

5. Rozin, L.A. (1979), "The variational formulation of the elasticity problem with perfect unilateral constraints. Tasks Signorini", *Metod konechnykh elementov i stroitel'naya mekhanika. Trudy LPI*, no. 236, pp. 3-15.
6. Lovtsov, A.D. (2006), "Application Lemke algorithm to the problem of bending of the beam interacting with the elastic base by Coulomb friction", *Vesnik grazhdanskikh inzhenerov*, no. 5, pp. 19-26.
7. Alekandrov, V.M. and Vorovich, I.I. (2001), "Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy" [Contact mechanics], Nauka, Moscow, Russia.
8. Bathe, K. and Wilson, E.L. (1985), "Numerical method in finite element analysis", Nauka, Moscow, Russia.
9. Jun, L., Lui, X.Y., Nan, Y.Y. and Xuefeng, Y. (2016), "Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffener integrated composite structure", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 23(10), pp. 1188-1196.
10. Slobodyan, B.S., Lyashenko, B.A., Malanchuk, N.I., Marchuk, V.E. and Martynyak, R.M. (2016), "Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 215, iss. 1, pp. 110-120.

УДК 519.876.5

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМУВАННЯ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Овський О. Г., здобувач, Леонтєва В. В., к. ф.-м. н., доцент,
Кондрат'єва Н. О., к. ф.-м. н., доцент

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

У статті розглянутий вигин пружної прямокутної тришарової пластини із твердим наповнювачем, яка перебуває у стані спокою на пружній основі. Для опису кінематики шарів прийняті гіпотези Кірхгофа. Реакція основи описана моделлю Вінклера. На контурі пластини передбачається наявність твердої діафрагми, яка перешкоджає відносному зсуву шарів. Для побудови системи рівнянь рівноваги використано варіаційний принцип Лагранжа разом зі спрощуючою символікою В.З. Власова.

Ключові слова: Вінклерова основа, спрощуюча символіка, принцип Лагранжа, гіпотези Кірхгофа, наповнювач.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Овский А. Г., соискатель, Леонтёва В. В., к. ф.-м. н., доцент,
Кондратьева Н. А., к. ф.-м. н., доцент

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

В статье рассмотрен изгиб упругой прямоугольной трехслойной пластины с жестким наполнителем, которая находится в состоянии покоя на упругом основании. Для описания кинематики слоев приняты гипотезы Кирхгофа. Реакция основы описана моделью Винклера. На контуре пластины предполагается наличие твердой диафрагмы, которая препятствует относительному сдвигу слоев. Для построения системы уравнений равновесия использован вариационный принцип Лагранжа вместе с упрощающей символикой В.З. Власова.

Ключевые слова: Винклерово основание, упрощающая символіка, принцип Лагранжа, гипотезы Кирхгофа, наполнитель.

MATHEMATICAL MODELING OF DEFORMATION OF THE THREE LAYER PLATE ON ELASTIC FOUNDATION

Ovsky A. G., applicant, Leontieva V. V., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Kondratieva N. A., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

vleonteva15@gmail.com, n-kondr@mail.ru

This article devoted to the disclosure of the essence and presentation of the main stages of a new combined method, used for the solution of three-layered elastic theory tasks. The task is formulated as follows. Asymmetrical thickness three-ply elastic rectangular plate with solid filler is in stasis on an elastic foundation. At the heart of the problem are Kirchhoff hypotheses, used for the kinematic description of the layers, Winkler model for the description of the elastic foundation and the presence of a solid diaphragm on the plate contour that prevents the relative shift of the layers. Lagrange's variational principles with V. Z. Vlasov's simplifying symbols were used to build a system of equilibrium equations. Thus, according to the task analysis, there is a new combined method of its solution with V. Z. Vlasov's simplifying symbols and Lagrange's variational principle. On the basis of the developed method, there is a scheme of its using for solving tasks of elasticity theory that allows you to analyze the stress state at an external load force more accurately.

As a calculation tool to the specified method, developed by the authors tooling system that in turn performs complicated preparatory operations of making precise analytical solutions based on V. Z. Vlasov's method, conducts integration and subsequently, analytically solves a user-defined system of algebraic equations. With this tool system, it has become possible to resolve more complex problems in the three-dimensional formulation, solutions of which previously could not be obtained analytically. In addition, the software implementation of new algorithms created for construction of analytical solutions allows you to use computers in new ways of mathematical modeling, where full analytical outputs of various formulas are used.

There is also an example that illustrates an application of the proposed method using the developed tool system when the longitudinal load was chosen and the lateral load was in double trigonometric series. Considering different values of stiffness coefficient of the base within this example, determined changes of displacement and stress allowed to get the following results: extremes of deflection and stress, as well as a transition of the move occur at the center of the layer; during increasing of the base stiffness two times, and then the maximum values of displacements and stresses each time decreases by 50% 4 times that fully corresponds to the classical theory of plates; curves displacements for each layer are similar to the curves of the three-dimensional static problem of elasticity theory. The reliability solution is confirmed by the accuracy of V. Z. Vlasov's analytical method of initial functions and convergence of applicable series.

In conclusion the list of the tasks solved with the proposed method, can be used not only as in the example but extends to a sufficiently large area of mathematical modeling.

Key Words: Vinklerov's basis, simplifying symbols, the principle of Lagrange, Kirchhoff's hypothesis, filler.

ВСТУП

Математичне моделювання шаруватих конструкцій становить практичний інтерес, оскільки дозволяє перенести всю складність розрахунків на ЕОМ. У зв'язку з ростом обчислювальної потужності обчислювальних машин ускладнюються прийоми та алгоритми моделювання в кожному конкретному випадку. На сучасному етапі стало можливим поєднувати аналітичні й чисельні методи розв'язання задач теорії пружності завдяки розвиткові нових програмних продуктів – систем комп'ютерної математики [1]. Це дозволяє розробляти нові підходи до розрахунків складних технічних проблем. У запропонованій роботі описаний новий комбінований прийом розв'язання тришарової задачі теорії пружності із застосуванням спрощуючої символіки В.З. Власова [2] і варіаційного принципу Лагранжа [3]. У ролі розрахункового інструмента виступає розроблена авторами інструментальна система, яка відповідно виконує складні підготовчі операції виведення точного аналітичного розв'язку методом В.З. Власова [2], проводить інтегрування та, надалі, аналітично розв'язує задану користувачем систему алгебраїчних рівнянь.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Несиметрична по товщині пружна тришарова прямокутна пластина із твердим наповнювачем перебуває у стані спокою на пружній основі (рис. 1).

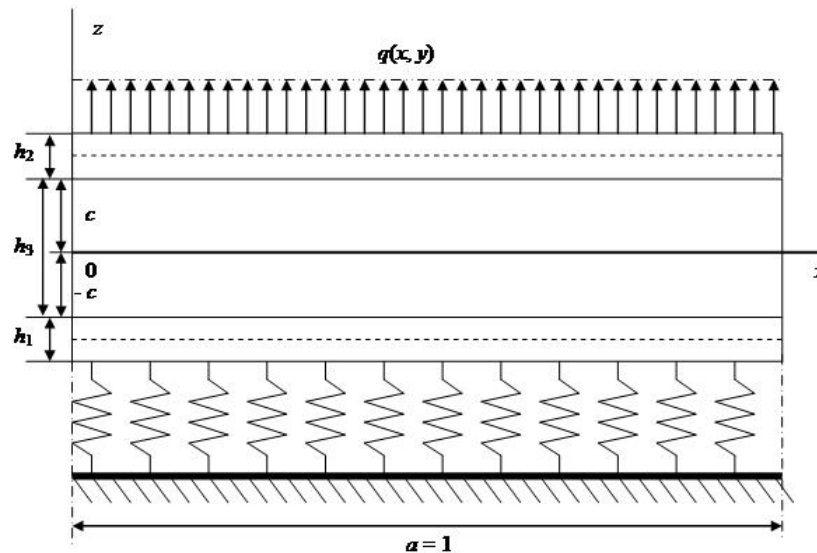


Рис. 1. Тришарова пластина

При цьому кінематика описується гіпотезами ламаної нормалі: у несучих шарах виконуються гіпотези Кірхгофа [4], у нестисливого за товщиною наповнювачі нормаль залишається прямолінійною, не змінює своєї довжини, але повертається на деякий додатковий кут, що становить із координатними осями величини $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$. Деформації вважаються малими. Реакція основи q_r відповідає моделі Вінклера [5, 6]:

$$q_r = -k w, \quad (1)$$

де k – коефіцієнт жорсткості основи; w – прогин пластини.

Знак « \leftarrow » вказує на те, що реакція спрямована в бік, протилежний прогину.

ВИКЛАД ОСНОВНИХ ЕТАПІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ

Система координат зв'язується із серединною площиною заповнювача. На пластину діють зовнішні розподілені поверхневі навантаження $p(x, y)$, $t(x, y)$, $q(x, y)$ та реакція основи q_r (рис. 2).

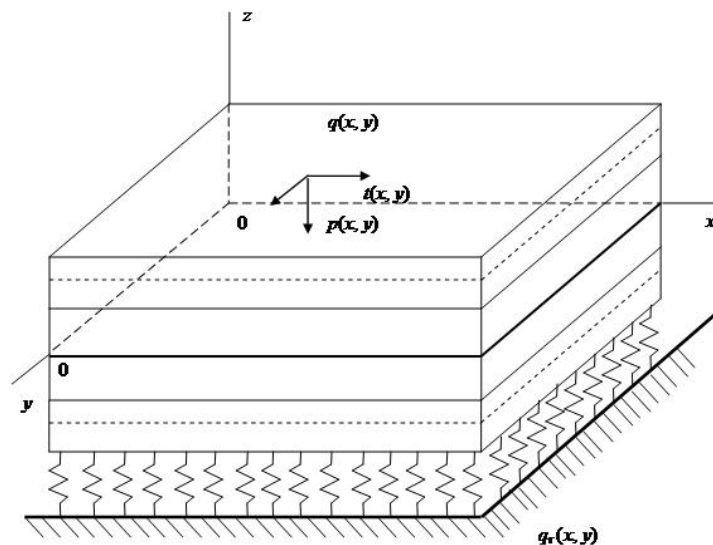


Рис. 2. Система координат задачі

З метою спрощення позначень для переміщень u , v і напружень, τ_{xy} , σ_y вводяться нові позначення:

$$\begin{aligned} Gu(x, y) &= U, & \tau_{xz}(x, y) &= X, \\ Gv(x, y) &= V, & \tau_{yz}(x, y) &= Y, \\ Gw(x, y) &= W, & \sigma_z(x, y) &= Z. \end{aligned} \tag{2}$$

Початкові функції відповідно будуть позначатися $U_0, V_0, W_0, X_0, Y_0, Z_0$ [9].

Для кожного із шарів у заданих позначеннях буде дописуватися індекс, який визначає номер шару. Товщина k -го шару позначається як h_k , при цьому $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$).

За допомогою введених геометричних гіпотез, поздовжні переміщення в шарах виражаються через п'ять функцій u, v, ψ_x, ψ_y, w з урахуванням модуля зсуву:

$$\begin{aligned} U_1 &= U + c \cdot \Psi_x - z \cdot \frac{\partial W}{\partial x}, & V_1 &= V + c \cdot \Psi_y - z \cdot \frac{\partial W}{\partial y} & (c \leq z \leq c + h_2), \\ U_2 &= U - c \cdot \Psi_x - z \cdot \frac{\partial W}{\partial x}, & V_2 &= V - c \cdot \Psi_y - z \cdot \frac{\partial W}{\partial y} & (-c - h_1 \leq z \leq -c), \\ U_3 &= U + z \cdot \Psi_x - z \cdot \frac{\partial W}{\partial x}, & V_3 &= V + z \cdot \Psi_y - z \cdot \frac{\partial W}{\partial y} & (-c \leq z \leq c), \end{aligned} \tag{3}$$

де z – відстань від розглянутого волокна до серединної площини наповнювача; $U \pm c \cdot \Psi_x, V \pm c \cdot \Psi_y$ – величини зсувів першого й другого несучих шарів за рахунок деформації наповнювача (знак «+» – перший шар, «-» – другий).

Внутрішні зусилля й моменти пластини мають вигляд:

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^k dz, & N_y &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_y^k dz, \\ Q_x &= \int_{h_3} \tau_{xz}^3 dz, & Q_y &= \int_{h_3} \tau_{yz}^3 dz, & Q_{xy} &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \tau_{xy}^k dz, \\ M_x &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^k z dz, & M_y &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_y^k z dz, & M_{xy} &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \tau_{xy}^k z dz, \end{aligned} \tag{4}$$

де σ_x^k, σ_y^k – компоненти тензора напружень у шарах пластини, причому інтеграли беруться по товщині k -го шару [7].

Рівняння рівноваги виводиться з варіаційного принципу Лагранжа [2] та записується у вигляді

$$\delta A + \delta W = 0, \tag{5}$$

де δA – варіація роботи зовнішніх поверхневих сил: $\delta A = \iint_S (t \delta u + p \delta v + (q + q_r) \delta w) dS$;

δW – варіація роботи внутрішніх напружень враховує роботу заповнювача в тангенціальному напрямку:

$$\delta W = \iint_S \left\{ \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_x^k \delta \varepsilon_{xx}^k + \sigma_y^k \delta \varepsilon_{yy}^k + 2\tau_{xy}^k \delta \varepsilon_{xy}^k) dz \right] + 2 \int_{h_3} (\tau_{xz}^3 \delta \varepsilon_{xz}^3 + \tau_{yz}^3 \delta \varepsilon_{yz}^3) dz \right\} dx dy;$$

$\delta u, \delta v, \delta w$ – варіації переміщень пластини загалом; $\delta \varepsilon$ – варіація деформації; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}$ – компоненти тензора деформацій.

Система рівнянь рівноваги прямокутної тришарової пластини на пружній основі в зусиллях матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} = -t, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} = -p, \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -(q + q_r). \end{cases} \quad (6)$$

Надалі в отримані рівняння рівноваги (6) підставляються внутрішні зусилля й моменти пластини (4). Зазначимо при цьому, що до виразів (4) входять значення переміщень і напружень для кожного шару, знайдені при початкових функціях у вигляді (2) згідно з [8].

Граничні умови задачі при $x = 0, a$ є такими:

$$u = v = \psi_x = \psi_y = w = 0. \quad (7)$$

Для задоволення умов (7) початкові функції з урахуванням модуля зсуву задаються у вигляді

$$\begin{aligned} U_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, & X_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, \\ V_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}, & Y_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}, \\ W_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, & Z_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, \\ \Psi_x^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P s_{nm} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, & \Psi_y^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P h_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}. \end{aligned} \quad (8)$$

Згідно з умовами задачі $D_{nm} = E_{nm} = F_{nm} = 0$.

Підстановка переміщень і кутів повороту (8) у вирази (3) утворює нові початкові функції для кожного шару.

Далі, за схемою роботи [10], знаходяться розв'язки для переміщень і напруг кожного шару. Ці розв'язки підставляються до виразів (4), що зображують внутрішні зусилля й моменти пластини, та інтегруються (процес інтегрування точних аналітичних розв'язків, які містять гіперболічні функції, є складною задачею, розв'язок якої покладено на ЕОМ) [12].

Поздовжнє й поперечне навантаження розкладаються у подвійні тригонометричні ряди.

Після підстановки до системи (6) виразів переміщень і напруг для всіх шарів проводиться процедура Гальоркіна [7].

Будується система алгебраїчних рівнянь, за якою знаходяться коефіцієнти A_{nm} , B_{nm} , C_{nm} , $P s_{nm}$, $P h_{nm}$.

Надалі, таким чином, підстановка знайдених початкових функцій у формули для переміщень і напружень кожного шару видає точний результат.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для більш детального аналізу отриманих у результаті здійсненого в роботі дослідження розрахунків проведемо обчислювальний експеримент для випадку, коли обиралися поздовжні навантаження $t = 0$, $p = 0$, а поперечне навантаження було розкладено в подвійний тригонометричний ряд вигляду [11]

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b},$$

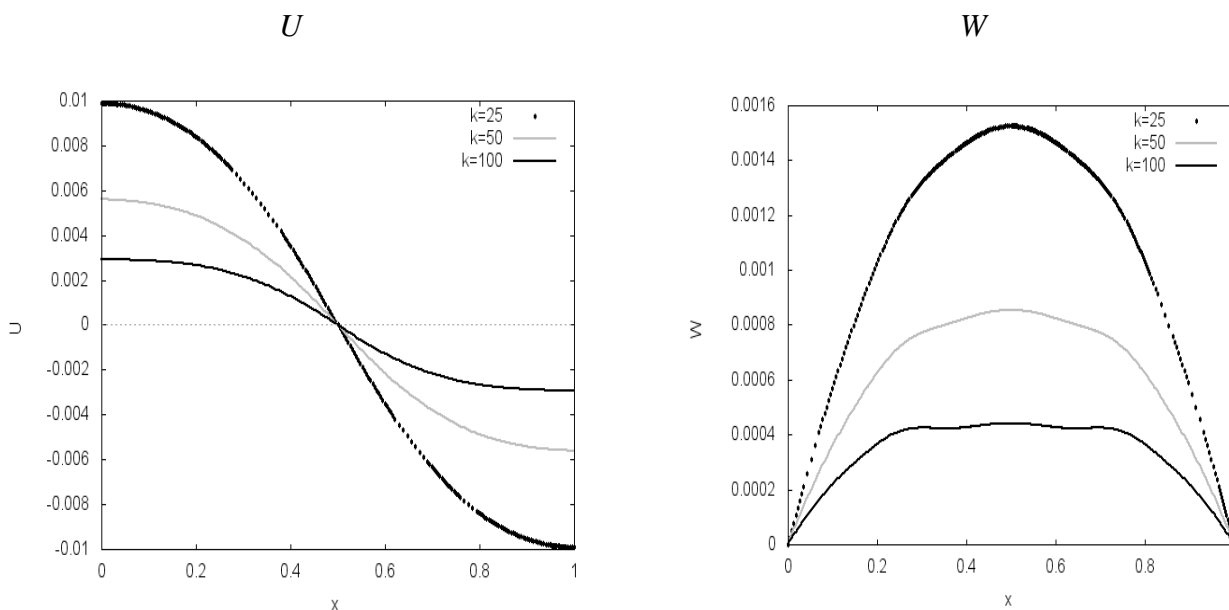
$$q_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy. \tag{9}$$

Для проведення дослідження та розв’язання поставленої задачі у розрахунках бралися двадцять членів рядів (9).

Числове дослідження збіжності рядів (9) показало, що для їх сумування у формулах методу початкових функцій В.З. Власова [2] достатньо утримувати 20 перших доданків. Додавання ще 70 доданків неістотно змінює результат, але впливає на швидкість аналітичного розв’язання на ЕОМ.

Розрахунки проводилися на розробленій інструментальній системі з обчислювальним ядром СКМ Махіта для відносних безрозмірних товщин шарів $h_1 = 0.02$, $h_2 = 0.04$, $c = 0.09$, при співвідношенні сторін пластини $a = 1$, $b = 1$, а також при інтенсивності поверхневого навантаження $q = 1$ МПа. Серединна поверхня третього шару є в даному прикладі нестисливим заповнювачем і не розглядається. Другий (нижній) шар лежить на Вінклеровій основі. Графіки для переміщень і напружень наведені нижче (рис. 3, 4).

Так, рис. 3 ілюструє зміну переміщень U , V та напружень σ_x , σ_z вздовж осі x ($y = 0,5$) серединної поверхні другого (нижнього) шару пластини. Криві відповідають різним величинам коефіцієнта жорсткості основи $k = 25, 50, 100$ МПа/м.



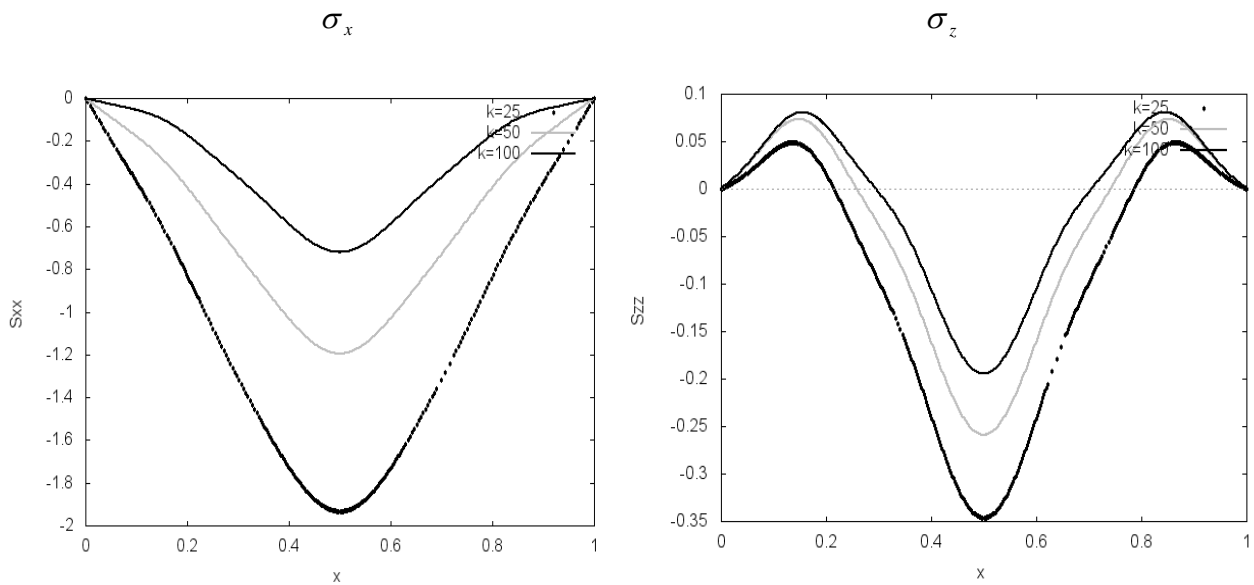
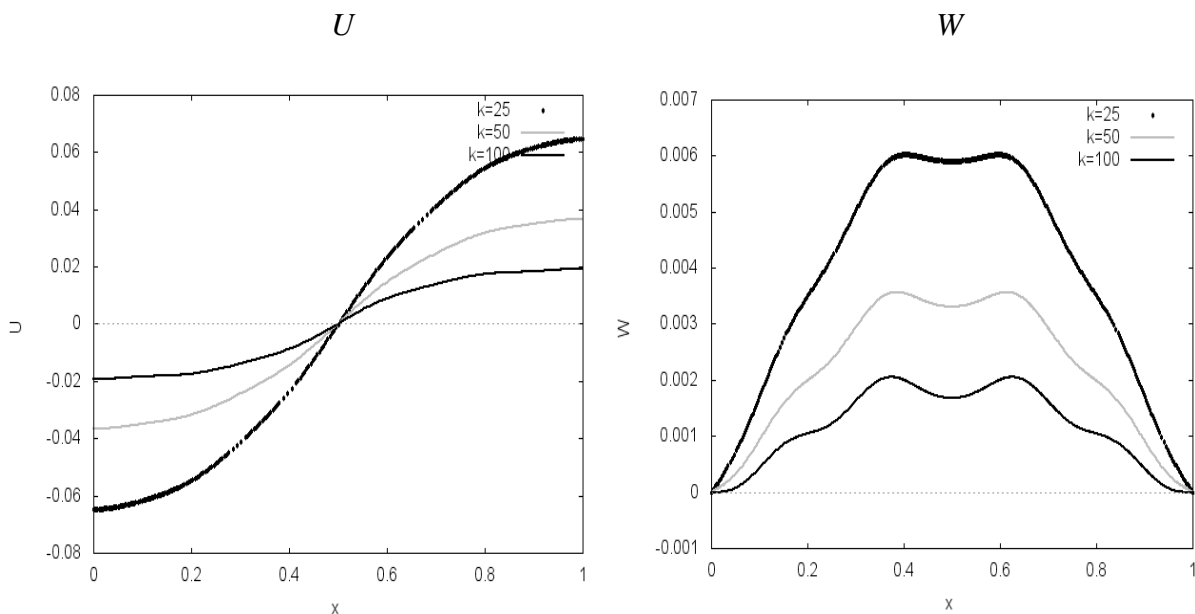


Рис. 3. Графіки зміни переміщень U, V та напружень σ_x, σ_z середньої поверхні другого шару пластини при $k = 25, 50, 100$ МПа/м

Аналізуючи наведені на рис. 3 графіки для переміщень і напружень, можна зробити відповідні висновки:

- екстремуми прогину W і напружень, а також перехід переміщення U спостерігається в центрі шару;
- при збільшенні жорсткості основи в два рази, а потім в 4 рази максимальні значення переміщень і напружень зменшуються приблизно кожен раз на 50%, що повністю відповідає класичній теорії пластин [7].

Аналогічно до рис. 3, на рис. 4 зображено зміну переміщень U, W та напружень σ_x, σ_z середньої поверхні першого (верхнього) шару пластини для $k = 25, 50, 100$ МПа/м.



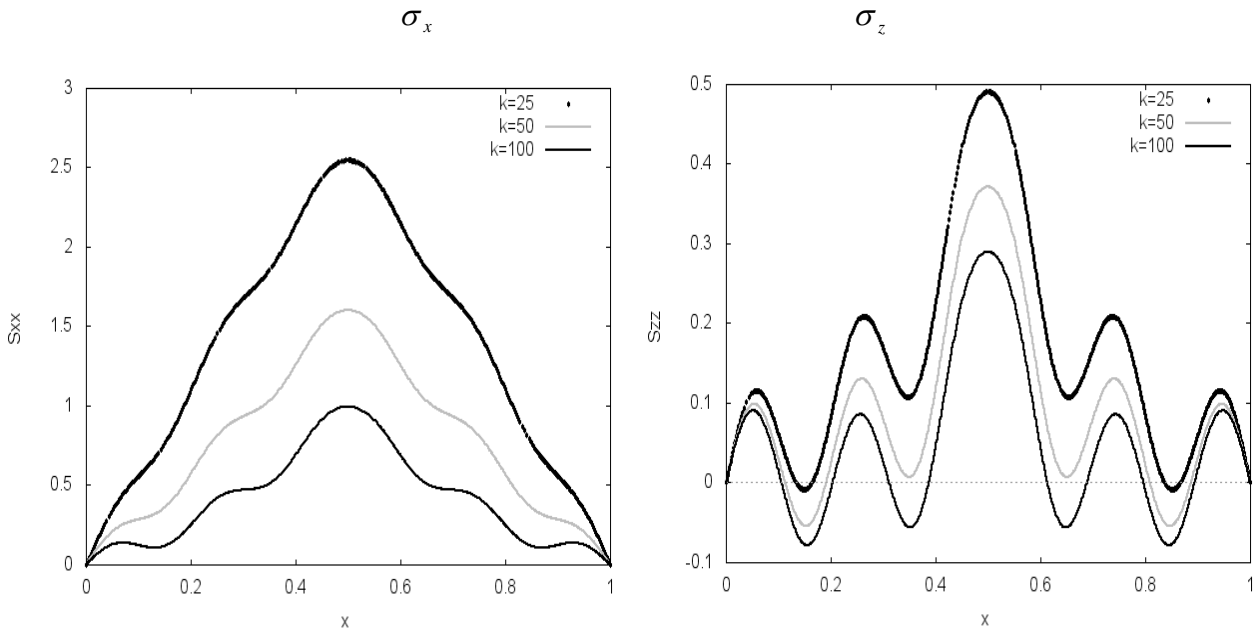


Рис 4. Графіки зміни переміщень U, V та напружень σ_x, σ_z серединної поверхні першого шару пластини при $k = 25, 50, 100$ МПа/м

На рис. 4 картина зміни переміщень і напружень є аналогічною до результатів, наведених на рис. 3: при зміні коефіцієнту жорсткості в два, а потім в чотири рази переміщення і напруження також зменшуються кожний раз на 50%.

Крім того, за рис. 3 та рис. 4 можна визначити, що криві переміщення U, W для кожного шару є схожими з видом кривих тривимірної статичної задачі теорії пружності [10]. Достовірність розв'язку підтверджується з одного боку точністю аналітичного методу початкових функцій В.З. Власова [2], застосовуваного для проведеного у роботі дослідження, а з іншого – збіжністю тригонометричних рядів (9).

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто вигин пружної прямокутної тришарової пластини із твердим наповнювачем, яка перебуває у стані спокою на пружній основі. В основі задачі при описі кінематики шарів лежать гіпотези Кірхгофа, при описі пружної основи – модель Вінклера, на контурі пластини врахована наявність твердої діафрагми, яка перешкоджає відносному зсуву шарів.

Для поставленої задачі на основі проведеного дослідження запропоновано новий комбінований прийом розв'язання тришарової задачі теорії пружності із застосуванням спрощуючої символіки В.З. Власова і варіаційного принципу Лагранжа. На основі розробленого прийому в роботі представлено схему його використання для розв'язання задач теорії пружності, яка дозволяє точніше проаналізувати напружений стан при зовнішньому силовому навантаженні.

Розрахунковим інструментом виступає розроблена авторами інструментальна система, яка відповідно виконує складні підготовчі операції виведення точного аналітичного розв'язку методом В.З. Власова, проводить інтегрування та, надалі, аналітично розв'язує задану користувачем систему алгебраїчних рівнянь. Завдяки такій інструментальній системі стало можливим розв'язання більш складних задач у тривимірній постановці, розв'язки яких раніше не могли бути отримані аналітичним шляхом. Крім того, програмні реалізації нових алгоритмів побудови аналітичних розв'язків дозволяють задіяти ЕОМ у нових напрямках математичного моделювання, де використовуються повні аналітичні виведення тих або інших формул.

Також в роботі наведено приклад застосування запропонованого прийому із використанням розробленої інструментальної системи для випадку, коли обиралися поздовжні навантаження $t = 0$, $p = 0$, а поперечне навантаження було розкладено в подвійний тригонометричний ряд. Для даного прикладу при різних величинах коефіцієнта жорсткості основи визначені зміни переміщень та напружень, аналіз яких дозволив отримати такі висновки: екстремуми прогину і напружень, а також перехід переміщення спостерігається в центрі шару; при збільшенні жорсткості основи в два рази, а потім в 4 рази максимальні значення переміщень і напружень зменшуються приблизно кожен раз на 50%, що повністю відповідає класичній теорії пластин; криві переміщення для кожного шару є схожими з видом кривих тривимірної статичної задачі теорії пружності. Достовірність розв'язку підтверджується точністю аналітичного методу початкових функцій В.З. Власова та збіжністю застосовуваних рядів.

Наостанок слід зазначити, що перелік задач, які розв'язуються за допомогою запропонованого у роботі прийому, не обмежується наведеним прикладом, а розповсюджується на досить велику область застосування математичного моделювання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аладьев В. З. Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования / В. З. Аладьев. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2006. – 792 с.
2. Власов В. З. Балки плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 491 с.
3. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
4. Феодосьев В. И. Сопrotивление материалов : Учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е издание, перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
5. Перельмутер А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – К. : Сталь, 2002. – 600 с.
6. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.
7. Горшков А. Г. Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Талаковский ; Учеб. для вузов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.
8. Толок В. А. Операторно-символьные ряды Власова В.З. в решении задач теории упругости в системе Maple / В. А. Толок, В. В. Шапар // Гідроакустичний журнал. – 2006. – № 3. – С. 66-74.
9. Галан Е. Е. Использование системы Maple при реализации метода начальных функций Власова / Е.Е. Галан, А.Г. Овский, В.А. Толок // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 1. – С. 16-26.
10. Овский А. Г. Моделирование схемы решения трехмерной задачи теории упругости в системе Maple / А. Г. Овский, В. О. Толок // Гідроакустичний журнал. – 2008. – № 3. – С. 88-97.
11. Овский А. Г. Преппроцессор решения статических двумерных и трехмерных задач теории упругости / А. Г. Овский, В. А. Толок // Информационные технологии моделирования и управления. – Воронеж : Воронежский государственный технический университет. Липецкий государственный университет. Бакинский государственный университет. – 2014. – №1 (85). – С. 47-58.
12. Овский А. Г. Моделирование плоских задач теории упругости толстых многослойных плит в системах компьютерной математики / А. Г. Овский // Вісник Запорізького національного університету : Фізико-математичні науки. – 2014. – №2. – С. 101-116.

REFERENCES

1. Aladev, V.Z. (2006), *Sistemyi kompyuternoy algeabrii: Maple: Iskustvo programmirovaniya* [Systems of computer algebra: Maple: programming Art], Laboratoriya bazovyih znaniy, Moskow, Russia.
2. Vlasov, V.Z. and Leontev, N.N. (1960), *Balki plityi i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams of a plate and a cover on the elastic foundation], Fizmatgiz, Moskow, Russia.

3. Polyanin, A.D. (2001), *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Manual on simple equations of mathematical physics], Fizmatlit, Moscow, Russia.
4. Feodosev, V.I. (1999), *Soprotivlenie materialov: Ucheb. dlya vuzov* [Strength of materials: Textbook for high schools], Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, Moscow, Russia.
5. Perelmuter, A.V. and Slivker, V.I. (2002), *Raschetnyie modeli sooruzheniy i vozmozhnost ih analiza* [Computational models of structures and the possibility of their analysis], Stal, Kiev, Ukraine.
6. Gorbunov-Posadov, M.I., Malikova, T.A. and Solomin, V.I. (1984), *Raschet konstruktsey na uprugom osnovanii* [Calculation of structures on elastic foundation], Stroyizdat, Moscow, Russia.
7. Gorshkov, A.G., Starovoytov, E.I. and Talakovskiy, D.V. (2002), *Teoriya uprugosti i plastichnosti* [The theory of elasticity and plasticity], Fizmatlit, Moscow, Russia.
8. Tolok, V.A. and Shapar, V.V. (2006), “V.Z. Vlasov’s functional-symbolical rows in a solution of problems of the theory of elasticity in system Maple”, *Hidroakustychnyy zhurnal*, no. 3, pp. 66-74.
9. Galan, E.E., Ovskiy, A.G. and Tolok, V.A. (2008), “Using the Maple system in the implementation of the method of initial functions Vlasov”, *Visnyk Zaporiz’koho natsional’noho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky*, no. 1, pp. 16-26.
10. Ovskiy, A.G. and Tolok, V.O. (2008), “Simulation of three-dimensional schemes for solving the problem of elasticity theory in Maple System”, *Hidroakustychnyy zhurnal*, no. 3, pp. 88-97.
11. Ovskiy, A.G. and Tolok, V.O. (2014), “Preprocessor solutions static two-dimensional and three-dimensional problems of elasticity theory” *Informatsionnyie tehnologii modelirovaniya i upravleniya*, no. 1 (85), pp. 47-58.
12. Ovskiy, A.G. (2014), “Simulation of plane problems of the theory of elasticity thick laminated panels in computer mathematics systems”, *Visnyk Zaporiz’koho natsional’noho universytetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fyzyko-matematychni nauky*, no. 2, pp. 101-116.

УДК 539.312

НЕСТАЦІОНАРНА ДЕФОРМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРІ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНИХ ПОВЕРХНЕВИХ НАВАНТАЖЕНЬ

¹Пожуєв В. І., ²Пожуєв А. В., ³Фасоляк А. В.

^{1,3}Запорізький національний технічний університет,
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, 69063, Україна

²Запорізька державна інженерна академія,
просп. Соборний, 226, Запоріжжя, 69000, Україна

²scorpio1@mail.ru, ³antonfasolyak@mail.ru

Розглядається тривимірний пружний півпростір з циліндричною порожниною, яка підкріплена оболонкою, причому вісь оболонки розташована перпендикулярно до площини, що обмежує півпростір. Розглянуто випадки, коли на поверхню оболонки діють вісесиметричні динамічні нормальні навантаження. Рух півпростору описувався динамічними рівняннями теорії пружності, а рух оболонки описувався рівняннями, які враховують поперечний зсув та інерцію обертання (оболонка типу Тимошенко). Задача розв’язана методом інтегральних синус та косинус перетворень Фур’є (за осью змінною), та Лапласа (за змінною часу), обертання яких проводилось чисельно. Отримані результати проілюстровано графічно.

Ключові слова: циліндрична оболонка, пружний півпростір, динамічне навантаження, вісесиметрична задача.