\right)\sin\theta . \tag{8}$$

Розглянемо задачу про сумісний поздовжній зсув суцільного циліндра $\left(0\le r\le a\right)$, який моделює волокно, і порожнистого циліндра $\left(a\le r\le b\right)$, який моделює матрицю.

У подальших позначеннях будемо використовувати символ $^\circ$ для позначення величин, які характеризують волокно, символ * – величин, які відносяться до матриці.

Основні співвідношення для матриці матимуть вигляд (перепозначимо C_1 на A, а C_2 на B):

$$u_z^*(r,\theta) = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\cos\theta, \tag{9}$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r,\theta) = -\left(A + \frac{B}{r^2}\right)\sin\theta, \tag{10}$$

$$\gamma_{zr}^*(r,\theta) = \left(A - \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta, \tag{11}$$

$$\sigma_{zr}^*(r,\theta) = G_{12}^*\left(A - \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta, \tag{12}$$

$$\sigma_{z\theta}^*(r,\theta) = -G_{12}^*\left(A + \frac{B}{r^2}\right)\sin\theta. \tag{13}$$

Основні співвідношення для волокна з урахуванням скінченності переміщень при $r = 0$ набудуть вигляду (перепозначимо C_1 на C):

$$u_z^\circ(r,\theta) = Cr\cos\theta, \tag{14}$$

$$\gamma_{\theta z}^\circ(\theta) = -C\sin\theta, \tag{15}$$

$$\gamma_{zr}^\circ(\theta) = C\cos\theta, \tag{16}$$

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = G_{12}^\circ C\cos\theta, \tag{17}$$

$$\sigma_{z\theta}^\circ(\theta) = -G_{12}^\circ C\sin\theta. \tag{18}$$

Щоб знайти невідомі сталі у вказаних вище співвідношеннях (9)-(18) для задачі про сумісний поперечний зсув матриці і волокна, скористаємося крайовими умовами (3) і умовами неперервності напружень та переміщень на межі розподілу матеріалів:

$$\sigma_{zr}^\circ(\theta) = \sigma_{zr}^*(a,\theta), \tag{19}$$

$$u_z^\circ(a,\theta) = u_z^*(a,\theta). \tag{20}$$

Із (3) одержимо:

$$\sigma_0 = G_{12}^*\left(A - \frac{B}{b^2}\right),$$

або

$$A = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*} + \frac{B}{b^2}. \tag{21}$$

Отже, із (20) знаходимо

$$C = A + \frac{B}{a^2},$$

з урахуванням (21)

$$C = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*} + B\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}\right). \tag{22}$$

Насамкінець, із (19) отримаємо

$$G_{12}^{*}\left(A-\frac{B}{a^{2}}\right)=G_{12}^{\circ}C\ ,$$

або, зважаючи на (21), (22), матимемо

$$B=\frac{\sigma_0 a^2\left(G_{12}^{\circ}-G_{12}^{*}\right)}{G_{12}^{*}\left(G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)\right)}\ . \tag{23}$$

Тоді

$$C=\frac{-2\sigma_0}{\left(G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)\right)}\ , \tag{24}$$

$$A=\frac{-\sigma_0\left(G_{12}^{*}+G_{12}^{\circ}\right)}{G_{12}^{*}\left(G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)\right)}\ . \tag{25}$$

Враховуючи (24), (25) остаточно запишемо співвідношення для напружено-деформованого стану матриці при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^{*}\left(r,\theta\right)=\frac{\sigma_0}{G_{12}^{*}\left(G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)\right)}\left(-\left(G_{12}^{*}+G_{12}^{\circ}\right)r+\frac{a^2\left(G_{12}^{\circ}-G_{12}^{*}\right)}{r}\right)\cos\theta\ , \tag{26}$$

$$\gamma_{\theta z}^{*}\left(r,\theta\right)=\frac{\sigma_0}{G_{12}^{*}\left(G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)\right)}\left(G_{12}^{*}+G_{12}^{\circ}-\frac{a^2\left(G_{12}^{\circ}-G_{12}^{*}\right)}{r^2}\right)\sin\theta\ , \tag{27}$$

$$\gamma_{zr}^{*}\left(r,\theta\right)=-\frac{\sigma_0}{G_{12}^{*}\left(G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)\right)}\left(G_{12}^{*}+G_{12}^{\circ}+\frac{a^2\left(G_{12}^{\circ}-G_{12}^{*}\right)}{r^2}\right)\cos\theta\ , \tag{28}$$

$$\sigma_{zr}^{*}\left(r,\theta\right)=-\frac{\sigma_0}{G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)}\left(G_{12}^{*}+G_{12}^{\circ}+\frac{a^2\left(G_{12}^{\circ}-G_{12}^{*}\right)}{r^2}\right)\cos\theta\ , \tag{29}$$

$$\sigma_{z\theta}^{*}\left(r,\theta\right)=\frac{\sigma_0}{G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)}\left(G_{12}^{*}+G_{12}^{\circ}-\frac{a^2\left(G_{12}^{\circ}-G_{12}^{*}\right)}{r^2}\right)\sin\theta\ . \tag{30}$$

Враховуючи (24), остаточно можна отримати основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан волокна при сумісному поздовжньому зсуві:

$$u_z^{\circ}\left(r,\theta\right)=\frac{-2\sigma_0 r\cos\theta}{G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)}\ , \tag{31}$$

$$\gamma_{\theta z}^{\circ}\left(\theta\right)=\frac{2\sigma_0\sin\theta}{G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)}\ , \tag{32}$$

$$\gamma_{zr}^{\circ}\left(\theta\right)=\frac{-2\sigma_0\cos\theta}{G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)}\ , \tag{33}$$

$$\sigma_{zr}^{\circ}\left(\theta\right)=\frac{-2\sigma_0 G_{12}^{\circ}\cos\theta}{G_{12}^{*}\left(f-1\right)-G_{12}^{\circ}\left(f+1\right)}\ , \tag{34}$$

$$\sigma^{\circ}_{z\theta}\left(\theta\right)=\frac{2\sigma_0 G^{\circ}_{12}\sin\theta}{G^{*}_{12}\left(f-1\right)-G^{\circ}_{12}\left(f+1\right)}. \quad (35)$$

Аналогічно можна отримати розв’язок задачі для композиту, який моделюється транстропним однорідним матеріалом. У цій задачі композит матиме вигляд суцільного нескінченного циліндра радіусу b. Крайові умови задані співвідношенням (3). Напружено-деформований стан буде описуватись співвідношеннями, аналогічними до співвідношень для волокна. Компоненти переміщень, деформацій і напружень в однорідному транстропному матеріалі знаходимо за формулами:

$$u_z\left(r,\theta\right)=\tilde{A}r\cos\theta,$$

$$\gamma_{\theta z}\left(r,\theta\right)=-\tilde{A}\sin\theta,$$

$$\gamma_{zr}\left(r,\theta\right)=\tilde{A}\cos\theta,$$

$$\sigma_{zr}\left(r,\theta\right)=\tilde{A}G_{12}\cos\theta,$$

$$\sigma_{z\theta}\left(r,\theta\right)=-\tilde{A}G_{12}\sin\theta.$$

З крайової умови (3) знайдемо сталу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}=\frac{\sigma_0}{G_{12}}.$$

Остаточно отримаємо:

$$u_z\left(r,\theta\right)=\frac{\sigma_0}{G_{12}}r\cos\theta, \quad (36)$$

$$\gamma_{\theta z}\left(r,\theta\right)=-\frac{\sigma_0}{G_{12}}\sin\theta, \quad (37)$$

$$\gamma_{zr}\left(r,\theta\right)=\frac{\sigma_0}{G_{12}}\cos\theta, \quad (38)$$

$$\sigma_{zr}\left(r,\theta\right)=\frac{\sigma_0}{G_{12}}G_{12}\cos\theta, \quad (39)$$

$$\sigma_{z\theta}\left(r,\theta\right)=-\frac{\sigma_0}{G_{12}}G_{12}\sin\theta. \quad (40)$$

Отже, отримано розв’язок задачі на чистий поздовжній зсув для спільного деформування нескінченного порожнистого і суцільного циліндрів, що моделюють матрицю і волокно відповідно. Також було отримано розв’язок для нескінченного суцільного циліндра, що моделює композиційний матеріал. Як умови узгодження можна використати, наприклад, рівність осьових переміщень на зовнішній межі:

$$u_z\left(b,\theta\right)=u^{*}_z\left(b,\theta\right). \quad (41)$$

Використовуючи отриману рівність (41), матимемо:

$$G_{12}=\frac{G^{*}_{12}\left(G^{*}_{12}\left(1-f\right)+G^{\circ}_{12}\left(f+1\right)\right)}{G^{\circ}_{12}\left(1-f\right)+G^{*}_{12}\left(f+1\right)}. \quad (42)$$

ISSN 2518-1785 (Online), ISSN 2413-6549 (Print)

Оскільки радіус волокна a є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з математичним сподіванням a_0 та середнім квадратичним відхиленням s, то об'ємний вміст $f = \frac{a^2}{b^2}$ волокна у комірці теж є випадковою величиною, щільність розподілу $\varphi(f)$ якої визначається з урахуванням того, що функція $f(a)$ не є монотонною:

$$\varphi(f) = \frac{b}{2s\sqrt{2\pi f}} \left(e^{-\frac{\left(b\sqrt{f}+a_0\right)^2}{2s^2}} + e^{-\frac{\left(b\sqrt{f}-a_0\right)^2}{2s^2}} \right)$$

при $f > 0$.

Тоді математичне сподівання випадкової величини G_{12} визначатиметься збіжним невласним інтегралом:

$$M\left(G_{12}\right) = \int_0^{+\infty} G_{12}(f) \cdot \varphi(f) df \,, \tag{43}$$

де функція випадкового аргументу $G_{12}(f)$ визначається рівністю (42).

Таким чином, визначено математичне сподівання ефективного модуля зсуву композиційного матеріалу, що дає змогу використовувати цей показник при дослідженні механічних властивостей композитів з трансверсально-ізотропними матрицею та волокном.

ВИСНОВКИ

У роботі запропонований спосіб визначення ефективного модуля зсуву для композиційного матеріалу, який складається з трансверсально-ізотропних матриці та волокна. Радіус волокна розглядається як неперервна випадкова величина з нормальним законом розподілу, тому об'ємний вміст волокна в композиті також є випадковою величиною. Для розв'язання цієї задачі спочатку знайдено розв'язок крайової задачі для сумісного деформування трансверсально-ізотропних матриці та волокна. Компоненти напруження та деформації виражені у вигляді функцій їх механічних характеристик. Надалі одержано розв'язок аналогічної крайової задачі для однорідного трансверсально-ізотропного циліндру, що є моделлю композиту. Використання умов узгодження переміщень дозволило визначити математичне сподівання ефективного модуля зсуву композиту як функцію від пружних сталих матриці і волокна. Насамкінець, наведено умову для визначення математичного сподівання модуля зсуву.

Вказані методи можуть бути застосовані при визначенні ефективних пружних сталих для композитів з характеристиками, що виступають випадковими величинами з різноманітними розподілами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Растеряев Ю. К. Составные резинокордные материалы и механика их деформирования / Ю. К. Растеряев, Г. Н. Агальцов // Геотехнічна механіка. – 2005. – Вип. 60. – С. 200-248.

2. Класторны М. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов / М. Класторны, П. Кондерла, Р. Пиекарский // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 109-144.

3. Гребенюк С. Н. Упругие характеристики композиционного материала с транстропной матрицей и волокном / С. Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2011. – Вип. 12. – С. 62-68.

4. Гребенюк С. Н. Определение модуля сдвига композиционного материала с транстропными матрицей и волокном / С. Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2012. – Вип. 13. – С. 92-98.

5. Хорошун Л. П. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов, Е. Н. Шикула, Л. В. Назаренко // Механика композитов : В 12 томах, Т. 3. – К. : Наукова думка, 1993. – 388 с.
6. Гребенюк С. М. Визначення ефективного модуля пружності композиту при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці / С. М. Гребенюк, М. І. Клименко // Вестник Херсонского национального университета. – 2014. – № 3(50). – С. 254-258.
7. Hrebeniuk S. Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber / S. Hrebeniuk, M. Klymenko, К. Omelchenko // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2014. – № 1. – С. 14-23.

REFERENCES

1. Rasteryaev, JU.K. and Agal’cov, G.N. (2005), “Rubber-cord Composite materials and their mechanical deformation”, *Geotehnichna mehanika*, issue 60, pp. 200-248.
2. Klastorny, M., Konderla, P. and Piekarskiy, R. (2009), “Exact theory stiffness of unidirectional fiber-reinforced composites”, *Mehanika kompozitnyh materialov*, vol. 45, no. 1, pp. 109-144.
3. Grebenjuk, S.N. (2011), “Elastic characteristics of the composite material with the matrix and fiber transtropic”, *Metody rozv"yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdoho tila*, issue 12, pp. 62-68.
4. Grebenjuk, S.N. (2012), “Definition of the shear modulus of the composite material with the matrix and fiber transtropic”, *Metody rozv"yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdoho tila*, issue 13, pp. 92-98.
5. Horoshun, L.P., Maslov, B.P., SHikula, E.N. and Nazarenko, L.V. (1993), *Statisticheskaya mekhanika i effektivnye svoystva materialov* [Statistical mechanics and the effective properties of materials], Naukova dumka, Kiev.
6. Grebenjuk, S.M. and Klimenko, M.I. (2014), “Determination of the effective modulus composite normal distribution elastic modulus fibers and the matrix”, *Vestnik Hersonskogo nacional’nogo universiteta*, no. 3(50), pp. 254-258.
7. Hrebeniuk, S., Klymenko, M. and Omelchenko, К. (2014), “Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiber”, *Visnik Zaporizkogo natsionalnogo universitetu, Fizyko-matematychni nauky*, no. 1, pp. 14-23.

УДК 519.8

ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Козин И. В., д. ф.-м. н., профессор, Батовский С. Е., аспирант, Сардак В. И., аспирант

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

ainc00@gmail.com, user.sergey.b@gmail.com

Исследуется проблема генерации графов для создания баз данных тестовых задач. Рассматриваются алгоритмы генерации случайных графов с различными свойствами. Для различных видов графов приводятся алгоритмы генерации (граф-генераторы). Предложены граф-генераторы для деревьев произвольного вида, для деревьев с ограничениями на степени вершин, для графов произвольного вида, для связных графов, для графов с ограничениями на степени вершин, для регулярных графов, для графов с заданным числом ребер.

Ключевые слова: случайные графы, алгоритмы генерации графов, модель Эрдеша-Реньи, связный граф, регулярный граф.