

УДК 534

## КОЛЕБАНИЕ РЕБРИСТЫХ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ, ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

<sup>1</sup>Латифов Ф. С., д. ф.-м. н., профессор, <sup>2</sup>Агаларова И. У., докторант

<sup>1</sup>*Азербайджанский архитектурно-строительный университет,  
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

<sup>2</sup>*Бакинский государственный университет,  
ул. З. Халилова, 23, г. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

flatifov@mail.ru

Данная статья посвящена исследованию свободных колебаний конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек со сплошным наполнителем, усиленными перекрестными системами ребер при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочек и наполнителя. Движение наполнителя описывается системами уравнений теории упругости в перемещениях. С помощью контактных условий для нахождения частот свободных колебаний конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек с наполнителем, усиленными перекрестными системами ребер при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и наполнителя построено частотное уравнение и реализовано численно. Влияние инерционных свойств наполнителя на процесс колебания системы исследовано в двух случаях: а) влияниями инерционных свойств на процесс колебания системы можно пренебречь; б) влияние инерционных свойств на процесс колебания системы существенно.

*Ключевые слова: анизотропная оболочка, стержень, частота колебаний, инерция, окружающая среда, сжимающие силы.*

## КОЛИВАННЯ РЕБРИСТИХ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ ЗАПОВНЮВАЧЕМ, ПРИ ОСЬОВОМУ СТИСКАННІ І З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ

<sup>1</sup>Латіфов Ф. С., д. ф.-м. н., професор, <sup>2</sup>Агаларова І. У., докторант

<sup>1</sup>*Азербайджанський архітектурно-будівельний університет,  
вул. А. Султанова, 5, м. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

<sup>2</sup>*Бакинський державний університет,  
вул. З. Халілова, 23, м. Баку, Аз. 1073/1, Азербайджан*

flatifov@mail.ru

Стаття присвячена дослідженню вільних коливань конструктивно-ортотропних циліндричних оболонок із суцільним заповнювачем, підсиленими перехресними системами ребер при осьовому стисканні і з урахуванням тертя між контактними поверхнями оболонки і заповнювача. Рух заповнювача описується системами рівнянь теорії пружності в переміщеннях. За допомогою контактних умов для знаходження частот вільних коливань конструктивно-ортотропних циліндричних оболонок з заповнювачем, підсиленими перехресними системами ребер при осьовому стисканні і з урахуванням тертя між контактними поверхнями оболонки і заповнювача побудоване частотне рівняння і реалізоване чисельно. Вплив інерційних властивостей заповнювача на процес коливання системи досліджено у двох випадках: а) впливами інерційних властивостей на процес коливання системи можна знехтувати; б) вплив інерційних властивостей на процес коливання системи істотний.

*Ключові слова: анизотропна оболонка, стрижень, частота коливань, інерція, навколишнє середовище, стискаючі сили.*

**WOBBLE RIBBED DESIGN-ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS WITH FILLER,  
UNDER AXIAL COMPRESSION AND GIVEN FRICTION**<sup>1</sup>Latifov F. S., Professor, <sup>2</sup>Agalarova I. U., doctoral<sup>1</sup>*Azerbaijan Architecture and Construction University,  
Str. A. Sultanova, 5, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*<sup>2</sup>*Bakinsky State University,  
Str. Z. Khalilov, 23, Baku, Az. 1073/1, Azerbaijan*

flatifov@mail.ru

This article is devoted to the study of free oscillations of structurally-orthotropic cylindrical shells with a solid filler, ysilennymi cross ribs under axial compression systems and taking into account the friction between the contact surfaces of the shell and the core. aggregate movement described by systems of equations of the theory of elasticity in displacements. With the help of the contact conditions for finding the frequency of free oscillations of structurally-orthotropic cylindrical shells with filler, ysilennymi cross ribs under axial compression systems and taking into account the friction between the contact surfaces of the shell and filler frequency equation is built and implemented numerically. Influence of the inertial properties of the filler in the process of system oscillations investigated in two cases: a) the effects of the inertial properties of the process of system oscillations can be neglected; b) the effect of the inertial properties of the system to process fluctuations significantly.

*Keywords: anisotropic shell rod oscillation frequency, momentum, environment, squeezing force.*

**ВВЕДЕНИЕ**

В последние годы внимание исследователей все больше привлекают вопросы, касающиеся исследования напряженно-деформированного состояния ребристых анизотропных оболочек, контактирующих со средой. Исследованиям свободных колебаний продольно подкрепленной и подкрепленной перекрестными системами ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропных цилиндрических оболочек, заполненной твердой средой, посвящена работа [1]. С применением вариационного принципа построено частотное уравнение колебаний подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки, контактирующей со средой, и реализовано численно. Свободные колебания ребристых изотропных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии, рассмотрены в работе [2]. Причем, подкрепление оболочек проводилось продольно, поперечно и перекрестной системой ребер. В [3] исследована задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Колебание поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в грунте рассмотрено в работе [4]. С применением вариационного принципа и модели Пастернака, параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой неподкрепленной цилиндрической оболочки с заполнителем исследованы в работе [5]. Вариационно-параметрические исследования моделирования цилиндрических оболочек ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении приведены в [6]. Отметим, что описанное в литературе решение относится преимущественно к подкрепленной изотропной цилиндрической оболочке без среды [7]. Колебания гладких цилиндрических оболочек с заполнителем и с жидкостью достаточно полностью исследованы в работах [8, 9]. Колебания продольно подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки с заполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и заполнителя, рассмотрены в работах [10, 11]. Анализ приведенных работ показывает, что поведение тонкостенных конструкций из ортотропного материала, имеющих дискретное расположение ребер, с учетом влияния внешней среды, исследованы недостаточно. Поэтому разработка математических моделей поведения подкрепленных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров

конструкции, контактирующей со средой с учетом трения в контакте, являются актуальными задачами.

В данной статье с помощью вариационного принципа исследуется свободное колебание тонкой подкрепленной перекрестными системами ребер конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с заполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения в контакте. Построены зависимости частот собственных колебаний от сжимающей силы для различных отношений модулей упругости материала анизотропной оболочки с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной оболочки, продольных и поперечных ребер. Принимается, что оболочка и ребра жестко с ней соединены по линиям контакта. Напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применяется теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной с поверхностью  $u$ ,  $\mathcal{G}$  и  $w$ . При этом углы поворота нормальных элементов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  относительно координатных линий  $y$  и  $x$  выражаются через  $w$  и  $\mathcal{G}$  с

помощью зависимостей  $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\mathcal{G}}{R}\right)$ , где  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений ( $u_i$ ,  $\mathcal{G}_i$ ,  $w_i$  соответственно для  $i$ -го продольного стержня,  $u_j$ ,  $\mathcal{G}_j$ ,  $w_j$   $j$ -го поперечного стержня), необходимо определить также углы закручивания  $\varphi_j$  и  $\varphi_{kpi}$ ,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_{kpi}$ .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); & \mathcal{G}_j(x) &= \mathcal{G}(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); & \varphi_j &= \varphi_2(x_j, y); & \varphi_{kpi}(x) &= \varphi_1(x_j, y); \\ u_i(x) &= u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); & \mathcal{G}_i(x) &= \mathcal{G}(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \\ w_i(x) &= w(x, y_i); & \varphi_i &= \varphi_1(x, y_i); & \varphi_{kpi}(x) &= \varphi_2(x, y_i). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $h_i = 0,5h + H_i^1$ ,  $h_j = 0,5h + H_j^1$ ,  $h$  – толщина оболочки,  $H_i^1$  и  $H_j^1$  – расстояния от осей  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного стержней до поверхности оболочки,  $x_i$  и  $y_i$  – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой,  $\varphi_j$ ,  $\varphi_{kpi}$  – углы поворота и закручивания поперечных сечений поперечного стержня.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны сплошного заполнителя могут быть сведены к составляющим  $q_x$ ,  $q_y$  и  $q_z$ , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Частотное уравнение свободного колебания, подкрепленное перекрестными системами ребер ортотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и заполнителя, построим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем полную энергию системы. Полная энергия упругой деформации, подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндрической оболочки со сплошным заполнителем, с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем имеет вид [4, 9]:

$$\begin{aligned}
 J &= J_0 + J_i + J_j + A + A_0; \tag{2} \\
 J_0 &= \frac{1}{2} R^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \{N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} - M_{11} \chi_{11} - M_{22} \chi_{22} - M_{12} \chi_{12}\} dx d\theta + \\
 &\quad + \rho_0 h \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx d\theta, \\
 J_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \int_0^L \left[ \tilde{E}_i F_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{y_i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{z_i} \left( \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{\kappa p i} \left( \frac{\partial \varphi_{\kappa p i}}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{\rho}_i F_i \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\kappa p i}}{F_i} \left( \frac{\partial \varphi_{\kappa p i}}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \\
 J_j &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \int_0^{2\pi} \left[ \hat{E}_j F_j \left( \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \hat{E}_j J_{x j} \left( \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \hat{E}_j J_{z j} \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{\kappa p j}}{R} \right)^2 + \hat{G}_j J_{\kappa p j} \left( \frac{\partial \varphi_{\kappa p j}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] d\theta + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{k_2} \hat{\rho}_j F_j \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\kappa p j}}{F_j} \left( \frac{\partial \varphi_{\kappa p j}}{\partial t} \right)^2 \right] d\theta, \\
 A &= -\frac{\sigma_x h}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx d\theta. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Влияние заполнителя на оболочку определяется как внешняя поверхностная нагрузка, приложенная к оболочке, и вычисляется как работа, совершенная этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} ((q_x - f_1 q_r) u + (q_\theta - f_2 q_r) \vartheta + q_r w) d\xi d\theta, \tag{4}$$

где  $f_1, f_2$  – коэффициенты трения,  $q_x, q_\theta, q_r$  – давления со стороны заполнителя на оболочку определяются решением уравнения движения заполнителя.

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz; \quad M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) z dz; \tag{5}$$

$$w_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} + B_{16}\chi_{12}; \quad w_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + B_{26}\chi_{12};$$

$$w_{21} = w_{12} = B_{16}\chi_{11} + b_{22}\chi_{22} + B_{66}\chi_{12}.$$

Напряжение  $\sigma_{ij}$  и деформация  $\varepsilon_{ij}$  в срединной поверхности в соотношениях (5) определяются следующим образом [9]:

$$\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} + B_{16}\varepsilon_{12}; \quad \sigma_{22} = B_{12}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{26}\varepsilon_{12};$$

$$\sigma_{12} = B_{16}\varepsilon_{11} + B_{26}\varepsilon_{22} + B_{66}\varepsilon_{12};$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

Постоянные упругости зависят от угла  $\varphi$ , образуемого направлением оси анизотропии с окружным направлением, и определяются следующим образом:

$$B_{11} = b_{11} \cos^4 \varphi + b_{22} \sin^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi;$$

$$B_{22} = b_{11} \sin^4 \varphi + b_{22} \cos^4 \varphi + (b_{66} + 0,5b_{12}) \sin^2 2\varphi;$$

$$B_{12} = (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi);$$

$$B_{66} = -(b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{66} \cos^2 2\varphi; \quad (8)$$

$$B_{26} = \frac{1}{2} (b_{22} \cos^2 \varphi - b_{11} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{6} (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi;$$

$$B_{16} = \frac{1}{2} (b_{22} \sin^2 \varphi - b_{11} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{6} (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi,$$

где  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{12}$ , и  $b_{66}$  – основные модули упругости ортотропного материала, которые выражаются через модули упругости  $E_1$ ,  $E_2$  в координатных направлениях, модуль упругости при сдвиге  $G$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  по формулам:

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{66} = G_{12} = G.$$

$\varphi$  – угол, образуемый направлением оси анизотропии с окружным направлением,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки,  $h$  – толщина оболочки,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки,  $F_i$ ,  $J_{zi}$ ,  $J_{yi}$ ,  $J_{kpi}$ ,  $F_j$ ,  $J_{zj}$ ,  $J_{yj}$ ,  $J_{kpj}$  – площадь и моменты инерции поперечного сечения  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного стержня относительно оси  $Oz$ , и оси, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении, соответственно;  $\tilde{E}_i$ ,  $\tilde{G}_i$ ,  $\hat{E}_j$ ,  $\hat{G}_j$  – модули упругости и сдвига материала  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного стержня соответственно,  $t$  – временная координата,  $\rho_0$ ,  $\check{\rho}_i$ ,  $\hat{\rho}_j$  – плотности материалов, из которых изготовлены оболочка,  $i$ -ый продольный стержень и  $j$ -ый поперечный стержень, соответственно,  $\sigma_x$  – сжимающее напряжение.

Уравнения движения конструктивно-ортотропной оболочки будут получены из (2) предельным переходом  $k_1 \rightarrow \infty$ ,  $k_2 \rightarrow \infty$ . Пренебрегая влиянием жесткостей ребер при изгибе в плоскости, касательной к обшивке, и при кручении, соответствующих сил инерции, а также эксцентриситета ребер на силы инерции, находим:

$$\begin{aligned}
& \left[ (B_{11} + \gamma_c^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi \partial \theta} - \left[ (B_{11} + B_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] w - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} (q_x - f_1 q_r), \\
& (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (G_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \mathcal{G} - (B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial w}{\partial \theta} = \rho_1 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t_1^2} + \frac{R^2}{2h} (q_\theta - f_2 q_r), \\
& - \left[ (B_{11} + B_{12}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right] u - (B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} + \\
& + \left\{ B_{11} + 2B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)} + (\delta_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sigma_x h \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\
& \left. + a^2 \left[ (B_{11} + \eta_c^{(1)}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(B_{11} + B_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + (B_{12} + \eta_{s1}^{(2)} + \eta_{s2}^{(2)}) \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \right\} w + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \frac{R^2}{2h} q_r.
\end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение движения заполнителя в векторной форме имеет вид [4, 5]:

$$a_e^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} - a_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{s} + \omega^2 \vec{s} = 0. \tag{10}$$

Здесь  $a_t = \sqrt{\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho}}$ ,  $a_e = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho}}$  – скорости распространения продольных и поперечных волн в среде соответственно;  $\vec{s}(s_x, s_\theta, s_r)$  – вектор перемещения,  $\lambda$ ,  $\mu$  – коэффициенты Ламе.

К системам уравнений движения заполнителя (8) прибавляются контактные условия. Предполагается, что контакт между оболочкой и средой жесткий, т.е. при  $r = R$

$$u = s_x; \quad \mathcal{G} = s_\theta; \quad w = s_r; \tag{11}$$

$$q_x - f_1 q_r = -\sigma_{rx}, \quad q_\theta - f_2 q_r = -\sigma_{r\theta}, \quad q_r = -\sigma_{rr}. \tag{12}$$

Компоненты  $\sigma_{rx}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{rr}$  тензора напряжений определяются следующим образом [4, 5]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rx} &= \mu_s \left( \frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right); \quad \sigma_{r\theta} = \mu_s \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right], \\
\sigma_{rr} &= \lambda_s \left( \frac{\partial s_r}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rs_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu_s \frac{\partial s_r}{r}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $\lambda_s$ ,  $\mu_s$  – коэффициенты Ламе для среды.

Дополняя контактными условиями (11) и (12) уравнение движения подкрепленной перекрестными системами ребер анизотропной цилиндрической оболочки (9), нагруженных осевыми сжимающими силами, уравнением движения заполнителя (10). В результате приходим к контактной задаче о колебаниях анизотропной цилиндрической оболочки, подкрепленной перекрестной системой ребер, нагруженных осевыми сжимающими силами, со сплошным заполнителем с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем. Другими словами, задача о колебаниях подкрепленными перекрестными системами ребер, нагруженные осевыми сжимающими силами, анизотропной цилиндрической оболочки со сплошным заполнителем с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем сводится к совместному интегрированию системы уравнения движения заполнителя и оболочки при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Перемещение оболочки, удовлетворяющее условиям шарнирного опирания со свободным смещением в продольном направлении и при отсутствии смещения в дуговом (эти граничные условия в литературе называются условиями Навье [9]), т.е. при  $x=0$  и  $x=L$   $\mathcal{G}=0$ ,  $w=0$ ,  $M_x=0$ ,  $N_x=0$  будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= A \cos kx \cos n\theta \sin \omega_1 t_1, \\ \mathcal{G} &= B \sin kx \sin n\theta \sin \omega_1 t_1, \\ w &= C \sin kx \cos n\theta \sin \omega_1 t_1, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – неизвестные постоянные;  $k = \frac{m\pi}{L}$  ( $m=1,2,\dots$ ),  $m$ ,  $n$  – волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно,  $L$  – длина оболочки,  $\omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_0 R^2 \omega^2}{E_1}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E_1}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}, \quad t_1 = \omega_0 t.$$

Решения системы (10) имеет вид [3]:

а) при малых инерционных действиях со стороны заполнителя на процесс колебания системы:

$$\begin{aligned} s_x &= \left[ \left( -kr \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} - 4(1-\nu_s)kI_n(kr) \right) A_s + kI_n(kr)B_s \right] \cos n\theta \cos kx \sin \omega_1 t_1, \\ s_\theta &= \left[ -\frac{n}{r} I_n(kr)B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} C_s \right] \sin n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1; \end{aligned} \tag{15}$$

б) инерционные действия заполнителя на процесс колебания системы существенно:

$$\begin{aligned} s_x &= \left[ A_s k I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s \gamma_i^2}{\mu_i} I_n(\gamma_i r) \right] \cos n\theta \cos kx \sin \omega_1 t_1, \\ s_\theta &= \left[ -\frac{A_s n}{r} I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s n k}{r \mu_i} I_n(\gamma_i r) - \frac{B_s}{n} \frac{\partial I_n(\gamma_i r)}{\partial r} \right] \sin n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1, \\ s_r &= \left[ A_s \frac{\partial I_n(\gamma_e r)}{\partial r} - \frac{C_s k}{\mu_i} \frac{\partial I_n(\gamma_i r)}{\partial r} + \frac{B_s n}{r} I_n(\gamma_i r) \right] \cos n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь  $I_n$  – модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка первого рода,  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$  постоянные,  $\gamma_e^2 = k^2 - \mu_e^2$ ,  $\gamma_i^2 = k^2 - \mu_i^2$ .

Рассмотрим случай а). Используя контактные условия (11) и (12) перемещений оболочек (14), решения уравнения движения среды (15), постоянные  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$  выразим через  $A$ ,  $B$ ,

$C$ . В результате для  $q_x$ ,  $q_\theta$ ,  $q_r$  находим  $\left( k = \frac{m\pi}{L} \right)$ :

$$\begin{aligned} q_x &= (\tilde{C}_{x1}A + \tilde{C}_{x2}B + \tilde{C}_{x3}C) \cos n\theta \cos kx \sin \omega_1 t_1, \\ q_\theta &= (\tilde{C}_{\theta1}A + \tilde{C}_{\theta2}B + \tilde{C}_{\theta3}C) \sin n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1, \\ q_r &= (\tilde{C}_{r1}A + \tilde{C}_{r2}B + \tilde{C}_{r3}C) \cos n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя (17) и (14) в систему (9), получим однородные системы линейных алгебраических уравнений третьего порядка относительно независимых постоянных  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ -\left(B_{11} + \gamma_c^{(1)}\right)m^2R^2 - B_{66}n^2 - \frac{\pi\xi_1}{2}\left(\tilde{C}_{x1} - f_1\tilde{C}_{r1}\right) + \omega_1^2B_{11}(1 + \rho_1) \right]A + \left(B_{12} + S_2\tilde{C}_{x2} + S_1\tilde{C}_{\theta1} + B_{66}\right)nmRB - \\ & - \left[ \left(B_{11} + B_{12}\right) + \delta_c^{(1)}m^3R^3S_2 + \tilde{C}_{x3} + S_1\tilde{C}_{r1} \right]mRC = 0, \\ & \left(B_{12} + B_{66} + S_2\tilde{C}_{x2} + S_1\tilde{C}_{\theta1}\right)nmRA + \left\{ -B_{66}m^2R^2 + \left(G_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)}\right)n^2 - \frac{\pi\xi_1}{2}\left(\tilde{C}_{\theta2} - f_2\tilde{C}_{r2}\right) + \omega_1^2B \right\}B + \\ & + n\left(B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)} + \tilde{C}_{\theta3} + \tilde{C}_{r2}\right)C = 0, \\ & - \left[ -\left(B_{11} + B_{12}\right)mR + \delta_c^{(1)}m^3R^3 + S_2\tilde{C}_{x3} + S_1\tilde{C}_{r1} \right]mRA + \left(B_{12} + B_{22} + \gamma_s^{(2)} + \tilde{C}_{\theta3} + \tilde{C}_{r2}\right)nB + \\ & \left\{ B_{11} + 2B_{12} + B_{22} - \sigma_x hm^2R^2 - (1 + \rho_1)B_{11}\omega_1^2 - S_1\tilde{C}_{r3} + l_1\sigma_x + \right. \\ & \left. + a^2 \left[ \left(B_{11} + \eta_c^{(1)}\right)m^4R^4 + 2\left(B_{11} + B_{12}\right)n^2m^2R^2 + \left(B_{12} + \eta_{s1}^{(2)} + \eta_{s2}^{(2)}\right)n^4 \right] \right\}C = 0. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (18) третьего порядка возможно лишь в случае, когда  $\omega_1$  – корень ее определителя. Определение параметра частоты колебания исследуемой конструкции  $\omega_1$  сводится к алгебраическому уравнению шестого порядка относительно  $\omega_1$  или кубическому уравнению относительно  $\lambda = \omega_1^2$ . Его корни определяются формулами Кордано.

В случае б) полученное частотное уравнение для нахождения параметра частоты колебания исследуемой конструкции формально совпадает с уравнением, полученным в случае а), и является трансцендентным относительно  $\omega_1$ , так как искомый параметр частоты колебания системы входит в аргумент функции Бесселя.

Приведем результаты исследования влияния жесткости материала оболочки, коэффициенты трения и осевой сжимающей силы на параметр частоты колебаний исследуемой конструкции. Вычисления выполнены для оболочки, среды и ребер с такими параметрами:

$$h^* = \frac{h}{R} = 0,25 \cdot 10^{-2}; \quad \nu = 0,3; \quad \tilde{E}_j = \tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad L = 0,8 \text{ м}; \quad a_e = 2,25a_i; \quad a_i = 308 \text{ м/сек};$$

$$\rho_0 = \tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_j = 0,26 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^2; \quad F_j = 5,75 \text{ мм}^2; \quad J_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4; \quad \frac{J_{zj}}{2\pi R^3 h} = 0,23 \cdot 10^{-6};$$

$$J_{kp,j} = 0,48 \text{ мм}^4; \quad h_j = 1,39 \text{ мм}; \quad \frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}; \quad \nu = 0,3; \quad \frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6};$$

$$\rho_i = 0,26 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^2; \quad \frac{I_{zi}}{2\pi R^3 h} = 0,1326 \cdot 10^{-6}; \quad \frac{I_{kpi}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \quad h_i = 0,01375R;$$

$$\nu_1 = 0,11; \quad \nu_2 = 0,19.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты счета представлены на рис. 1 и рис. 2, причем, рис. 1 соответствует случаю а), а рис. 2 случаю б). Кроме того, на рис. 1 пунктирные кривые соответствуют  $f_1 = 0$ , а сплошные кривые  $f_1 = 0,3$ , а на рис. 2 пунктирные кривые соответствуют случаю а), сплошные кривые случаю б). Здесь приведена зависимость  $\omega_1$  от сжимающей силы. Из рис. 1 и рис. 2 видно, что с увеличением сжимающей силы частота системы падает. Кроме того,



учет трения и инерционные свойства среды приводят к снижению значения собственной частоты исследуемой конструкции.

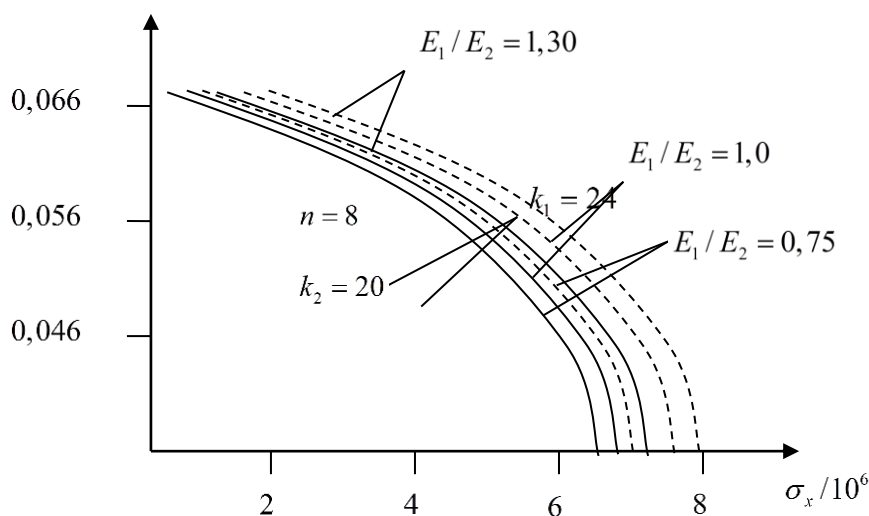


Рис. 1. Зависимость параметра частоты от сжимающей силы (случай а))

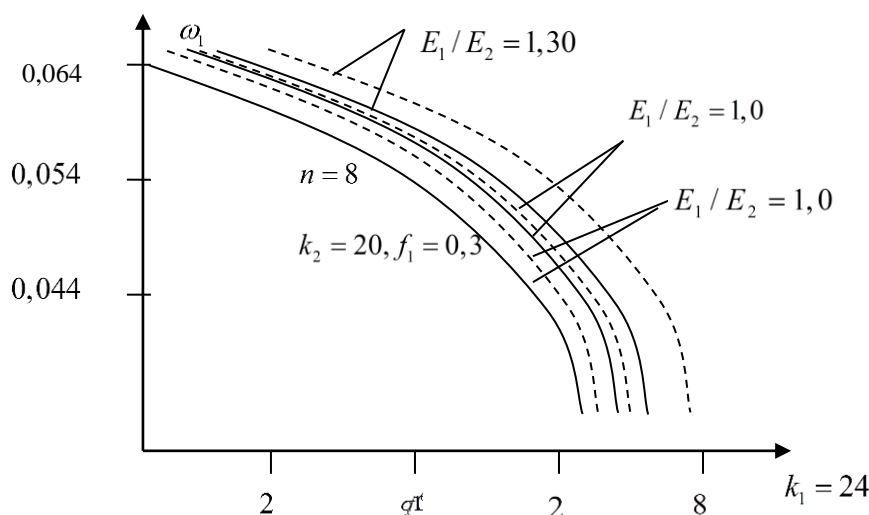


Рис. 2. Зависимость параметра частоты от сжимающей силы (случай б))

### ЛИТЕРАТУРА

1. Латифов Ф. С. Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой / Ф. С. Латифов, С. Г. Сулейманова // *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. – 2009. – № 1. – С. 59-62.
2. Латифов Ф. С. Свободные колебания ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии / Ф. С. Латифов, А. А. Алиев // *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. – 2009. – № 2. – С. 61-63.
3. Латифов Ф. С. Задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью / Ф. С. Латифов, О. Ш. Салманов // *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. – 2008. – № 4(5). – С. 45-48.
4. Латифов Ф. С. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в среде / Ф. С. Латифов, Р. А. Искендеров, С. Б. Микаилов // *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. – 2013. – Вып. 21. – С. 132-139.
5. Пирмамедов И. Т. Параметрические колебания вязкоупругой оболочки, с учетом повреждаемости, заключенной в вязкоупругую матрицу / И. Т. Пирмамедов // *Механика Машин, Механизмов и Материалов*. – 2009. – № 1(6). – С. 52-55.

6. Босьяков С. М. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / С. М. Босьяков, В. Чживэй // Механика машин, Механизмов и Материалов. – 2011. – № 3(10). – С. 24-27.
7. Амиро И. Я. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К. : Наукова думка, 1980. – 367 с.
8. Ильгамов М. А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем / М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. А. Гулин. – М. : Наука, 1977. – 331 с.
9. Латифов Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой / Ф. С. Латифов. – Баку : Элм, 1999. – 164 с.
10. Латифов Ф. С. Свободные колебания подкрепленных перекрестной системой ребер цилиндрических оболочек с наполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения / Ф. С. Латифов, И. М. Джафарова // Естественные науки и техника. – 2009. – № 5(43). – С. 38-44.
11. Джафарова И. М. Задача о свободных осесимметричных колебаниях нагруженной осевыми сжимающими силами ребристых цилиндрических оболочек, заполненных средой и с учетом трения / И. М. Джафарова // Известия Бакинского Государственного Университета. Физико-математическая серия. – 2011. – № 3. – С. 86-93.

### REFERENCES

1. Latifov, F.S. and Suleimanova, S.G. (2009), “Problem of the free oscillations of a strengthened system of cross-edges and loaded by axial compressive strength of cylindrical shells filled with a medium”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 1, pp. 59-62.
2. Latifov, F.S. and Aliev, A.A. (2009), “Free oscillations of ribbed cylindrical shells filled with fluid under axial compression”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 2, pp. 61-63.
3. Latifov, F.S. and Calmanov, O.Sh. (2008), “The problem of forced axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of the cylindrical shell filled with liquid”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 4(5), pp. 45-48.
4. Latifov, F.S., Iskenderov, R.A. and Mikailov, S.B. (2013), “Wobble transversely reinforced orthotropic cylindrical shells with a flowing liquid in a medium”, *Problemy vychislitel'noy mekhaniki i prochnosti konstruktsiy*, issue 21, pp. 132-139.
5. Pirmamedov, I.T. (2009), “Parametric oscillations of viscoelastic shell, taking into account of damage, enclosed in a viscoelastic matrix”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 1(6), pp. 52-55.
6. Bosyakov, S.M. and Chzhivey, V. (2011), “Analysis of free vibrations of a cylindrical shell made of fiberglass with Navier boundary conditions”, *Mekhanika Mashin, Mekhanizmov i Materialov*, no. 3(10), pp. 24-27.
7. Amiro, I.Ya. and Zarutskiy, V.A. (1980), *Metody rascheta obolochek. Tom 2. Teoriya rebristykh obolochek* [Shells calculation methods. Volume 2. The theory of ribbed shells], Naukova dumka, Kiev.
8. Il'gamov, M.A., Ivanov, V.A. and Gulin, B.A. (1977), *Prochnost', ustoychivost' i dinamika obolochek s uprugim zapolnitelem* [The strength, stability and dynamics of shells with elastic filler], Nauka, Moscow.
9. Latifov, F.S. (1999), *Kolebaniya obolochek s uprugoy i zhidkoy sredoy* [Fluctuations shells with elastic and liquid media], Elm, Baku.
10. Latifov, F.S. and Dzhafarova, I.M. (2009), “Free oscillations of cylindrical shells reinforced ribs cross-c filler system, under axial compression and taking into account the friction”, *Estestvennye nauki i tekhnika*, no. 5(43), pp. 38-44.
11. Dzhafarova, I.M. (2011), “Problem of the free axisymmetric vibrations of a loaded axial compressive forces ribbed cylindrical shells filled environment and taking into account the friction”, *Izvestiia Bakinskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Fiziko-matematicheskaya seriia*, no. 3, pp. 86-93.