

УДК 534

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ, АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, Абасов М. М., докторант

*Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1*

flatifov@mail.ru

В настоящей работе представлены результаты вычисления частот свободных колебаний цилиндрической анизотропной оболочки из полимерных материалов, в частности стеклопластиков, при граничных условиях Навье.

Постоянные упругости оболочки зависят от угла намотки стекловолокна. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построено уравнение для определения собственной частоты свободных колебаний продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений уравнения движения жидкости. Используя асимптотические формулы логарифмической производной функции Бесселя, получены приближенные формулы для нахождения собственных частот колебаний исследуемой конструкции.

Ключевые слова: колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, подкрепление, принцип вариации.

АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПОЗДОВЖНЬО ПІДКРІПЛЕНОЇ, АНИЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РІДИНОЮ ПРИ ОСЬОВОМУ СТИСКАННІ

Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, Абасов М. М., докторант

*Азербайджанський архітектурно-будівельний університет,
вул. А. Султанова, 5, м. Баку, Аз.1073/1*

flatifov@mail.ru

У дослідженні подано результати обчислення частот вільних коливань циліндричної анизотропної оболонки з полімерних матеріалів, зокрема склопластиків, при граничних умовах Нав'є. Постійні пружності оболонки залежать від кута намотування скловолокна. На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона, побудовано рівняння для визначення власної частоти вільних коливань поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки, що контактує з рідиною. Діючі поверхневі навантаження з боку рідини на поздовжньо підкріплену циліндричну оболонку визначаються з розв'язання рівняння руху рідини. Використовуючи асимптотичні формули логарифмічної похідної функції Бесселя, отримані наближені формули для знаходження власних частот коливань досліджуваної конструкції.

Ключові слова: коливання, оболонка, ідеальна рідина, напруга, підкріплення, принцип варіації.

ANALYSIS OF FREE OSCILLATIONS OF THE LONGITUDINAL REINFORCEMENT, ANIZOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH LIQUID UNDER AXIAL COMPRESSION

Latifov F. S., Head: Prof., Professor, Abbasov M., doctoral

*Azerbaijan Architecture and Construction University,
5, A.Sultanova str., Baku, Az.1073/1*

flatifov@mail.ru

This paper presents the results of calculating the frequency of free oscillations of anisotropic cylindrical shell made of polymeric materials, such as fiberglass, with Navier boundary conditions.

Constant envelope elasticity depend on the angle of winding fiberglass. On the basis of the variational principle Ostrogradskii-Hamilton, constructed an equation to determine the natural frequency of the free oscillations of the longitudinal stiffened orthotropic cylindrical shell in contact with the liquid. Existing surface load by the fluid on the longitudinal stiffened cylindrical shell is determined by solving the equations of motion of the liquid. Using the asymptotic formula of the logarithmic derivative of the Bessel function, approximate formulas for finding the natural vibration frequencies studied design.

Key words: vibrations, shell, ideal fluid, stress, reinforcement, the principle of variation.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач на стадии проектирования тонкостенных оболочечных конструкций, широко применяемых в различных отраслях машиностроения, авиастроения, судостроения и различных областях промышленности, является динамический расчет. Необходимым элементом исследования динамики оболочек является определение собственных частот и форм малых колебаний, причем наибольший интерес для приложений представляют частоты из нижнего спектра. Использование в инженерной практике полимерных материалов делает обязательным учет анизотропии упругих свойств при исследовании низкочастотных колебаний оболочек.

Для более полного описания несущей способности конструкции целесообразно учитывать силы внешнего воздействия со стороны среды. Одним из таких воздействий является контакт ее с жидкостью. Силы внешнего воздействия со стороны жидкости, по сути, являются поверхностными силами и обусловлены контактом между оболочкой и жидкостью.

Отметим, что в литературе описание решения относится преимущественно к подкрепленной изотропной цилиндрической оболочке без среды [1]. Результаты нахождения собственных частот свободных колебаний для ортотропных оболочек представлены в работах [2-4]. Колебания и устойчивость изотропных цилиндрических оболочек со средой достаточно полностью исследованы в работах [5, 6]. Поведение деформируемых гладких оболочек с протекающей жидкостью рассмотрены в монографии [7]. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек с протекающей идеальной жидкостью в среде исследовано в работе [8]. Собственные колебания в бесконечной упругой среде, усиленной перекрестной системой ребер, изотропной цилиндрической оболочки с протекающей идеальной жидкостью, рассмотрена в работе [9].

В работе [10] исследуются свободные колебания ребристых изотропных цилиндрических оболочек, заполненных идеальной жидкостью, при осевом сжатии. Устойчивость цилиндрических изотропных оболочек, усиленных продольными или кольцевыми ребрами, заполненных средой, при продольном осевом сжатии и с учетом дискретных размещений ребер рассмотрена в работах [11, 12].

Как следует из приведенного обзора, практически отсутствуют работы, посвященные колебаниям анизотропных ребристых оболочек с жидкостью при осевом сжатии. Поэтому исследование колебаний ребристых анизотропных цилиндрических оболочек с жидкостью имеет большое практическое значение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной анизотропной оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта продольных ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности u , \mathcal{G} и w . При этом углы поворота нормальных элементов φ_1 , φ_2 относительно координатных линий y и x выражаются через w и \mathcal{G} с

помощью зависимостей $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\mathcal{G}}{R}\right)$, где R – радиус срединной поверхности

оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_i , \mathcal{G}_i , w_i i -го продольного стержня), необходимо определить также угол закручивания φ_{kpi} .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); & \mathcal{G}_j(x) &= \mathcal{G}(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); & \varphi_j &= \varphi_2(x_j, y); & \varphi_{kpi}(x) &= \varphi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $h_i = 0,5h + H_i^1$, h – толщина оболочки, H_i^1 – расстояния от осей i -го продольного стержня до поверхности оболочки, x_i и y_i – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой, φ_i , φ_{kpi} – углы поворота и закручивания поперечных сечений соответственно продольных и поперечных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны жидкости могут быть сведены к нормальным составляющим q_z , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с жидкостью при осевом сжатии получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Потенциальная энергия упругой деформации ортотропной цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{hR}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(B_{11} + B_{12}) \frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w^2}{R^2} (B_{11} + 2B_{12} + B_{22}) + B_{22} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right)^2 - \right. \\ &\left. - 2(B_{12} + B_{22}) \frac{w}{R} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + 2B_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + b_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + B_{66} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)^2 + 2B_{66} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки стекловолокна и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{11} &= b_{11} \cos^4 \varphi + b_{22} \sin^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\ B_{22} &= b_{11} \sin^4 \varphi + b_{22} \cos^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\ B_{12} &= (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \\ B_{66} &= -(b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{66} \cos^2 2\varphi; \\ B_{26} &= 1/2 (b_{22} \cos^2 \varphi - b_{11} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/4 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi; \\ B_{16} &= 1/2 (b_{22} \sin^2 \varphi - b_{11} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - 1/4 (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$, $b_{66} = G_{12} = G$, R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, u , \mathcal{G} , w – составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки, E_1 , E_2 – модули упругости материала оболочки в координатных направлениях, G – модуль упругости оболочки при сдвиге.

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации i -го продольного ребра таковы [1]:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (4)$$

Здесь F_i , J_{zi} , J_{yi} , J_{kpi} – площадь и моменты инерции поперечного сечения i -го продольного стержня соответственно относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; \tilde{E}_i , \tilde{G}_i – модули упругости и сдвига материала i -го продольного стержня.

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок, действующих со стороны жидкости, приложенных к оболочке, определится как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} q_z w dx dy. \quad (5)$$

Потенциальная энергия от сжимающего напряжения σ_x имеет вид:

$$\Pi_\sigma = - \frac{\sigma_x h}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx d\theta - \frac{\sigma_x F_c}{2R} \sum_{i=1}^{k_1} \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{\theta=\theta_i}. \quad (6)$$

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий упругих деформаций оболочки и продольных ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок, действующих со стороны жидкости и потенциальная энергия от сжимающего напряжения:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{k_1} \Pi_i + A_0 + \Pi_\sigma. \quad (7)$$

Кинетические энергии оболочки и продольных ребер записываются в виде [1]:

$$K_0 = \rho h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (8)$$

$$K_i = \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx.$$

Здесь t – временная координата, ρ , ρ_i – соответственно плотность материалов, из которых изготовлена оболочка, i -ей продольный стержень.

Кинетическая энергия продольно подкрепленной оболочки

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{k_1} K_i. \quad (9)$$

Уравнения движения ребристой оболочки получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0, \quad (10)$$

где $W = \int_{t'}^{t''} \tilde{L} dt$ – действие по Гамильтону, $\tilde{L} = K - \Pi$ – функция Лагранжа, t' и t'' – заданные произвольные моменты времени.

В предположении, что оболочка усилена бесконечно большим числом ребер, предельным переходом $k_1 \rightarrow \infty$ и с учетом (1) и, что операции варьирования и дифференцирования перестановочны, уравнение (10) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} & \left[(B_{11} + \gamma_c^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] + u (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi \partial \theta} - \left[(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] w - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{R^2 q_x}{2h}, \\ & (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (G_{12} + B_{22}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \mathcal{G} - (B_{12} + B_{22}) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \rho_1 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t_1^2} = \frac{R^2 q_y}{2h}, \\ & - \left[(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] u - (B_{12} + B_{22}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} + \\ & + \left\{ B_{11} + 2B_{12} + B_{22} + a^2 \left[(B_{11} + \eta_c^{(1)}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + B_{12} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} w + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} q_z. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $a^2 = \frac{h^2}{12R^2}$, $\bar{\rho}_c = \frac{\rho_i}{\rho}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $L_1 = x_2 = x_1$, $\xi = \frac{x}{R}$, $\gamma_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i}{G} (1 - \nu_{12}^2) \bar{\gamma}_c^{(1)}$,
 $\eta_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i (J_{y_i} + h^2 F_i)}{2\pi R^3 h G} (1 - \nu_{12}^2)$, $\rho_1 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(1)}$, $\bar{\gamma}_c^{(1)} = \frac{\tilde{E}_i}{2\pi R h}$, $\delta_c^{(1)} = \frac{h_i}{R} \bar{\gamma}_c^{(1)}$, $\theta = \frac{y}{R}$, $t_1 = \omega_0 t$,
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{G_{12}}{(1 - \nu^2) \rho R^2}}$, $\omega_1 = \omega / \omega_0$.

Поверхностная нагрузка q_z , действующая со стороны жидкости на продольно подкрепленную оболочку, определяется из решений уравнения движения идеальной жидкости:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (12)$$

где φ – потенциала возмущенных скоростей, a_0 – скорость распространения возмущений в жидкости.

На контактной поверхности оболочка-жидкость соблюдается непрерывность радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки имеет вид:

$$\mathcal{G}_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1}. \quad (13)$$

Равенство радиальных давлений со стороны жидкости на оболочку

$$q_z = -p|_{r=R}; \quad q_x = q_y = 0. \quad (14)$$

С помощью (12)-(14) давление со стороны жидкости на оболочку p можно представить в виде

$$p = \omega_0^2 \Phi_{an} \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2}. \tag{15}$$

Здесь

$$\Phi_{an} = \begin{cases} I_n(\beta r) / I_n'(\beta r), & M_1 < 1; \\ J_n(\beta_1 r) / J_n'(\beta_1 r), & M_1 > 1; \\ \frac{R^n}{nr^{n-1}}, & M_1 = 1. \end{cases} \tag{16}$$

В (16) $M_1 = \frac{\omega / m}{a_0}$, $\beta^2 = R^{-2}(1 - M_1^2)\chi^2$, $\beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2 - 1)\chi^2$, $t_1 = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{b_{11}}{\rho_0 R^2}}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{\rho_0 R^2 \omega^2}{b_{11}}} = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\xi = x / L$, I_n – модифицированная функция Бесселя n -го порядка первого рода, J_n – функции Бесселя n -го порядка первого рода.

В случае $M_1 < 1$, т.е. когда скорость распространения волн в оболочке меньше скорости звука в жидкости, применяя асимптотику логарифмической производной функции Бесселя

$$\frac{I_n'(\beta R)}{I_n(\beta R)} \approx \frac{n}{\beta R} + \frac{\beta R}{2n} \quad (n \ll \beta R)$$

можно написать:

$$\Phi_{an}|_{r=R} \approx \psi_1 + \psi_2 \lambda. \tag{17}$$

Здесь

$$\psi_1 = \frac{R^2 B_{11} \rho_m \omega_0^2}{2h} \left(\frac{1}{n} - \frac{m^2 R^2}{2n^3} \right); \quad \psi_2 = \frac{R^4 B_{11} \rho_m \omega_0^4}{4hn^3 a^2}$$

В случае $M_1 > 1$, т.е., когда скорость распространения волн в оболочке больше скорости звука в жидкости, применяя асимптотику логарифмической производной функции Бесселя

$$\frac{J_n'(\beta_1 R)}{J_n(\beta_1 R)} \approx -\frac{n}{\beta_1 R} - \frac{\beta_1 R}{2n}, \quad (\beta_1 R \ll n)$$

можно написать:

$$\Phi_{an}|_{r=R} \approx \frac{m^2}{n} - \frac{\omega_1^2 \omega_0^2}{a^2 n}. \tag{18}$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Далее рассматриваются шарнирно опертые оболочки, т.е. при $\xi = 0$ и $\xi = \xi_1$ ($\xi_1 = L / R$) выполняются следующие граничные условия:

$$\mathcal{G} = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0.$$

Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$u = u_0 \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \sin n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1; \quad (19)$$

$$w = w_0 \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega_1 t_1,$$

где u_0, \mathcal{G}_0, w_0 – неизвестные постоянные.

Дополняя контактными условиями (13), (14) систем уравнений движения оболочки (11), жидкости (12) приходим к контактной задаче о колебаниях ортотропной оболочки, подкрепленной продольными ребрами и заполненной жидкостью. Другими словами, задача о колебаниях подкрепленной продольными ребрами ортотропной оболочки с жидкостью сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Используя (11)-(15) и (19), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}\mathcal{G}_0 + a_{i3}w_0 = 0 \quad (i=1,2,3). \quad (20)$$

Элементы a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} ($i=1,2,3$) имеют вид:

$$a_{11} = -(B_{11} + \gamma_c^{(1)})m^2R^2 - B_{66}n^2 + \omega_1^2B_{11}(1 + \rho_1); \quad a_{12} = (B_{12} + B_{66})nmR;$$

$$a_{13} = -[(B_{11} + B_{12})mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3];$$

$$a_{21} = (B_{12} + B_{66})nmR; \quad a_{22} = -B_{66}m^2R^2 + (G_{12} + B_{22})n^2 + \omega_1^2B_{11}; \quad a_{23} = n(B_{12} + B_{22});$$

$$a_{31} = -[(B_{11} + B_{12})mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3]; \quad a_{32} = -(B_{12} + B_{22})n; \quad a_{33} = B_{11} + 2B_{12} + B_{22} - \sigma_x hm^2R^2 +$$

$$-(1 + \rho_1)B_{11}\omega_1^2 + \frac{R^2}{2h}\Phi_{\alpha n}B_{11}\rho_m\omega_1^2\omega_0^2 + a^2[(B_{11} + \eta_c^{(1)})m^4R^4 + 2(B_{11} + B_{12})n^2m^2R^2 + B_{12}n^4].$$

Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (20) третьего порядка возможно лишь в случае, когда главный определитель системы равен нулю. В результате получим:

$$\det \|a_{ij}\| = 0. \quad (21)$$

Уравнение (20) является трансцендентным, так как искомая частота свободных колебаний рассмотренной системы входит в аргумент функции Бесселя. Используя (17) и (18), уравнение (21) можно привести к алгебраическому уравнению. В случае (17) уравнение (21) сводится к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно λ ($\lambda = \omega_1^2$)

$$\begin{aligned} & \psi_2(1 + \rho_1)B_{11}^2\lambda^4 + [(1 + \rho_1)B_{11}^2(\psi_1 - (1 + \rho_1)B_{11}) + \\ & + \psi_2(\tilde{a}_{11}B_{11} + \tilde{a}_{22}(1 + \rho_1)B_{11})]\lambda^3 + [(\tilde{a}_{11}B_{11} + \tilde{a}_{22}z(1 + \rho_1)B_{11}) \times \\ & \times (\psi_1 - (1 + \rho_1)B_{11}) + (1 + \rho_1)B_{11}^2(\tilde{a}_{33} - \sigma_x hm^2R^2) + (\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - a_{12}a_{21})\psi_2]\lambda^2 + \\ & + [(\tilde{a}_{11}B_{11} + \tilde{a}_{22}(1 + \rho_1)B_{11})(\tilde{a}_{33} - \sigma_x hm^2R^2) + (\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - a_{12}a_{21})(\psi_1 - (1 + \rho_1)B_{11})]\lambda + \\ & + (\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - a_{12}a_{21})(\tilde{a}_{33} - \sigma_x hm^2R^2) + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}\tilde{a}_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}\tilde{a}_{11} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\tilde{a}_{11} = -(B_{11} + \gamma_c^{(1)})m^2R^2 - B_{66}n^2; \quad \tilde{a}_{22} = -B_{66}m^2R^2 + (G_{12} + B_{22})n^2;$$

$$\tilde{a}_{33} = B_{11} + 2B_{12} + B_{22} - \sigma_x h m^2 R^2 + a^2 \left[(B_{11} + \eta_c^{(1)} m^4 R^4 + 2(B_{11} + B_{12}) n^2 m^2 R^2 + B_{12} n^4) \right].$$

Решая уравнение (22) методом Феррари получим для его корней

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{A}{2} + \eta_1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2} + \eta_1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} + \eta_2\right)} \right], \tag{23}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{A}{2} - \eta_1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2} - \eta_1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} - \eta_2\right)} \right],$$

$$\eta_1^2 = \frac{A^2}{4} - B + y_0; \quad \eta_2^2 = \frac{y_0^2}{4} - D,$$

где

$$A = \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 \psi_2 \right]^{-1} \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 (\psi_1 - (1 + \rho_1) B_{11}) + \psi_2 (\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \right],$$

$$B = \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 \psi_2 \right]^{-1} \left[(\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \times \right.$$

$$\left. \times (\psi_1 - (1 + \rho_1) B_{11}) + (1 + \rho_1) B_{11}^2 (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) \psi_2 \right],$$

$$C = \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 \psi_2 \right]^{-1} \left[(\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\psi_1 - (1 + \rho_1) B_{11}) \right],$$

$$D = \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 \psi_2 \right]^{-1} \left[(\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} \tilde{a}_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} \tilde{a}_{11} \right].$$

y_0 является каким-нибудь решением уравнения

$$y^3 - B y^2 + (AC - 4D) y - A^2 D + 4BD - C^2 = 0.$$

В случае (18) уравнение (21) тоже сводится к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно λ

$$\begin{aligned} & \frac{-\tilde{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} (1 + \rho_1) B_{11}^2 \lambda^4 + \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 (\tilde{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) - \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} (\tilde{a}_{11} B_{11}) + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11} \right] \lambda^3 + \left[(\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \times \right. \\ & \left. \times (\tilde{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) + (1 + \rho_1) B_{11}^2 (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) - (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) \frac{\tilde{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right] \lambda^2 + \\ & + \left[(\tilde{a}_{11} B_{11} + \tilde{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\tilde{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) \right] \lambda + \\ & + (\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\tilde{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} \tilde{a}_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} \tilde{a}_{11} = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\tilde{\Psi}_1 = \frac{R^3}{2hn} B_{11} \rho_m \omega_0^2$. Аналогично, решая методом Феррари для корней уравнение (24), получим:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{\tilde{A}}{2} + \tilde{\eta}_1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{A}}{2} + \tilde{\eta}_1\right)^2 - 4\left(\frac{\tilde{y}_0}{2} + \tilde{\eta}_2\right)} \right], \tag{25}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{\check{A}}{2} - \check{\eta}_1 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\check{A}}{2} - \check{\eta}_1 \right)^2 - 4 \left(\frac{\check{y}_0}{2} - \check{\eta}_2 \right)} \right],$$

$$\check{\eta}_1^2 = \frac{\check{A}^2}{4} - \check{B} + \check{y}_0; \quad \check{\eta}_2^2 = \frac{\check{y}_0^2}{4} - \check{D};$$

$$\check{A} = \left[\frac{-\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right]^{-1} \left[(1 + \rho_1) B_{11}^2 (\psi_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) - \frac{\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} (\check{a}_{11} B_{11} + \check{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \right],$$

$$\check{B} = \left[\frac{-\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right]^{-1} \left[(\check{a}_{11} B_{11} + \check{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) \times \right.$$

$$\left. \times (\check{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) + (1 + \rho_1) B_{11}^2 (\check{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) - (\check{a}_{11} \check{a}_{22} - a_{12} a_{21}) \frac{\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right],$$

$$\check{C} = \left[\frac{-\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right]^{-1} \left[(\check{a}_{11} B_{11} + \check{a}_{22} (1 + \rho_1) B_{11}) (\check{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + (\check{a}_{11} \check{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\check{\psi}_1 k^2 - (1 + \rho_1) B_{11}) \right],$$

$$\check{D} = \left[\frac{-\check{\psi}_1 \omega_0^2}{a^2} \right]^{-1} \left[(\check{a}_{11} \check{a}_{22} - a_{12} a_{21}) (\check{a}_{33} - \sigma_x h m^2 R^2) + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} \check{a}_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} \check{a}_{11} \right],$$

где y_0 является каким-нибудь решением уравнения

$$y^3 - \check{B}y^2 + (\check{A}\check{C} - 4\check{D})y - \check{A}^2\check{D} + 4\check{B}\check{D} - \check{C}^2 = 0.$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

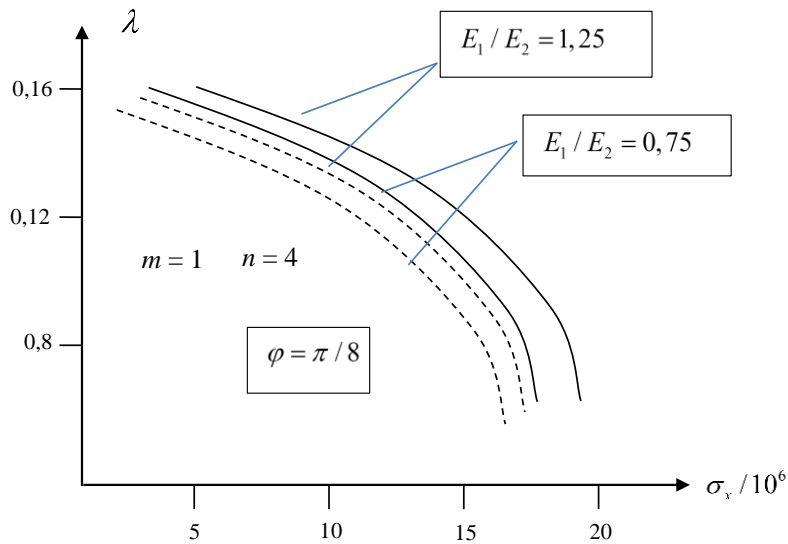
Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей с помощью ЭВМ. Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки, жидкости и продольных стержней, были приняты:

$$E_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ H/м}^2, \quad \rho = \rho_i = 7800 \text{ кг/м}^3, \quad F_i = 3,4 \text{ мм}^2, \quad J_{y_i} = 5,1 \text{ мм}^4. \quad \rho_0/\rho = 0,105,$$

$$\frac{J_{y_i}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{J_{z_i}}{2\pi R^3 h} = 0,13 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{J_{kpi}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}, \quad R = 0,16 \text{ м}, \quad h = 0,00045 \text{ м},$$

$$\nu_2 = 0,19, \quad \nu_1 = 0,11, \quad L = 0,8 \text{ м}, \quad h_i = 1,39 \text{ мм}, \quad a_0 = 1350 \text{ м/с}.$$

На рис. 1 представлены зависимости параметра частоты колебаний λ_{\min} , вычисленной по формулам (25), продольно подкрепленной, нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндрической оболочки, с жидкостью от сжимающего напряжения. Видно, что с увеличением сжимающего напряжения параметр частоты колебаний исследуемой системы сначала плавно, а затем сильно уменьшается. На рисунке пунктирные кривые соответствуют учету влияния жидкости, а сплошные кривые – отсутствию жидкости. Из рисунка видно, что учет влияния жидкости приводит к снижению значения параметра частоты колебаний системы по сравнению с частотой колебаний системы, когда жидкость отсутствует. Кроме того, усиление свойства ортотропии материала оболочки приводит к повышению значения параметра частоты колебаний системы.

Рис. 1. Зависимость параметра частоты λ от сжимающего напряжения

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И. Я. Методы расчета оболочек. Том 2. Теория ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К. : Наукова думка, 1980. – 368 с.
2. Бажанов В. Л. Сопротивление стеклопластиков / В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, В. А. Копнов. – М. : Машиностроение, 1968. – 303 с.
3. Lee Y. S. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners / Y. S. Lee, Y. W. Kim // Advances in Engineering Software. – 1999. – Vol. 30. – P. 649-655.
4. Zh. Xu. Elasticity / Zhilun Xu. – Beijing : Higher Education Press, 2006. – Vol. II. – 287 p.
5. Ильгамов М. А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем / М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. А. Гулин. – М. : Наука, 1977. – 331 с.
6. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой / Ф. С. Латифов. – Баку : Элм, 1999. – 164 с.
7. Вольмир А. С. Оболочки в протоколе жидкости и газа. Задачи гидроупругости / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
8. Латифов Ф. С. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в среде / Ф. С. Латифов, Р. А. Искендеров, С. Б. Микаилов // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. – 2013. – Вып. 21. – С. 132-139.
9. Алиев Ф. Ф. Собственные колебания в бесконечной упругой среде усиленные перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью / Ф. Ф. Алиев // Механика и машиностроение (Мин. обр. Азербайдж.). – 2007. – № 2. – С. 10-12.
10. Латифов Ф. С. Свободные колебания ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии / Ф. С. Латифов, А. А. Алиев // Механика Машин, Механизмов и Материалов. – 2009. – № 2. – С. 61-62.
11. Босьяков С. М. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / С. М. Босьяков, В. Чживэй // Механика Машин, Механизмов и Материалов. – 2011. – № 3(10). – С. 24-27.

12. Исаев З. Ф. Устойчивость цилиндрических оболочек, усиленных продольными ребрами и заполненных средой при осевом сжатии / З. Ф. Исаев // Вестник Бакинского государственного университета, серия физ.-мат. наук. – 2006. – № 2. – С. 21-23.
13. Исаев З. Ф. Устойчивость цилиндрических оболочек, усиленных кольцевыми ребрами и заполненных средой при продольном осевом сжатии с учетом дискретных размещений ребер / З. Ф. Исаев // Вестник Бакинского государственного университета, серия физ.-мат. наук. – 2007. – № 1. – С.54-60.

REFERENCES

1. Amiro, I.Ya. and Zarutskiy, V.A. (1980), *Metody rascheta obolochek. Tom 2. Teoriya rebristykh obolochek* [Shells calculation methods. Volume 2. The theory of ribbed shells], Naukova dumka, Kiev.
2. Bazhanov, V.L., Gol'denblat, I.I. and Kopnov, V.A. (1968), *Soprotivlenie stekloplastikov* [The resistance of GRP], Mashinostroenie, Moscow.
3. Lee, Y.S. and Kim, Y.W. (1999), “Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners”, *Advances in Engineering Software*, vol. 30, pp. 649-655.
4. Xu, Zhilun (2006), “Elasticity”, vol. II, Higher Education Press, Beijing.
5. Il'gamov, M.A., Ivanov, V.A. and Gulin, B.A. (1977), *Prochnost', ustoychivost' i dinamika obolochek s uprugim zapolnitelem* [The strength, stability and dynamics of shells with elastic filler], Nauka, Moscow.
6. Latifov, F.S. (1999), *Kolebaniya obolochek s uprugoy i zhidkoy sredoy* [Fluctuations shells with elastic and liquid media], Elm, Baku.
7. Vol'mir, A.S. (1979), *Obolochki v protokole zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Skins in the minutes of the liquid and gas. Tasks hydroelasticity], Nauka, Moscow.
8. Latifov, F.S., Iskenderov, R.A. and Mikailov, S.B. (2013), “Wobble transversely reinforced orthotropic cylindrical shells with a flowing liquid in a medium”, *Problemy vychislitel'noy mekhaniki i prochnosti konstruktsiy*, issue 21, pp. 132-139.
9. Aliev, F.F. (2007), “Natural oscillations in an infinite elastic medium reinforced cross-system edges of a cylindrical shell with a flowing liquid”, *Mekhanika i mashinostroenie (Min. obr. Azerbaydzh.)*, no. 2, pp. 10-12.
10. Latifov, F.S. and Aliev, A. A. (2009), “Free oscillations of ribbed cylindrical shells filled with fluid under axial compression”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 2, pp. 61-62.
11. Bosyakov, S.M. and Chzhivey, V. (2011), “Analysis of free vibrations of a cylindrical shell made of fiberglass with Navier boundary conditions”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 3(10), pp. 24-27.
12. Isaev, Z.F. (2006), “Stability of cylindrical shells reinforced with longitudinal ribs and filled with medium under axial compression”, *Vestnik Bakinskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya fiz.-mat. Nauk*, no. 2, pp. 21-23.
13. Isaev, Z.F. (2007), “Stability of cylindrical shells reinforced with circular ribs and filled with fluid at the longitudinal axial compression based on discrete placements ribs”, *Vestnik Bakinskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya fiz.-mat. Nauk*, no. 1, pp. 54-60.