

REFERENCES

1. Zenisek, A. (1970), "Interpolation polynomials on the triangle", *Numer. Math.*, vol. 15, pp. 283-296.
2. Zenisek, A. (1995), "Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type", *Math. Comp.*, vol. 64, no. 211, pp. 929-941.
3. Bramble, J.H. and Zlamal, M. (1970), "Triangular elements in the finite element method", *Math. Comp.*, vol. 24, pp. 809-820.
4. Litvin, O.O. (2012), "A theorem on interpolating-approximating operators in the integral form of the least-squares method", *Bionika intellekta*, vol. 79, no. 2, pp. 19-22.
5. Sergienko, I.V., Litvin, O.N., Litvin, O.O. and Denisova, O.I. (2014), "Explicit formulas for interpolation splines 5th degree on a triangle", *Kibernetika i sistemnyi analiz*, vol. 50, no. 5, pp. 25-33.
6. Subbotin, Yu.N. (1992), "Dependence of the estimates of approximation by interpolation polynomials of the fifth degree of the geometrical characteristics of the triangle", *Trudy instituta matematiki i mekhaniki*, vol. 2, pp. 110-119.

УДК 519.6

**НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ
ЇХ СЛІДІВ НА СИСТЕМІ ПЕРЕТИННИХ СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ
ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ**

Литвин О. М., Славик О. В.

*Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, м. Харків, Україна*

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

У статті здійснено огляд існуючих методів відновлення пошкоджених цифрових зображень. Наведено стандартний метод інтерстріпації функції двох змінних. Запропоновано новий модифікований метод інтерстріпації для відновлення зображення поверхні за неповною інформацією про неї у випадку, якщо границі пошкоджених (невдомих) ділянок зображення є смугами, розташованими під довільним кутом.

Ключові слова: зображення, відновлення зображень, інтерстріпація, інтерлінація.

**ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ИХ СЛЕДОВ
НА СИСТЕМЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОЛОС, РАСПОЛОЖЕННЫХ
ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ**

Литвин О. Н., Славик А. В.

*Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, г. Харьков, Украина*

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

В статье проведен обзор существующих методов восстановления поврежденных цифровых изображений. Приведен стандартный метод интерстрипации функции двух переменных. Предложен новый модифицированный метод интерстрипации для восстановления изображения поверхности при неполной информации о ней в случае, если границы поврежденных (неизвестных) участков изображения являются полосами, расположенными под произвольным углом.

Ключевые слова: изображение, восстановление изображений, интерстрипация, интерлинеция.

APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES WITH THE HELP OF THEIR TRACES ON THE SYSTEM OF INTERSECT STRIPS WHICH LOCATED AT AN ARBITRARY ANGLE

Lytvyn O. M., Slavik O. V.

Ukrainian engineering-pedagogics academy, Kharkiv, Ukraine

academ_mail@ukr.net, aleksey.slavik@yandex.ru

The task of restoring the image in the areas of absence of information about pixels is extremely important. Such problems arise in engineering, seismography, processing of remote sensing data, in tasks of processing of archive documents as images, which have a variety of distortion (scratches, stains, dust, unnecessary inscriptions, fold lines) etc. Currently in the world to solve such problems, there are a number of inpainting techniques available whose importance depends on the applications where it is used. Inpainting algorithms are broadly classified to different categories like texture based inpainting, exemplar based inpainting, PDE based inpainting, hybrid inpainting and fast semi-automatic inpainting. Also in this paper provides a method interstripation of functions of two variables, suggested in works of Lytvyn O. M. and Matveeva and S. Y. This method allows restoring corrupted image, if the damaged area is represented by a set of disjoint strips that are parallel to the coordinate axes. The standard method of interstripation was taken as the basis for a new modified method interstripation of function of two variables using their traces on the system of strips which located at an arbitrary angle. Computational experiment was carried out for the cases, when the image is known only on the system of strips which located at an arbitrary angle. All this methods can be used to restore the affected areas of damaged images. Analysis and development of methods for image restoration is an actual task for various application areas of science and requires further research.

Key words: image, image inpainting, interstripation, interlination.

ВСТУП

Інколи у файлах, які містять графічну інформацію, виявляються дефекти. Оцінка значень втрачених пікселів, у яких відсутня інформація про зображення, необхідна в більшості задач цифрової обробки зображень або, наприклад, у задачах обробки архівних документів у вигляді зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо).

У [1] було запропоновано метод інтерстріпації для відновлення функції двох змінних у точках між смугами за допомогою інформації про цю функцію, яка відома лише в точках заданої системи смуг. Цей метод базувався на припущенні, що зображення відсутнє між смугами паралельними або взаємоперпендикулярними осям координат.

Метою дослідження є розробка модифікованого методу інтерстріпації, за допомогою якого можна відновлювати зображення у вигляді смуг, розташованих під довільним кутом, який би дозволив отримати такий самий результат, як і в [1] у випадку, коли смуги обмежені прямими паралельними осям координат.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

Розглянемо задачу відновлення пошкоджених областей зображення, використовуючи інформацію на відомих ділянках зображення.

Позначимо множину пікселів у невідомій області через \bar{D} , а множину коректних пікселів через D .

Більшість методів відновлення зображень можна умовно поділити на такі групи [2]: текстурні, шаблонні, базовані на рівняннях у частинних похідних, гібридні та швидкі напівавтоматичні. Наведемо коротку характеристику цих методів.

Текстурні методи відновлення зображень для заповнення невідомої області \bar{D} використовують пікселі безпосередньо з відомої області зображення D . Головна відмінність між цими методами полягає в забезпеченні неперервності на границі області D [2]. Методи текстурного відновлення зображення відрізняються способом відновлення різних кольорів, інтенсивності, градієнта та навіть статистичних характеристик.

Основна ідея роботи шаблонних методів відновлення зображень полягає у припущенні про наявність повторюваних фрагментів даних на зображенні, які зазвичай називаються шаблонами. Відновлення області \bar{D} здійснюється частинами шляхом копіювання значень яскравості з найбільш схожого шаблону [2]. Особливо виділяється робота [3], де для заповнення пошкодженої області використовується база даних зображень, яка містить мільйони зображень-шаблонів для відновлення.

Згідно з методами відновлення зображень, базованими на рівняннях з частинними похідними, відновлення даних області \bar{D} проводиться за допомогою даних, що є природним продовженням інформації, яка міститься в D [4].

Гібридні методи відновлення зображень – це поєднання двох класів методів. А саме текстурних методів та методів, базованих на використанні диференціальних рівнянь з частинними похідними. Основна ідея алгоритму полягає в тому, що перш за все виділяють текстурну та структурну складову зображення, які потім заповнюються відповідними алгоритмами [2].

Недоліком більшості представлених вище методів є їх висока обчислювальна складність, тому в деяких працях застосовують швидкі напівавтоматичні методи відновлення зображення для прискорення обчислень. До таких методів відносять метод відновлення зображення за допомогою виділеної структури [5] та метод відновлення зображення з використанням ітеративної згортки зображення з дифузним ядром [6].

Інтерстріпацією (від англ. inter – між, від англ. stripe – смуга) функції двох змінних називається відновлення цієї функції між системою смуг, якщо інформація про цю функцію відома лише в точках вказаних смуг.

Вважається, що зображення поверхні Σ відоме лише на системі m ($m \geq 2$) вертикальних смуг вигляду:

$$D_{1,k} = \{ \alpha_k \leq x \leq \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}] \}, \quad k = \overline{1, m},$$

та на системі n ($n \geq 2$) горизонтальних смуг вигляду:

$$D_{2,l} = \{ \gamma_l \leq y \leq \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{m+1}] \}, \quad l = \overline{1, n}.$$

Введемо позначення $\bar{D}_{1,k} = R^2 \setminus D_{1,k}$, $k = \overline{1, m}$, $\bar{D}_{2,l} = R^2 \setminus D_{2,l}$, $l = \overline{1, n}$.

Тоді об'єднання множин $D_{1,k}$, $k = \overline{1, m}$ та $D_{2,l}$, $l = \overline{1, n}$ дає область \bar{D} незаповнених ділянок зображення. У точках зображення D , які не потрапили до \bar{D} , зберігається вся наявна інформація про зображення.

Поверхня $\Sigma: z = f(x, y)$, $f(x, y) = C^{N,N}(R^2)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$\begin{aligned} f(x, y) \Big|_{\alpha_k \leq x \leq \beta_k} &= f_{1,k}(x, y), \quad \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \quad \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1}, \\ f(x, y) \Big|_{\gamma_l \leq y \leq \delta_l} &= f_{2,l}(x, y), \quad \gamma_l \leq y \leq \delta_l, \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}. \end{aligned}$$

$C^{N,N}(R^2)$ – клас функцій, які мають неперервні похідні $f^{(p,q)}(x, y)$ для $0 < p, q \leq N$.

Введемо до розгляду такі оператори [1]:

$$\begin{aligned} L_1 f(x, y) &= \begin{cases} f_{1,k}(x, y) & \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \quad \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1}; \\ E_{1,k,k+1} f(x, y) & \beta_k \leq x \leq \alpha_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq m-1; \end{cases} \\ L_2 f(x, y) &= \begin{cases} f_{2,l}(x, y) & \gamma_l \leq y \leq \delta_l, \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}; \\ E_{2,l,l+1} f(x, y) & \delta_l \leq y \leq \gamma_{l+1}, \quad 1 \leq l \leq n-1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$L_{1,2}f(x, y) = \begin{cases} f_{1,k}(x, y) & (x, y) \in D_{1,k}, \quad k = \overline{1, m}; \\ f_{2,l}(x, y) & (x, y) \in D_{2,l}, \quad l = \overline{1, n}; \\ E_{1,2,k,l}f(x, y) & (x, y) \in \overline{D}, \end{cases}$$

де

$$E_{1,2,k,l}f(x, y) = [E_{1,k,k+1} + E_{2,l,l+1} - E_{1,k,k+1}E_{2,l,l+1}]f(x, y).$$

Тут $E_{1,k,k+1}f(x, y)$, $E_{2,l,l+1}f(x, y)$ та $E_{1,2,k,l}f(x, y)$ – оператори двовимірної ермітової інтерполяції.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Необхідно відновити пошкоджене зображення деякої поверхні Σ . Вважаємо, що зображення поверхні Σ відоме лише на системі m ($m \geq 2$) смуг, розташованих під довільним кутом вигляду:

$$D_k^* = \{(x, y) : \omega_{1,k}(x, y) \leq x, y \leq \omega_{2,k}(x, y)\}, \quad k = \overline{1, m},$$

де $\omega_{1,k}(x, y) = \alpha_{1,k}x + \beta_{1,k}y - \gamma_{1,k}$ та $\omega_{2,k}(x, y) = \alpha_{2,k}x + \beta_{2,k}y - \gamma_{2,k}$ – деякі прямі, якими обмежена смуга. Причому $\alpha_{1,k}^2 + \beta_{1,k}^2 = \alpha_{2,k}^2 + \beta_{2,k}^2 = 1$, $k = \overline{1, m}$.

Поверхня $\Sigma : z = f(x, y)$, $f(x, y) \in C^{N,N}(R^2)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$f(x, y)|_{D_k^*} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in D_k^*, \quad k = \overline{1, m}.$$

ІНТЕРСТРІПАЦІЯ НА СИСТЕМІ ДВОХ СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ

Введемо до розгляду оператор:

$$\Theta_{1,2}f(x, y) = \begin{cases} f_k(x, y) & (x, y) \in D_k^*, \quad k = \overline{1, 2}; \\ \Lambda_{1,2}^*f(x, y) & (x, y) \notin D_k^*, \quad k = \overline{1, 2}, \end{cases}$$

де

$$\Lambda_{1,2}^*f(x, y) = \frac{\rho_2(x, y)}{P(x, y)} f(x_1^*(x, y), y_1^*(x, y)) + \frac{\rho_1(x, y)}{P(x, y)} f(x_2^*(x, y), y_2^*(x, y));$$

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^m \rho_k(x, y); \quad \rho_k(x, y) = \sqrt{(x_k^*(x, y) - x)^2 + (y_k^*(x, y) - y)^2};$$

$$x_k^*(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \gamma_k & \beta_k \\ \alpha_k y - \beta_k x & \alpha_k \end{array} \right| / \Delta_k; \quad y_k^*(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \alpha_k & \gamma_k \\ -\beta_k & \alpha_k y - \beta_k x \end{array} \right| / \Delta_k; \quad \Delta_k = \left| \begin{array}{cc} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{array} \right|.$$

Фактично, $x_k^*(x, y)$ та $y_k^*(x, y)$ – це координати точки на k -тій смугі, яка знаходиться на найменшій відстані від точки (x, y) з невідомої області, $\rho_k(x, y)$ – відстань від точки (x, y) до k -тої прямої, $P(x, y)$ – сума відстаней до кожної зі смуг.

Поверхня $z = \Theta_{1,2}f(x, y) \in C^{N,N}(R^2)$ є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні Σ , яка на кожній зі смуг D_k^* , $k = \overline{1, 2}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $\Lambda_{1,2}^*f(x, y)$, при цьому функція $\Theta_{1,2}f(x, y) \in C^{N,N}(R^2)$.

ІНТЕРСТРІПАЦІЯ НА СИСТЕМІ М (М>2) СМУГ, РОЗТАШОВАНИХ ПІД ДОВІЛЬНИМ КУТОМ

Нехай $A_{k,l}, (k,l) \in \mathfrak{R} = \{(k,l) : \Gamma_k \cap \Gamma_l = A_{k,l}; k \neq l; k,l = \overline{1,m}\}$ – точки перетину прямих Γ_k та Γ_l , які є границями k -тої та l -тої смуг відповідно.

Введемо до розгляду оператор:

$$\Theta_m f(x, y) = \begin{cases} f_k(x, y) & (x, y) \in D_k^*, k = \overline{1,m}; \\ \Lambda_m^* f(x, y) & (x, y) \notin D_k^*, k = \overline{1,m}; \end{cases}$$

де

$$\Lambda_m^* f(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l}}^m \frac{\omega_i(x, y)}{\omega_i(A_{k,l})} \Lambda_{k,l}^* f(x, y).$$

$\Lambda_{k,l}^* f(x, y)$ – оператор інтерстріпації між k -ю та l -ю смугами, наведений у попередньому пункті:

$$\Lambda_{k,l}^* f(x, y) = \frac{\rho_l(x, y)}{P(x, y)} f(x_k^*(x, y), y_l^*(x, y)) + \frac{\rho_k(x, y)}{P(x, y)} f(x_l^*(x, y), y_k^*(x, y)).$$

Поверхня $z = \Theta_m f(x, y)$ є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні Σ , яка на кожній зі смуг $D_k^*, k = \overline{1,m}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $\Lambda_m^* f(x, y)$, при цьому функція $\Theta_m f(x, y) \in C^{N,N}(R^2)$.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Для проведення обчислювальних експериментів було взяте тестове зображення, з якого для кожного експерименту штучно були видалені смуги для їх подальшого відновлення викладеним вище модифікованими методом інтерстріпації.

Для першого експерименту були взяті смуги, наведені на рис. 1.

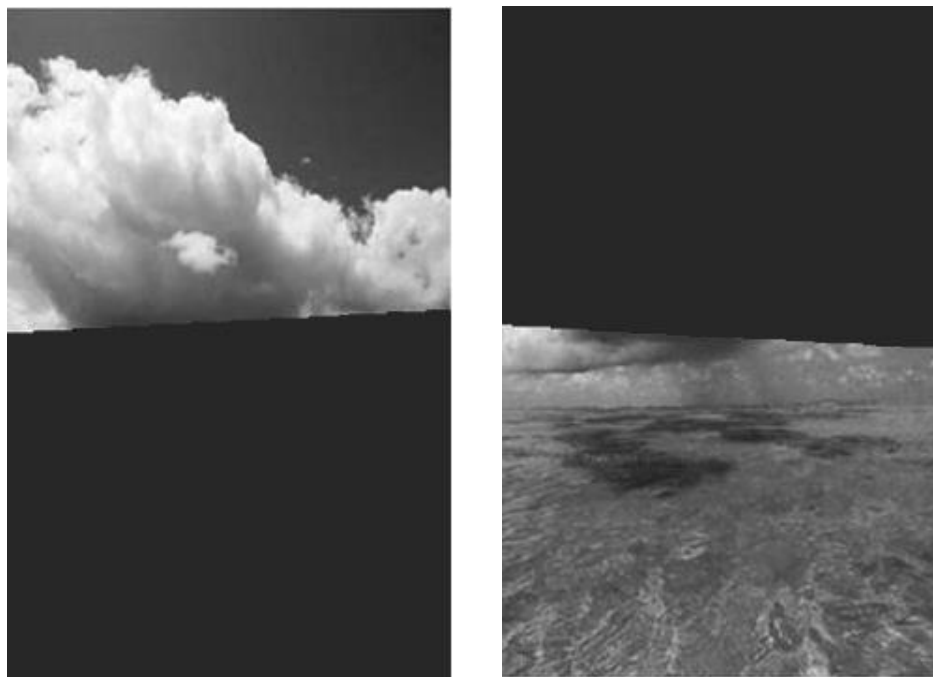


Рис. 1. Графічне зображення поверхні, заданої двома смугами

Зображення поверхні на двох заданих смугах одночасно наведено на рис. 2. Також на рис. 2 наведено відновлене зображення викладеним вище методом інтерстріпації на системі смуг, розташованих під довільним кутом.



Рис. 2. Графічне зображення пошкодженої та відновленої поверхні методом інтерстріпації між двома смугами, розташованими під довільним кутом

Для другого експерименту були взяті три смуги, наведені на рис. 3.



Рис. 3. Графічне зображення поверхні, заданої трьома смугами

Зображення поверхні на трьох заданих смугах одночасно наведено на рис. 4. Також на рис. 4 наведено відновлене зображення викладеним вище методом інтерстріпації на системі смуг, розташованих під довільним кутом.

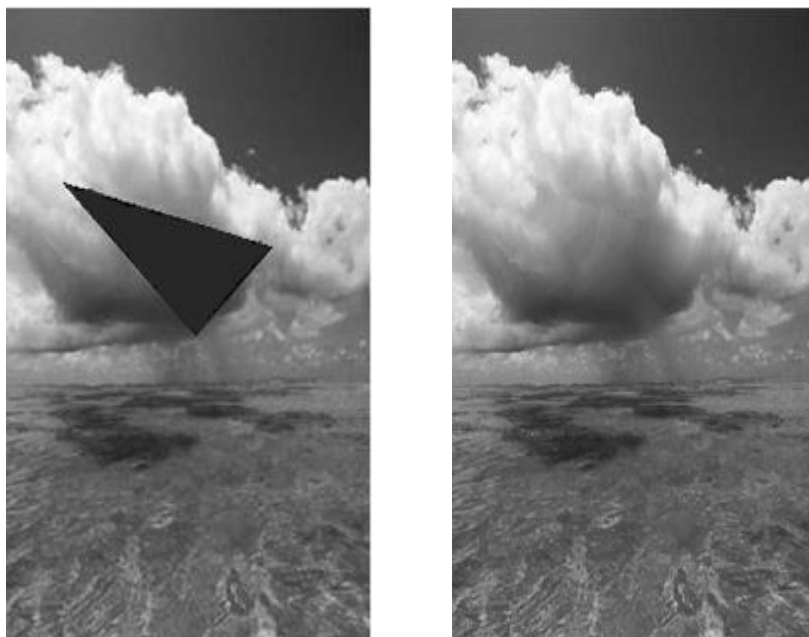


Рис. 4. Графічне зображення пошкодженої та відновленої поверхні методом інтерстріпації між трьома смугами, розташованими під довільним кутом

ВИСНОВКИ

В статті наведені та проаналізовані такі класи алгоритмів: текстурні, шаблонні, базовані на рівняннях з частинними похідними, гібридні та швидкі напівавтоматичні. Окремо було розглянуто метод інтерстріпації функції двох змінних. На основі методу інтерстріпації було запропоновано новий модифікований метод інтерстріпації для відновлення зображення поверхні за неповною інформацією про неї у випадку смуг, розташованих під довільним кутом. Було здійснено обчислювальний експеримент для випадків, коли зображення відоме лише на системі двох та трьох смуг, розташованих під довільним кутом.

Розглянуті методи можуть бути застосовані для відновлення уражених ділянок пошкоджених зображень. Аналіз і розробка методів відновлення зображень є актуальним завданням для різноманітних прикладних галузей науки та потребує подальших досліджень. У майбутньому автори планують при відновленні поверхні враховувати також додаткову інформацію про структуру поверхні між смугами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвин О. М. Метод відновлення поверхні між смугами за допомогою інформації про поверхню на взаємно перпендикулярних смугах / О. М. Литвин, С. Ю. Матвєєва // Управляющие системы и машины : междунар. научн. журн. – 2011. – № 1. – С. 33-41.
2. Joshua J. Digital inpainting techniques – a survey / J. Joshua, G. Darsan // Intern. J. of Latest Research in Engineering and Techn. – 2016. – Vol. 2. – P. 34-36.
3. Hays J. Scene completion using millions of Graphics / J. Hays, A. Efros // Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH). – 2007. – Vol. 26. – P. 87-94.
4. Bertalmio M. Image inpainting / M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, C. Ballester // Proc. of the 27th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques. – 2000. – P. 417-424.
5. Sun J. Image completion with structure propagation / J. Sun, L. Yuan, J. Jian, H.-Y. Shum // Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics. – 2005. – P. 861-868.
6. Oliviera M. Fast digital image inpainting / M. Oliviera, B. Bowen, R. McKenna, Y.-S. Chang // In Proc. of Intl. Conf. on Visualization, Imaging and Image Processing. – 2001. – P. 261-266.
7. Литвин О. М. Інтерлінація функцій / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 1992. – 234 с.
8. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.

REFERENCES

1. Lytvyn, O.M. and Matveeva, S.Y. (2011), "Method of surface recovery between strips with help information about surface on the perpendicular strips", *Control Systems and Computers*, vol. 1, pp. 33-41.
2. Joshua, J. and Darsan, G. (2016), "Digital inpainting techniques – a survey", *Intern. J. of Latest Research in Engineering and Techn.*, vol. 2, pp. 34-36.
3. Hays, J. and Efros, A. (2007), "Scene completion using millions of Graphics", *Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH)*, vol. 26, pp. 87-94.
4. Bertalmio, M., Sapiro, G., Caselles, V. and Ballester, C. (2000), "Image inpainting", *Proc. of the 27th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 417-424.
5. Sun, J., Yuan, L., Jian, J. and Shum, H.-Y. (2005), "Image completion with structure propagation", *Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics*, vol. 24, pp. 861-868.
6. Oliviera, M., Bowen, B., McKenna, R. and Chang, Y.-S. (2001), "Fast digital image inpainting", *Proc. of Intl. Conf. on Visualization, Imaging and Image Processing*, pp. 261-266.
7. Lytvyn, O.M. (1992), *Interlinacija funkcij* [Interlination of functions], Osnova, Kharkiv.
8. Lytvyn, O.M. (2002), *Interlinacija funkcij ta dejaki jiji zastosuvannja* [Interlination of functions and some its applications], Osnova, Kharkiv.

УДК 539.3

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛОЯ С ОСНОВАНИЕМ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л.

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепр, 49010, Украина*

kkt_fpm@ukr.net

Данная работа посвящена изучению нелинейного поведения слоя, лежащего на упругом основании, при действии комбинированной нагрузки – нормальной и тангенциальной. Задача формулируется в вариационной постановке. Произведен численный анализ напряженно-деформированного состояния слоя в зависимости от коэффициента трения и относительной жесткости слоя и основания.

Ключевые слова: плоская контактная задача, упругое полупространство, покрытие, напряжение, перемещение, трение, удельный вес.

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ШАРУ З ОСНОВОЮ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Ободан Н. И., Гук Н. А., Козакова Н. Л.

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, Україна*

kkt_fpm@ukr.net

Робота присвячена дослідженню нелінійної поведінки шару, що лежить на пружній основі, при дії комбінованого навантаження – нормального та тангенціального. Задача формулюється у варіаційній постановці. Здійснений числовий аналіз напружено-деформованого стану шару залежно від коефіцієнта тертя і відносної жорсткості шару та основи.

Ключові слова: плоска контактна задача, пружний напівпростір, покриття, напруження, переміщення, тертя, питома вага.