

УДК 519.6

ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ

Литвин О. М., Коваленко Г. В.

Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, 61000, Україна

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

У статті запропоновано метод побудови інтерполяційно-апроксимаційного полінома 5-го степеня для функції двох змінних на трикутнику. Цей поліном задається лінійною комбінацією базисних поліномів 5-го степеня, які виражаються через відомі базисні поліноми Зламала-Женішека. Невідомі коефіцієнти при відповідних базисних функціях знайдено методом найменших квадратів при мінімізації певного функціоналу. Для конкретного прикладу отримано формулу залежності похибки наближення функції інтерполяційно-апроксимаційним поліномом від лінійних розмірів трикутника. Запропоновано формули для наближеного обчислення похідних (до другого порядку включно) функції двох змінних у вершинах «одичного» трикутника.

Ключові слова: базисні поліноми Зламала-Женішека, інтерполяційно-апроксимаційний поліном 5-го степеня, довільний трикутник, «одичний» трикутник, метод найменших квадратів.

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-АПРОКСИМАЦИОННОГО ПОЛИНОМА 5-ОЙ СТЕПЕНИ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Литвин О. Н., Коваленко А. В.

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, 61000, Украина

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

В статье предложен метод построения интерполяционно-аппроксимационного полинома 5-ой степени для функции двух переменных на треугольнике. Этот полином задается линейной комбинацией базисных полиномов 5-ой степени, которые выражаются через известные базисные полиномы Зламала-Женишека. Неизвестные коэффициенты при соответствующих базисных функциях найдены методом наименьших квадратов при минимизации определенного функционала. Для конкретного примера получена формула зависимости погрешности приближения функции интерполяционно-аппроксимационным полиномом от линейных размеров треугольника. Предложены формулы для приближенного вычисления производных (до второго порядка включительно) функции двух переменных в вершинах «единичного» треугольника.

Ключевые слова: базисные полиномы Зламала-Женишека, интерполяционно-аппроксимационный полином 5-ой степени, произвольный треугольник, «единичный» треугольник, метод наименьших квадратов.

CONSTRUCTION OF INTERPOLATING-APPROXIMATING POLYNOMIAL OF THE 5TH DEGREE ON ARBITRARY TRIANGLE

Litvin O. M., Kovalenko G. V.

Ukrainian Engineer-pedagogical academy,
Universitetskaya str., 16, Kharkov, 61000, Ukraine

academ_mail@ukr.net, vmkovalenko@ukr.net

In this article we propose a method for constructing interpolating-approximating polynomial 5th degree for the function $f(x, y)$ that defined on the triangle $\triangle A_1 A_2 A_3$. In solving this problem we have used basis polynomials of the 5th degree $v_{kpq}(x, y)$, $k = \overline{1, 3}$, $p, q \in \{0, 1, 2\}$, $0 \leq p + q \leq 2$, $V_{ij}(x, y)$, $(i, j) \in Q = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, which are expressed through the known Zlamal-Zhenishek basis polynomials $h_{kpq}(x, y)$, $H_{ij}(x, y)$. Then the interpolating polynomial $S_5(x, y)$ of the function $f(x, y)$ on the triangle $\triangle A_1 A_2 A_3$ can be represented as a linear combination of functions $v_{kpq}(x, y)$, $V_{ij}(x, y)$,

where the coefficients of the $v_{kpq}(x, y)$ are equal derivatives $\left. \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} f(x, y) \right|_{A_k}$, and the coefficients of

the $V_{ij}(x, y)$ are equal derivatives $\left. \frac{\partial}{\partial v_{ij}} f(x, y) \right|_{M_{ij}}$ (v_{ij} is a unit inward normal vector to the side $A_i A_j$

of the triangle, M_{ij} is the midpoint of the side $A_i A_j$). In this case the values of a polynomial $S_5(x, y)$ and its partial derivatives (to the second order inclusive) at the vertices of a triangle and directional derivatives in the direction of the inward normal to sides of the triangle coincide with the corresponding derivatives of function $f(x, y)$. In practice very often we only know values of function $f(x, y)$ on a set of points, and values of derivatives are unknown. So we solve the problem of constructing interpolating-approximating polynomial $O(x, y, f)$. In determining this polynomial we think that we know only values $f_i = f(A_i)$, $i = \overline{1, 3}$. We find unknown coefficients of the corresponding basis functions using the least-squares method while minimizing certain functional.

We got formulas for finding polynomials $\lambda_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$, such that $O(x, y, f) = f_1 \lambda_1(x, y) + f_2 \lambda_2(x, y) + f_3 \lambda_3(x, y)$. In the case of the "unit" triangle ($A_1(0, 0)$, $A_2(1, 0)$, $A_3(0, 1)$) explicit expressions of polynomials $\lambda_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$ are given.

We obtained the formula of dependence of approximation error of function by interpolating-approximating polynomial from linear dimensions of the triangle on the example of the concrete function.

We proposed formulas for approximate calculation of derivatives (to the second order inclusive) function $f(x, y)$ in the vertices of the "unit" triangle.

Key words: basis polynomials of Zlamal-Zenisek, interpolating-approximating polynomial 5th degree, arbitrary triangle, "unit" triangle, least-squares method.

ВСТУП

У праці [5] запропоновано метод побудови інтерполяційного полінома 5-го степеня на довільному трикутнику з використанням базисних поліномів, існування яких було доведено чеськими математиками М. Зламалом та А. Женишеком. При цьому параметрами інтерполяції виступають значення наближуваної функції та її частинних похідних (до 2-го порядку включно) у вершинах трикутника і значення похідних у напрямку внутрішньої нормалі до сторін трикутника, які обчислені в серединах сторін. Проте на практиці доволі часто про наближувану функцію відомо лише її значення на деякій сітці вузлів, а значення похідних цієї функції є невідомими. Тому актуальною є проблема побудови інтерполяційно-апроксимаційних поліномів 5-го степеня на довільному трикутнику, в яких невідомі значення похідних функції визначаються методом найменших квадратів при мінімізації певного функціоналу.

ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНОГО ПОЛІНОМА 5-ГО СТЕПЕНЯ НА ДОВІЛЬНОМУ ТРИКУТНИКУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЯВНИХ ФОРМУЛ ДЛЯ БАЗИСНИХ ПОЛІНОМІВ ЗЛАМАЛА-ЖЕНИШЕКА

У [5] наведено метод побудови явних формул для базисних поліномів Зламала-Женишека 5-го степеня на довільному трикутнику $\triangle A_1 A_2 A_3$: $h_{kpq}(x, y)$, $H_{ij}(x, y)$, $k = \overline{1, 3}$, $p, q \in \{0, 1, 2\}$, $0 \leq p + q \leq 2$, $(i, j) \in Q = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Ці поліноми мають властивості:

$$1) D^{\beta_1, \beta_2} h_{kpq}(x, y) \Big|_{A_j} = \delta_{k,j} \delta_{(\beta_1, \beta_2), (p, q)};$$

$$2) D^{\gamma_1, \gamma_2} H_{ij}(x, y) \Big|_{A_i} = 0, \quad \forall l = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2, \quad \frac{\partial H_{ij}}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}} = 1, \quad \frac{\partial H_{ij}}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{mn}} = 0, \quad (m, n) \neq (i, j), \quad (M_{ij} -$$

середина сторони $A_i A_j$).

Це дозволяє побудувати інтерполяційний поліном $S_5(x, y)$ для заданої функції $f(x, y)$ у вигляді:

$$S_5(x, y) = w(x, y) + \sum_{(i,j) \in Q} \left[\frac{\partial f}{\partial v_{ij}} - \frac{\partial w}{\partial v_{ij}} \right]_{M_{ij}} H_{ij}(x, y), \quad w(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 2} D^{\beta_1, \beta_2} f(A_i) h_{i\beta_1\beta_2}(x, y),$$

або

$$S_5(x, y) = \sum_{k=1}^3 \sum_{0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 2} D^{\beta_1, \beta_2} f(A_k) v_{k\beta_1\beta_2} + \sum_{(i,j) \in Q} \frac{\partial f}{\partial v_{ij}}(M_{ij}) V_{ij}(x, y), \quad (1)$$

де $v_{k\beta_1\beta_2}(x, y) = h_{k\beta_1\beta_2}(x, y) - \sum_{(i,j) \in Q} \frac{\partial h_{k\beta_1\beta_2}}{\partial v_{ij}}(M_{ij}) H_{ij}(x, y)$, $V_{ij}(x, y) = H_{ij}(x, y)$.

Очевидно, що цей поліном має властивості:

1) $D^{\beta_1, \beta_2} f(x, y)|_{A_l} = D^{\beta_1, \beta_2} S_5(x, y)|_{A_l}$, $\forall l = \overline{1, 3}$, $\beta_1, \beta_2 \in \{0, 1, 2\}$, $0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 2$;

2) $\frac{\partial S_5(x, y)}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{ij}} \Big|_{M_{ij}}$, $(i, j) \in Q = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, де v_{ij} – одиничний вектор

внутрішньої нормалі до сторони $A_i A_j$ трикутника; M_{ij} – середина сторони $A_i A_j$.

Оскільки

$$D^{\gamma_1, \gamma_2} H_{ij}(x, y)|_{A_l} = 0, \quad \forall l = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2,$$

то

$$D^{\gamma_1, \gamma_2} v_{kpq}(x, y)|_{A_j} = D^{\gamma_1, \gamma_2} h_{kpq}(x, y)|_{A_j}.$$

Тобто функції $v_{kpq}(x, y)$ мають такі самі інтерполяційні властивості, як і функції $h_{kpq}(x, y)$.

Отже, враховуючи рівність (1), функції $v_{kpq}(x, y)$ та $V_{ij}(x, y)$ утворюють альтернативну систему базисних поліномів на трикутнику. Далі ми будемо використовувати саме ці базисні поліноми.

У роботі ми розв'язуємо наступну задачу: задано значення функції $f(x, y)$ у вершинах трикутника $\triangle A_1 A_2 A_3$: $f_1 = f(A_1)$, $f_2 = f(A_2)$, $f_3 = f(A_3)$. Вважаючи похідні функції у формулі (1) невідомими параметрами, ми знаходимо їх методом найменших квадратів при мінімізації функціоналу

$$J(C) = \iint_{\triangle A_1 A_2 A_3} O^2(x, y, f, C) dx dy,$$

де $O(x, y, f, C) = \sum_{k=1}^3 f_k \psi_k(x, y) + \sum_{m=1}^{18} C_m \varphi_m(x, y)$, $\psi_1(x, y) = v_{100}(x, y)$, $\psi_2(x, y) = v_{200}(x, y)$,

$\psi_3(x, y) = v_{300}(x, y)$; $\varphi_{5j-4}(x, y) = v_{j10}(x, y)$, $\varphi_{5j-3}(x, y) = v_{j01}(x, y)$, $\varphi_{5j-2}(x, y) = v_{j20}(x, y)$,
 $\varphi_{5j-1}(x, y) = v_{j11}(x, y)$, $\varphi_{5j}(x, y) = v_{j02}(x, y)$, $j = \overline{1, 3}$; $\varphi_{16} = V_{12}(x, y)$, $\varphi_{17} = V_{23}(x, y)$,
 $\varphi_{18} = V_{31}(x, y)$.

Очевидно, що при будь-яких дійсних C_i , $i = \overline{1,18}$ оператор $O(x, y, f, C)$ має властивості: $O(x_k, y_k, f, C) = f_k$, $k = \overline{1,3}$, тобто є оператором інтерполяції.

Визначимо тепер параметри C_i , $i = \overline{1,18}$ з умови $J(C) \rightarrow \min_C$.

Нехай C^* – матриця-стовпець, на якій досягається мінімум функціоналу $J(C)$. Запишемо оператор $O(x, y, f, C^*)$ у матричній формі

$$O(x, y, f, C^*) = F^T \cdot \Psi(x, y) + C^{*T} \cdot \Phi(x, y), \quad (2)$$

$$\text{де } F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y) \\ \psi_2(x, y) \\ \psi_3(x, y) \end{pmatrix}, C^* = \begin{pmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \dots \\ C_{18}^* \end{pmatrix}, \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \\ \dots \\ \varphi_{18}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Матриця-стовпець C^* обчислюється за формулою

$$C^* = -A^{-1} \cdot B \cdot F, \quad (3)$$

$$\text{де } A_{ij} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy, B_{ik} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \psi_k(x, y) dx dy, i, j = \overline{1,18}, k = \overline{1,3}.$$

Доведення. Знаходячи похідні функціоналу $J(C)$ за параметрами C_i , $i = \overline{1,18}$ та прирівнюючи їх до нуля, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} J(C) = 2 \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \left(\sum_{j=1}^{18} C_j \varphi_j(x, y) + \sum_{k=1}^3 f_k \psi_k(x, y) \right) \varphi_i(x, y) dx dy = 0, \quad i = \overline{1,18}.$$

Після перетворень цю систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{18} \left(\iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy \right) C_j = - \sum_{k=1}^3 \left(\iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \psi_k(x, y) dx dy \right) f_k, \quad i = \overline{1,18}. \quad (4)$$

Якщо ввести позначення $A_{ij} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy$, $B_{ik} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \varphi_i(x, y) \psi_k(x, y) dx dy$, $i, j = \overline{1,18}$, $k = \overline{1,3}$, то систему (4) можна записати у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{18} A_{ij} C_j = - \sum_{k=1}^3 B_{ik} f_k, \quad i = \overline{1,18}. \quad (5)$$

Перепишемо (5) у матричному вигляді:

$$AC = -BF.$$

Безпосереднім обчисленням можна переконатись, що $\det(A) \neq 0$, тобто існує обернена матриця A^{-1} . Тоді для розв'язку C^* останнього матричного рівняння маємо рівність:

$$C^* = -A^{-1}BF.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Оператор інтерполяції $O(x, y, f) \equiv O(x, y, f, C^*)$ можна записати у матричній формі:

$$O(x, y, f) = F^T (\Psi(x, y) - B^T A^{-1} \Phi(x, y)).$$

Доведення. Скористаємось представленням оператора інтерполяції $O(x, y, f)$ у матричній формі (2). Враховуючи рівність (3) та властивості операції транспонування матриць, маємо:

$$C^{*T} = (-A^{-1}BF)^T = -F^T B^T (A^{-1})^T.$$

Матриця A^{-1} є симетричною (як обернена до симетричної матриці), тому $(A^{-1})^T = A^{-1}$.

Отже, $C^{*T} = -F^T B^T A^{-1}$.

Підставляючи одержаний вираз для C^{*T} в (2), отримаємо:

$$O(x, y, f) = F^T \cdot \Psi(x, y) - F^T B^T A^{-1} \cdot \Phi(x, y) = F^T (\Psi(x, y) - B^T A^{-1} \Phi(x, y)).$$

Теорему 2 доведено.

Позначимо $\Lambda(x, y) = \Psi(x, y) - M\Phi(x, y)$, де $M = B^T A^{-1}$. Тоді для елементів $\lambda_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$ матриці стовпця $\Lambda(x, y)$ маємо рівності:

$$\lambda_i(x, y) = \psi_i(x, y) - \sum_{k=1}^{18} M_{ik} \varphi_k(x, y), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

де M_{ik} – елемент (i, k) матриці M .

Отже, оператор $O(x, y, f)$ можна записати у вигляді:

$$O(x, y, f) = \sum_{i=1}^3 f_i \lambda_i(x, y) = \sum_{i=1}^3 f_i \left(\psi_i(x, y) - \sum_{k=1}^{18} M_{ik} \varphi_k(x, y) \right).$$

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНІ ПОЛІНОМИ 5-ГО СТЕПЕНЯ НА «ОДИНИЧНОМУ» ТРИКУТНИКУ

Нехай $\Delta A_1 A_2 A_3$ – «одиничний» трикутник, тобто трикутник з вершинами $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(0,1)$. Використовуючи результати [5], можна виписати явні вирази для всіх базисних поліномів $v_{k\beta}(x, y)$ та $V_{ij}(x, y)$ для «одиничного» трикутника:

$$v_{100}(x, y) = 30xy^2(x+y-1)^2 - (x+y-1)^3(6x^2+12xy+3x+6y^2+3y+1) + 30x^2y(x+y-1)^2,$$

$$v_{110}(x, y) = 12x^2y(x+y-1)^2 - 5xy^2(x+y-1)^2 - x(3x+3y+1)(x+y-1)^3,$$

$$v_{101}(x, y) = 12xy^2(x+y-1)^2 - 5x^2y(x+y-1)^2 - y(3x+3y+1)(x+y-1)^3,$$

$$v_{120}(x, y) = \frac{3}{2}x^2y(x+y-1)^2 - \frac{1}{2}x^2(x+y-1)^3,$$

$$v_{111}(x, y) = -xy^2(x+y-1)^2 - x^2y(x+y-1)^2 - xy(x+y-1)^3,$$

$$v_{102}(x, y) = \frac{3}{2}xy^2(x+y-1)^2 - \frac{1}{2}y^2(x+y-1)^3,$$

$$v_{200}(x, y) = x^3(6(x-1)^2 - 3x + 4) - 15x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{210}(x, y) = \frac{7}{2}x^2y^2(x+y-1) - x^3(x-1)(3x-4),$$

$$v_{201}(x, y) = -5x^2y(x+y-1)^2 - \frac{17}{2}x^2y^2(x+y-1) - x^3y(3x-4),$$

$$v_{220}(x, y) = \frac{1}{2}x^3(x-1)^2 - \frac{1}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{211}(x, y) = x^2y(x+y-1)^2 + \frac{3}{2}x^2y^2(x+y-1) + x^3y(x-1),$$

$$v_{202}(x, y) = \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{5}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{300}(x, y) = y^3(6(y-1)^2 - 3y + 4) - 15x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{310}(x, y) = -5xy^2(x+y-1)^2 - \frac{17}{2}x^2y^2(x+y-1) - xy^3(3y-4),$$

$$v_{301}(x, y) = \frac{7}{2}x^2y^2(x+y-1) - y^3(y-1)(3y-4),$$

$$v_{320}(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{5}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$v_{311}(x, y) = xy^2(x+y-1)^2 + \frac{3}{2}x^2y^2(x+y-1) + xy^3(y-1),$$

$$v_{302}(x, y) = \frac{1}{2}y^3(y-1)^2 - \frac{1}{4}x^2y^2(x+y-1),$$

$$V_{12}(x, y) = 16x^2y(x+y-1)^2, \quad V_{23}(x, y) = -8\sqrt{2}x^2y^2(x+y-1), \quad V_{31}(x, y) = 16xy^2(x+y-1)^2.$$

Після введення лінійної нумерації для базисних поліномів, як у попередньому пункті, та здійснення всіх необхідних обчислень за формулою (6), отримаємо для «одиничного» трикутника такі вирази функцій $\lambda_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x, y) = & -36x^5 - 36y^5 - \frac{3600x^4y}{19} - \frac{7200x^3y^2}{19} - \frac{7200x^2y^3}{19} - \frac{3600xy^4}{19} + \frac{2025x^4}{19} + \\ & + \frac{8400x^3y}{19} + \frac{12600x^2y^2}{19} + \frac{8400xy^3}{19} + \frac{2025y^4}{19} - \frac{24600x^3}{209} - \frac{75600x^2y}{209} - \frac{75600xy^2}{209} - \\ & - \frac{24600y^3}{209} + \frac{12420x^2}{209} + \frac{25200xy}{209} + \frac{12420y^2}{209} - \frac{2780x}{209} - \frac{2780y}{209} + 1; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(x, y) = & 36x^5 - \frac{180x^4y}{19} + \frac{360x^3y^2}{19} - \frac{360x^2y^3}{19} - \frac{180xy^4}{19} - \frac{1395x^4}{19} + \frac{420x^3y}{19} + \\ & + \frac{630x^2y^2}{19} + \frac{420xy^3}{19} + \frac{30y^4}{19} + \frac{10740x^3}{209} - \frac{3780x^2y}{209} - \frac{3780xy^2}{209} - \frac{60y^3}{19} - \frac{270x^2}{19} + \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1260xy}{209} + \frac{450y^2}{209} + \frac{260x}{209} - \frac{120y}{209}; \\
 \lambda_3(x, y) = & 36y^5 - \frac{180x^4y}{19} - \frac{360x^3y^2}{19} - \frac{360x^2y^3}{19} - \frac{180xy^4}{19} + \frac{30x^4}{19} + \frac{420x^3y}{19} + \\
 & + \frac{630x^2y^2}{19} + \frac{420xy^3}{19} - \frac{1395y^4}{19} - \frac{60x^3}{19} - \frac{3780x^2y}{209} - \frac{3780xy^2}{209} + \frac{10740y^3}{209} + \frac{450x^2}{209} + \\
 & + \frac{1260xy}{209} - \frac{270y^2}{19} - \frac{120x}{209} + \frac{260y}{209}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Отже, інтерполяційно-апроксимаційний поліном на «одичному» трикутнику задається так:

$$O(x, y, f) = f_1\lambda_1(x, y) + f_2\lambda_2(x, y) + f_3\lambda_3(x, y), \tag{10}$$

де $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$, $\lambda_3(x, y)$ виражаються за формулами (7)-(9), $f_1 = f(A_1)$, $f_2 = f(A_2)$, $f_3 = f(A_3)$.

Приклад 1. Нехай $f(x, y) = \frac{x^6}{6!} + \frac{y^6}{6!}$. У цьому випадку $f_1 = 0$, $f_2 = f_3 = \frac{1}{720}$. Підставляючи ці значення в (10), отримаємо вираз для інтерполяційно-апроксимаційного полінома для заданої функції:

$$\begin{aligned}
 O(x, y, f) = & \frac{x^5}{20} + \frac{y^5}{20} - \frac{x^4y}{38} - \frac{x^3y^2}{19} - \frac{x^2y^3}{19} - \frac{xy^4}{38} - \frac{91x^4}{912} + \frac{7x^3y}{114} + \frac{7x^2y^2}{76} + \frac{7xy^3}{114} - \frac{91y^4}{912} + \frac{14x^3}{209} - \\
 & - \frac{21x^2y}{418} - \frac{21xy^2}{418} + \frac{14y^3}{209} - \frac{7x^2}{418} + \frac{7xy}{418} - \frac{7y^2}{418} + \frac{7x}{7524} + \frac{7y}{7524}.
 \end{aligned}$$

Наприклад, у точці $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ абсолютна похибка наближення значення функції поліномом

$$O(x, y, f) \text{ дорівнює } \Delta = \left| f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - O\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right| \approx 5,254 \cdot 10^{-5}.$$

Для величини відхилення полінома $O(x, y, f)$ від функції $f(x, y)$ у середньо-квадратичній метриці маємо:

$$\left(\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (f(x, y) - O(x, y, f))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1,29 \cdot 10^{-4}.$$

ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОХИБКИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНИМ ПОЛІНОМОМ ВІД ЛІНІЙНИХ РОЗМІРІВ ТРИКУТНИКА

Відхилення інтерполяційно-апроксимаційного полінома від наближуваної функції будемо обчислювати в рівномірній метриці:

$$\rho(f, g) = \sup_{(x,y) \in S} |f(x, y) - g(x, y)|,$$

де $f(x, y)$, $g(x, y)$ – обмежені дійсні функції, визначені на множині S .

Нехай Δ_h – рівнобедрений прямокутний трикутник з вершинами в точках $(0,0)$, $(h,0)$, $(0,h)$. Позначимо через $O(x, y, h)$ – інтерполяційно-апроксимаційний поліном для функції

$$f(x, y) = \frac{x^6}{6!} + \frac{x^5 y}{5! \cdot 1!} + \frac{x^4 y^2}{4! \cdot 2!} + \frac{x^3 y^3}{3! \cdot 3!} + \frac{x^2 y^4}{2! \cdot 4!} + \frac{xy^5}{1! \cdot 5!} + \frac{y^6}{6!}$$

на трикутнику Δ_h .

Відхилення інтерполяційно-апроксимаційного полінома $O(x, y, h)$ від функції $f(x, y)$ на трикутнику Δ_h є функцією аргументу h . Позначимо цю функцію $\varepsilon(h)$, тобто

$$\varepsilon(h) \equiv \sup_{(x, y) \in \Delta_h} |f(x, y) - O(x, y, h)|.$$

Для функції $f(x, y) = \frac{x^6}{6!} + \frac{x^5 y}{5! \cdot 1!} + \frac{x^4 y^2}{4! \cdot 2!} + \frac{x^3 y^3}{3! \cdot 3!} + \frac{x^2 y^4}{2! \cdot 4!} + \frac{xy^5}{1! \cdot 5!} + \frac{y^6}{6!}$ нами було проведено чисельний експеримент засобами системи комп'ютерної математики Mathcad, у якому ми обчислювали значення функції $\varepsilon^*(h) \equiv \varepsilon(h\sqrt{2})$ при $h \in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1\}$. Результати експерименту наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення функції $\varepsilon^*(h)$ при $h \in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1\}$

i	1	2	3	4	5	6
h_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\varepsilon^*(h_i)$	$2,379 \cdot 10^{-5}$	$7,101 \cdot 10^{-5}$	$1,791 \cdot 10^{-4}$	$3,991 \cdot 10^{-4}$	$8,089 \cdot 10^{-4}$	$1,522 \cdot 10^{-3}$

У роботі [6] показано, що похибка наближення функції інтерполяційним поліномом має вигляд степеневі функції від довжини найбільшої сторони трикутника.

Припускаючи степеневу залежність $\varepsilon^*(h)$, будемо шукати вираз $\varepsilon^*(h)$ у вигляді:

$$\varepsilon^*(h) = A_0 \cdot h^A. \quad (11)$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 3. Якщо довжини катетів трикутників Δ_h змінюються за законом $h_i = 0,1 \cdot i + 0,4$, $i = \overline{1, 6}$, то похибку наближення функції $f(x, y)$ інтерполяційно-апроксимаційним поліномом $O(x, y, h)$ можна представити у вигляді

$$\varepsilon(h) = 0,238 \cdot 10^{-4} \cdot h^6.$$

Доведення. Логарифмуючи рівність (11), отримаємо

$$\ln \varepsilon^*(h) = \ln A_0 + A_1 \ln h.$$

Введемо заміну: $y = \ln \varepsilon^*(h)$, $x = \ln h$, $a = A_1$, $b = \ln A_0$. Тоді $y = ax + b$.

Знайдемо коефіцієнти a та b методом найменших квадратів, мінімізуючи функцію $F(a, b) = \sum_{i=1}^6 (y_i - ax_i - b)^2$, де $y_i = \ln \varepsilon^*(h_i)$, $x_i = \ln h_i$, $i = \overline{1, 6}$.

Маємо:

$$F'_a = 2 \sum_{i=1}^6 (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0, \quad F'_b = 2 \sum_{i=1}^6 (y_i - ax_i - b)(-1) = 0.$$

Отримуємо систему:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^6 x_i^2 + b \sum_{i=1}^6 x_i = \sum_{i=1}^6 x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^6 x_i + 6b = \sum_{i=1}^6 y_i. \end{cases}$$

Звідси

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^6 x_i y_i & \sum_{i=1}^6 x_i \\ \sum_{i=1}^6 y_i & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^6 x_i^2 & \sum_{i=1}^6 x_i \\ \sum_{i=1}^6 x_i & 6 \end{vmatrix}} = 6, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^6 x_i^2 & \sum_{i=1}^6 x_i y_i \\ \sum_{i=1}^6 x_i & \sum_{i=1}^6 y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^6 x_i^2 & \sum_{i=1}^6 x_i \\ \sum_{i=1}^6 x_i & 6 \end{vmatrix}} \approx -8,567.$$

Отже, $A_1 = a = 6$, $A_0 = e^b \approx 1,903 \cdot 10^{-4}$.

Таким чином, $\varepsilon^*(h) = 1,903 \cdot 10^{-4} \cdot h^6$. Звідси маємо

$$\varepsilon(h) = \varepsilon^* \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right) = 0,238 \cdot 10^{-4} \cdot h^6.$$

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНИХ ПОЛІНОМІВ ДО НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

Теорема 4. Якщо у вершинах “одиничного” трикутника $\triangle A_1 A_2 A_3$ відомі лише значення функції $f(x, y)$: $f_1 = f(A_1)$, $f_2 = f(A_2)$, $f_3 = f(A_3)$, то невідомі значення її похідних можуть бути наближено обчислені за формулами:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_1} \approx C_1^* = \frac{260}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1 - \frac{120}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{A_1} \approx C_2^* = \frac{260}{209} f_3 - \frac{120}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{A_1} \approx C_3^* = \frac{24840}{209} f_1 - \frac{540}{19} f_2 + \frac{900}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{A_1} \approx C_4^* = \frac{25200}{209} f_1 + \frac{1260}{209} f_2 + \frac{1260}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{A_1} \approx C_5^* = \frac{24840}{209} f_1 + \frac{900}{209} f_2 - \frac{540}{19} f_3, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_2} \approx C_6^* = \frac{2780}{209} f_2 - \frac{260}{209} f_1 + \frac{120}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{A_2} \approx C_7^* = \frac{20}{11} f_3 - \frac{20}{11} f_1, \quad \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{A_2} \approx C_8^* = \frac{24840}{209} f_2 - \frac{540}{19} f_1 + \frac{900}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{A_2} \approx C_9^* = -\frac{7200}{209} f_1 - \frac{360}{209} f_2 - \frac{360}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{A_2} \approx C_{10}^* = -\frac{7560}{209} f_1 - \frac{720}{209} f_2 - \frac{7560}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_3} \approx C_{11}^* = \frac{20}{11} f_2 - \frac{20}{11} f_1, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{A_3} \approx C_{12}^* = \frac{120}{209} f_2 - \frac{260}{209} f_1 + \frac{2780}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{A_3} \approx C_{13}^* = -\frac{7560}{209} f_1 - \frac{7560}{209} f_2 - \frac{720}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{A_3} \approx C_{14}^* = -\frac{7200}{209} f_1 - \frac{360}{209} f_2 - \frac{360}{209} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{A_3} \approx C_{15}^* = \frac{900}{209} f_2 - \frac{540}{19} f_1 + \frac{24840}{209} f_3, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{12}} \right|_{M_{12}} \approx C_{16}^* = \frac{75}{836} f_2 - \frac{5}{209} f_1 + \frac{145}{76} f_3,$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{23}} \right|_{M_{23}} \approx C_{17}^* = \frac{145\sqrt{2}}{76} f_1 + \frac{5\sqrt{2}}{152} f_2 + \frac{5\sqrt{2}}{152} f_3, \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial v_{31}} \right|_{M_{31}} \approx C_{18}^* = \frac{145}{76} f_2 - \frac{5}{209} f_1 + \frac{75}{836} f_3.$$

Доведення. Обчислюючи елементи матриці-стовпця C^* за формулою (3), отримаємо, наприклад, що $C_1^* = \frac{260}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1 - \frac{120}{209} f_3$, причому цей коефіцієнт у виразі для $O(x, y, f)$

стоїть при базисному поліномі $\varphi_1(x, y) \equiv v_{110}(x, y)$, який, відповідно, в представленні

інтерполяційного полінома (1) стоїть з множником $D^{1,0} f(x, y)|_{A_1} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_1}$. Тому можна

вважати C_1^* наближеним значенням похідної $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_1}$. Тобто

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{A_1} \approx C_1^* = \frac{260}{209} f_2 - \frac{2780}{209} f_1 - \frac{120}{209} f_3. \text{ Аналогічно одержуємо інші наближені рівності.}$$

ВИСНОВКИ

Запропонований нами метод побудови інтерполяційно-апроксимаційних поліномів 5-го степеня на трикутнику дозволяє будувати інтерполяційно-апроксимаційні сплайни 5-го степеня на триангульованій сітці вузлів. Планується використання цих сплайнів до математичного моделювання розподілу корисних копалин.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zenisek A. Interpolation polynomials on the triangle / A. Zenisek // Numer. Math. – 1970. – Vol. 15. – P. 283-296.
2. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type / A. Zenisek // Math. Comp. – 1995. – Vol. 64, N 211. – P. 929-941.
3. Bramble J. H. Triangular elements in the finite element method / J. H. Bramble, M. Zlamal // Math. Comp. – 1970. – Vol. 24. – P. 809-820.
4. Литвин О. О. Одна теорема про інтерполяційно-апроксимаційні оператори в інтегральній формі методу найменших квадратів / О. О. Литвин // Бионика интеллекта. – 2012. – № 2(79). – С. 19-22.
5. Сергиенко И. В. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике / И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин, О. И. Денисова // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Т. 50, N 5. – С. 25-33.
6. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника / Ю. Н. Субботин // Труды института математики и механики. – УрО РАН, 1992. – Т. 2. – С. 110-119.

REFERENCES

1. Zenisek, A. (1970), "Interpolation polynomials on the triangle", *Numer. Math.*, vol. 15, pp. 283-296.
2. Zenisek, A. (1995), "Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type", *Math. Comp.*, vol. 64, no. 211, pp. 929-941.
3. Bramble, J.H. and Zlamal, M. (1970), "Triangular elements in the finite element method", *Math. Comp.*, vol. 24, pp. 809-820.
4. Litvin, O.O. (2012), "A theorem on interpolating-approximating operators in the integral form of the least-squares method", *Bionika intellekta*, vol. 79, no. 2, pp. 19-22.
5. Sergienko, I.V., Litvin, O.N., Litvin, O.O. and Denisova, O.I. (2014), "Explicit formulas for interpolation splines 5th degree on a triangle", *Kibernetika i sistemnyi analiz*, vol. 50, no. 5, pp. 25-33.
6. Subbotin, Yu.N. (1992), "Dependence of the estimates of approximation by interpolation polynomials of the fifth degree of the geometrical characteristics of the triangle", *Trudy instituta matematiki i mekhaniki*, vol. 2, pp. 110-119.

УДК 519.6

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЇХ СЛІДІВ НА СИСТЕМІ ПЕРЕТИННИХ СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ

Литвин О. М., Славик О. В.

*Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, Україна*

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

У статті здійснено огляд існуючих методів відновлення пошкоджених цифрових зображень. Наведено стандартний метод інтерстріпації функції двох змінних. Запропоновано новий модифікований метод інтерстріпації для відновлення зображення поверхні за неповною інформацією про неї у випадку, якщо границі пошкоджених (невідомих) ділянок зображення є смугами, розташованими під довільним кутом.

Ключові слова: зображення, відновлення зображень, інтерстріпація, інтерлінація.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ИХ СЛЕДОВ НА СИСТЕМЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОЛОС, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ

Литвин О. Н., Славик А. В.

*Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, Украина*

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

В статье проведен обзор существующих методов восстановления поврежденных цифровых изображений. Приведен стандартный метод интерстрипации функции двух переменных. Предложен новый модифицированный метод интерстрипации для восстановления изображения поверхности при неполной информации о ней в случае, если границы поврежденных (неизвестных) участков изображения являются полосами, расположенными под произвольным углом.

Ключевые слова: изображение, восстановление изображений, интерстрипация, интерлинеция.