

УДК 004.942: 519.6

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ: НЕСТРУКТУРИРОВАННЫЕ СЕТКИ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент, Лисняк А. А., к. ф.-м. н., доцент, Борисовская Ю. А., аспирант,
Козлова О. С., аспирант, Снежкова Л. С., аспирант

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина*

s.choporoff@znu.edu.ua

В статье проведен обзор актуальных подходов и методов автоматической генерации неструктурированных дискретных моделей геометрических объектов. В частности, выполнен анализ методов генерации дискретных моделей с использованием треугольных или тетраэдрических, а также четырехугольных или шестигранных конечных элементов.

Ключевые слова: дискретная модель, сетка, конечный элемент, треугольный элемент, четырехугольный элемент, тетраэдрический элемент, шестигранный элемент.

МЕТОДИ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ: НЕСТРУКТУРОВАНІ СІТКИ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент, Лисняк А. О., к. ф.-м. н., доцент, Борисовська Ю. О., аспірант,
Козлова О. С., аспірант, Снежкова Л. С., аспірант

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна*

s.choporoff@znu.edu.ua

У статті проведено огляд актуальних підходів і методів автоматичної генерації неструктурованих дискретних моделей геометричних об'єктів. Зокрема, виконано аналіз методів генерації дискретних моделей з використанням трикутних або тетраедричних елементів, а також чотирикутних або шестигранных скінченних елементів.

Ключові слова: дискретна модель, сітка, скінченний елемент, трикутний елемент, чотирикутний елемент, тетраедричний елемент, шестигранный элемент.

DISCRETE MODELS GENERATION METHODS: UNSTRUCTURED GRIDS

Choporov S. V., PhD in Engineering, Lisnyak A. O., PhD in Physical and Mathematical Sciences,
Borysovska Y. O., postgraduate, Kozlova O. S., postgraduate, Sniezhkova L. S., postgraduate

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, Ukraine, 69600*

s.choporoff@znu.edu.au

Numerical simulations are now widely employed in various engineering fields. A lot of numerical simulations uses models based on partial differential equations (PDE). In the most frequently used numerical methods (e.g. the finite element method), a continuous problem is replaced by a discrete model. The discrete model approximates solution of the initial partial differential equations. Thus the first step of a discrete simulation involves mesh generation techniques.

A mesh (aka grid) is a set of points distributed over a calculation field. A mesh is a replacement of a continuous region by a finite union of simple element such as triangles, quadrilaterals, tetrahedra, hexahedra, etc. The mesh can be structured or unstructured. In the first case points neighborhood is similar to the neighborhood of elements in a matrix. In the second case points arbitrary connected into edges. In structured meshes edges are related to coordinate directions of a curvilinear coordinate system. In contrast, unstructured meshes are usually formed with no relation to coordinate directions. Structured grids usually consist of quadrilaterals or hexahedra. Unstructured meshes also widely use triangles and tetrahedrons.

Unstructured grids are usually formed using director indirect approaches. The direct approaches generate unstructured meshes directly insert nodes into an arbitrary shaped physical domain. In contrast, the indirect approaches convert elements of the initial mesh into new elements of some shape (e.g. triangles into quadrilaterals).

This article is a review of automatic unstructured meshing approaches. Particularly, the review includes following approaches: Delaunay mesh generation, an advanced front mesh generation, a background mesh generation, the Spatial Twist Continuum etc.

Key words: discrete model, mesh, grid, triangle, quadrilateral, tetrahedron, hexahedron.

ВВЕДЕНИЕ

Быстрое развитие компьютерных систем и средств автоматизации проектных работ позволило значительно повысить скорость численного решения проблем, связанных с проектированием. Несмотря на развитие бессеточных методов [1], в автоматизированном проектировании для численного анализа все еще наиболее применим метод конечных элементов (МКЭ) [2-4]. Благодаря гибкости и эффективности его используют для решения различных классов исследовательских задач (включая статику и динамику). Ключевым для МКЭ является требование построения дискретной декомпозиции геометрического объекта на множество элементов некоторой формы (дискретные модели).

Под дискретной моделью геометрического объекта (сеткой, эти термины используют синонимично) понимают пару множеств $M = (V, E)$, где V и E – множества вершин и связей между ними (дискретных элементов). По сути, дискретная модель геометрического объекта – это замена исходной непрерывной области конечным объединением простейших фигур: треугольников, четырехугольников, тетраэдров, шестигранников и т. п. В проектировании это определение можно дополнить вычислительным процессом, определенном на этой модели, по результатам работы которого вносятся оптимизации в M .

По размерности пространства дискретные модели делят на одномерные, двумерные и трехмерные. Также дискретные модели бывают структурированными и неструктурированными. В структурированных дискретных моделях ребра соответствуют координатным направлениям некоторой (в общем случае криволинейной) системы координат. Напротив, в неструктурированных дискретных моделях выбор ребер не имеет привязки координатным направлениям. В структурированных дискретных моделях наибольшее распространение получили четырехугольники и шестигранники, а в неструктурированных часто используют треугольники и тетраэдры (которые часто совместно называют «симплексами»).

В целом, наиболее популярными плоскими дискретными элементами являются треугольники и четырехугольники. Также в некоторых случаях (например, в задачах оптимизации топологии объектов, исследования глобальных изменений климата и т. п.) используют плоские шестиугольники [5-6]. Аналогично, в трехмерном пространстве наиболее популярными являются тетраэдры и шестигранники (как естественные аналоги, соответственно, треугольника и четырехугольника). Также используют пирамиды и треугольные призмы при генерации дискретных моделей движением, а в задачах, например, исследования сферических объектов рассматривают дискретные модели на базе икосаэдров [7-8].

Таким образом, целью данной работы является исследование актуального состояния проблемы автоматической генерации неструктурированных дискретных моделей. Анализ подходов и методов автоматической генерации структурированных дискретных моделей можно найти в работе [9].

НЕСТРУКТУРИРОВАННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

Методы построения неструктурированных дискретных моделей можно разделить на две подгруппы: 1) методы построения дискретных моделей на базе треугольников и тетраэдров (симплексы); 2) методы построения дискретных моделей на базе четырехугольников и шестигранников (топологические кубики). Симплексы получили широкое распространение ввиду их топологической гибкости (для них определены простые, хорошо формализованные процедуры вставки или удаления узла, что позволяет сравнительно просто сгущать или огрублять модели).

Однако, использование четырехугольников и шестигранников позволяет более точно моделировать проектируемый объект при использовании меньшего количества узлов. Функции формы линейного треугольного и тетраэдрического конечного элемента имеют вид:

$$N_{\delta}^i(x, y) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y, \quad i = \overline{0,2}, \quad (1)$$

$$N_{\Delta}^i(x, y, z) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}z, \quad i = \overline{0,3}, \quad (2)$$

где $N_{\delta}^i(x, y)$ – функция формы i -го узла треугольного конечного элемента; $N_{\Delta}^i(x, y, z)$ – функция формы i -го узла тетраэдрического конечного элемента; $\alpha_{i,j}$ – действительные коэффициенты, которые выбираются таким образом, чтобы функция формы i -го узла была равна единице в этом узле и нулю в остальных.

При этом функции формы линейных четырехугольных и шестигранных конечных элементов имеют вид

$$N_{\psi}^i(x, y) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}xy, \quad i \in \overline{0,3}, \quad (3)$$

$$N_{\Psi}(x, y, z) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,2}y + \alpha_{i,3}z + \alpha_{i,4}xy + \alpha_{i,5}xz + \alpha_{i,6}yz + \alpha_{i,7}xyz, \quad i \in \overline{0,7}, \quad (4)$$

где $N_{\psi}^i(x, y)$ – функция формы i -го узла четырехугольного конечного элемента; $N_{\Psi}(x, y, z)$ – функция формы i -го узла шестигранного конечного элемента; $\alpha_{i,j}$ – определены аналогично (1)-(2).

Наличие нелинейных членов в соотношениях (3) и (4) приводит к тому, что градиенты четырехугольного и шестигранного конечных элементов (в отличие от треугольного и тетраэдрического) не постоянны и изменяются вдоль одной из координатных плоскостей (координатных прямых на плоскости). Таким образом, применение четырехугольных и шестигранных конечных элементов является более предпочтительным в вычислительном плане (соответствующие вычислительные эксперименты можно найти в работе [10]).

При этом генерация дискретных моделей на базе четырехугольных или шестигранных элементов более сложная, чем на базе треугольников или тетраэдров. Это можно проиллюстрировать на следующем примере. Пусть дана структурированная сетка, в которую необходимо добавить узел, используя только локальные перестроения. Хотя это и возможно в плоском случае (рис. 1), но в трехмерном пространстве не представляется возможным [11]. Таким образом, техника, которая активно используется для симплексов в методах на базе критерия Делоне [12], – последовательная вставка новых узлов, практически не применима для четырехугольников и шестигранников.

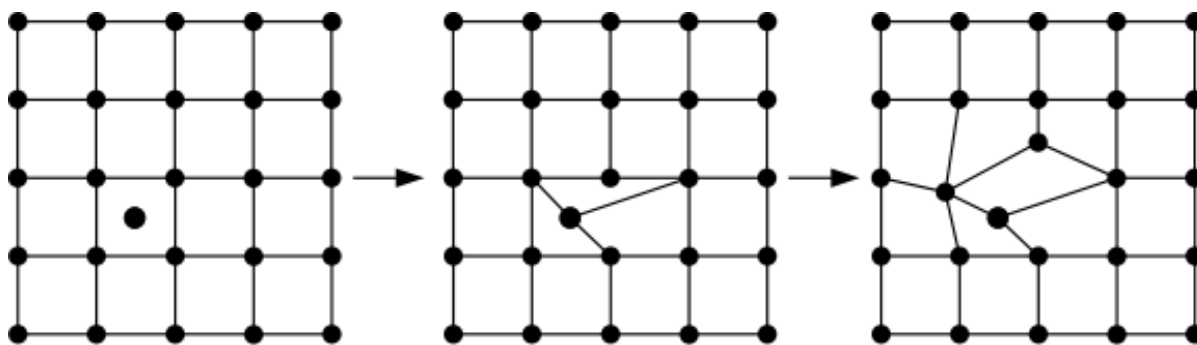


Рис. 1. Добавление узла к сетке четырехугольных элементов

МЕТОДЫ НА ГЕНЕРАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ТЕТРАЭДРОВ

Одной из наиболее распространенных на практике является проблема построения триангуляции исходной области, пригодной для использования в методах конечных или граничных элементов. Проблема состоит в нахождении множества треугольников,

покрывающих исходную область, форма и размеры которых удовлетворяют следующим требованиям: не должно быть треугольников с очень маленькими и очень большими углами, треугольники не должны быть меньше, чем это необходимо и не должны больше заданного размера. Методы на основе критерия Делоне [12] математически гарантируют, что такие требования могут быть удовлетворены. Такие же требования, как правило, предъявляются и к дискретным моделям на базе тетраэдров, для которых математическим обоснованием служит обобщение критерия Делоне на случай n -мерного пространства [13].

Сегодня достаточно хорошо развиты методы построения триангуляции Делоне [12] для исходного множества точек на плоскости, детальный анализ которых можно найти в работах А. В. Скворцова [14-16], а также Р. Су и Р. Л. С. Драйсдейла [17]. Представлены от простейших инкрементальных алгоритмов, которые добавляют новые узлы в модель один за другим, до наиболее быстрых, основанных на принципе «разделяй и властвуй» [17]. Они сравнительно просто обобщаются на трехмерный случай [18-19] (достаточно лишь изменить процедуру проверки условия Делоне). Эти методы получили свое применение в задачах компьютерной графики и геоинформационных системах. Однако, в задачах проектирования требуется аппроксимация границ объекта ребрами и гранями элементов, что не учитывается в этих методах.

Также разработаны способы и методы построения триангуляции Делоне для областей, представленных многоугольниками или планарными графами. В этой группе методов наибольшее распространение получили модификации методов Рапперта (J. Ruppert) [20] и L. Chew [21], которые, по сути, являются способами повышения качества сетки, сгенерированной для исходной области на базе критерия Делоне. Их обобщением для трехмерного пространства являются методы построения покрытия тетраэдрами области, ограниченной плоскими гранями [22-23]. В основе таких методов, как правило, итерационная вставка нового узла для локального улучшения геометрических характеристик дискретной модели. Новый узел может добавляться в дискретную модель для устранения элемента с несоответствующим качеством в центр описанной окружности (рис. 2) для треугольника [24] (описанной сферы для тетраэдра), или в его центр масс [25]. Также в некоторых работах [26-27] используют разбиение Воронова в качестве промежуточного. Такие техники вставки нового узла не гарантируют, что все ребра и грани будут аппроксимированы, соответственно, ребрами или гранями элементов. Для решения этой проблемы используют техники вставки новых узлов в середины недостающих ребер или граней [20], которые иногда комбинируют с процедурой зеркального отображения (flip) [28]. Однако, в задачах проектирования как плоских, так и трехмерных технических объектов сложной формы получение представления границ объектов в виде планарных графов или плоских граней является весьма сложной и нетривиальной проблемой, что затрудняет практическое использование таких методов.

Методы подвижного фронта основаны на идее послойного заполнения исходной области элементами. Исходной информацией для них является дискретная модель границы области, которая образует начальный фронт. Движением фронта формируют слои элементов до тех пор, пока исходная область не будет заполнена полностью (рис. 3). Фронтальные методы предложены для генерации моделей как плоских (на базе треугольников) [29-31], так и трехмерных (на базе тетраэдров) [32-33] объектов. В некоторых работах комбинируют использование метода на основе критерия Делоне с подвижным фронтом [34-35]. Фронтальные методы весьма универсальны, однако, необходимо отметить их высокую ресурсоемкость и относительно низкую скорость работы. Их узким местом является проблема самопересечения фронтов. Также получение качественного начального фронта (особенно в трехмерном случае) является самостоятельной сложной задачей.

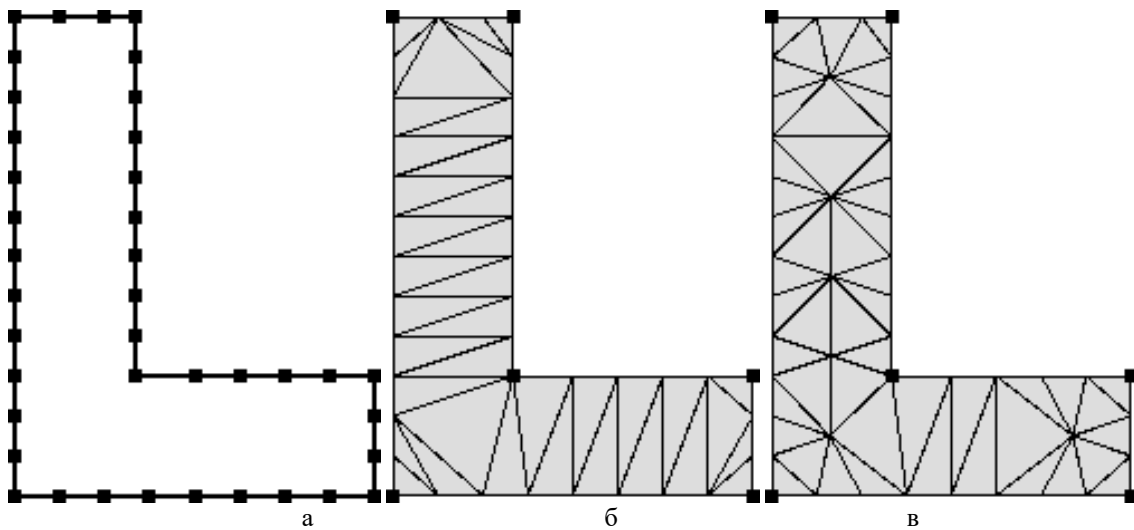


Рис. 2. Триангуляция Делоне L-области: а – исходный планарный граф; б – триангуляция Делоне; (в) – оптимизация минимального угла и площади элемента методом вставки в центр описанной окружности

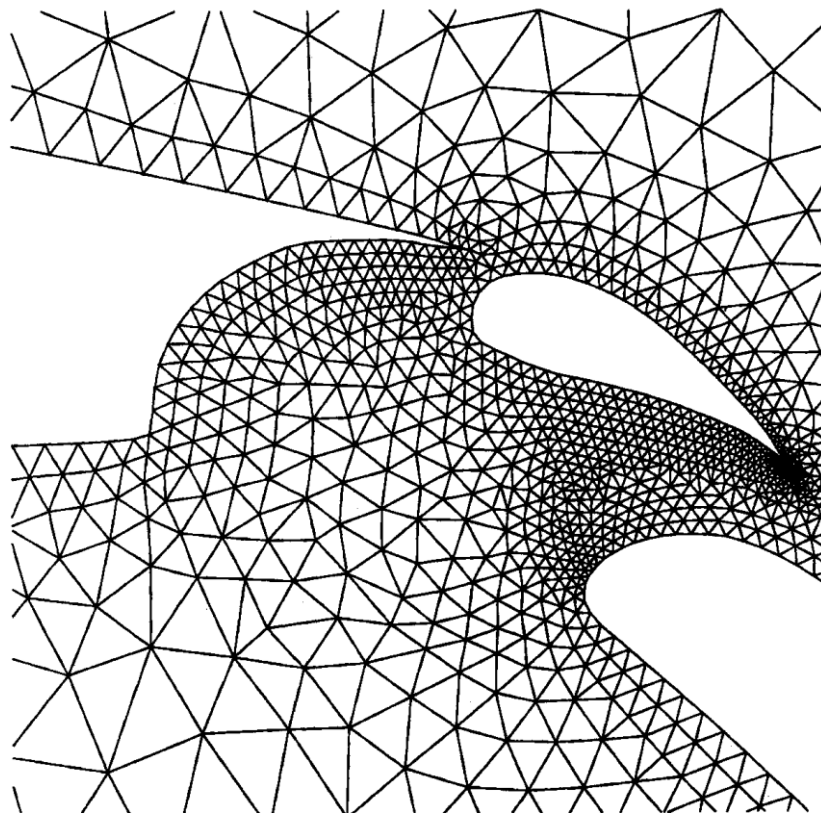


Рис. 3. Пример части фронтальной триангуляции области [30]

Другая группа методов генерации дискретных моделей базируется на использовании фоновой сетки с адаптацией приграничных узлов к границам области. Фоновая сетка может быть относительно просто получена (например, структурированная сетка), при этом накладывається единственное требование: размер ячеек на границе должен быть меньше минимальной геометрической особенности области. На этапе адаптации здесь распространено использование граничной коррекции узлов (пример применения этого подхода представлен на рис. 4). Впервые идея использования фоновой сетки на базе квадратных элементов для равномерной триангуляции двумерной области, ограниченной планарным графом, была представлена в работе [36] (в работе доказано, что минимальный угол в треугольниках будет не менее 13° , если в исходном графе нет углов острее 13°). Для

построения неравномерных дискретных моделей используются адаптивные фоновые сетки на базе метода Quadtree [234, 284-285, 286]. В [37] показано, что при использовании адаптивной фоновой сетки углы в элементах (исключая острые углы ребра на границе) будут больше $18,4^\circ$. Этот результат был улучшен в работе [38], где в предположении, что в границе области, представленной планарным графом, отсутствуют острые углы, показано, что в итоговой триангуляции все углы будут находиться в пределах от 30° до 90° . Данный подход относительно просто обобщается на случай трехмерного пространства [39-40]. Стоит отметить, что указанные выше работы используют в качестве входных данных дискретную модель границы объекта, задача получения которой является весьма сложной, также существует возможность получения «плохих» или вырожденных элементов около границы области.

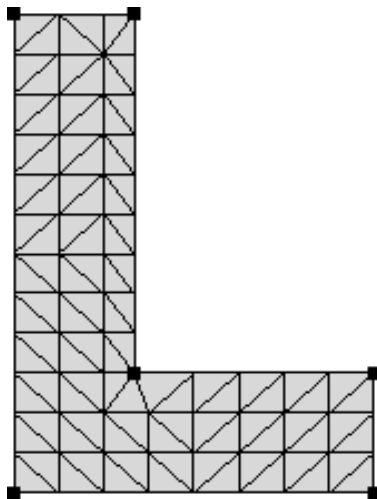


Рис. 4. Триангуляция L-области методом фоновой сетки с использованием техники граничной коррекции

МЕТОДЫ НА ГЕНЕРАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛНИТЕЛЕМ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ И ШЕСТИГРАННИКОВ

На сегодня разработаны как прямые, так и непрямые фронтальные методы генерации неструктурированных сеток четырехугольных и шестигранных элементов.

Прямые фронтальные методы генерации неструктурированных сеток четырехугольных элементов [41-43] строят сетку высокого качества, адаптированную к границам и с малым количеством нерегулярных элементов. Их основная идея заключается в использовании начальной дискретизации границы и последующем послойном заполнении исходной области конечными элементами (например, рис. 5). Прямые фронтальные методы также обобщены на случай трехмерного пространства для получения неструктурированных сеток шестигранных элементов. В таком случае область исчерпывают пласт за пластом, формируя, таким образом, и дискретизацию фронта в виде четырехугольных граней, и дискретизацию внутренней части области [44-45]. Основными недостатками прямых фронтальных методов, приводящими к сложности их практической реализации и большим вычислительным затратам, являются: 1) трудоемкость поиска вырожденных элементов при пересечении двух фронтов; 2) сложность предотвращения возникновения пустот (участков области, незаполненных элементами) [11]. Также получение качественной начальной дискретизации границ объекта является весьма сложной (особенно в трехмерном случае) самостоятельной задачей.

Непрямые фронтальные методы используют предварительно построенную сетку треугольников или тетраэдров. Их основная идея – это послойная трансформация треугольников в четырехугольники [46-47] или тетраэдров в шестигранники [48-49]. В отличие от прямых фронтальных для них отсутствует проблема пересекающихся фронтов, они защищены от появления пустот внутри контура, но, зачастую, они строят сетку топологически менее качественную, чем лучшие прямые фронтальные методы. Среди

непрямых фронтальных методов можно выделить метод Q-Morph, предложенный Стивеном Оуэном [46] и его модификацию, разработанную А. В. Сковпенем [47], которая строит сетку, близкую к оптимальной, и использует трансформацию треугольников, что делает его надежным и быстрым. В результате обобщения метода Q-Morph на трехмерный случай предложен метод H-Morph [48-49]. Однако, недостатком данного подхода является необходимость наличия качественной предварительной дискретизации на базе треугольников или тетраэдров, получение которой является отдельной трудоемкой задачей.

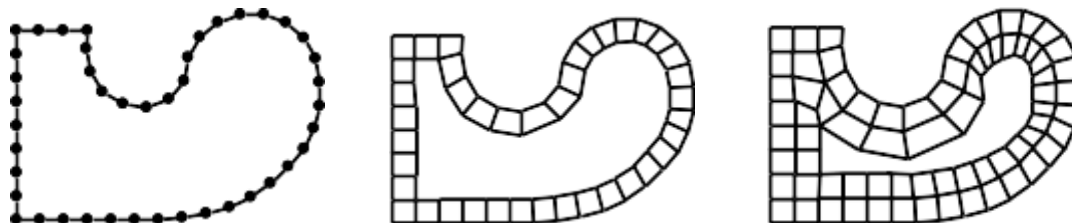


Рис. 5. Этапы работы фронтального метода

Техника пространственного изгиба континуума (the Spatial Twist Continuum), представленная в работах [50-52], позволяет автоматически или полуавтоматически генерировать сетки как четырехугольных, так и шестигранных элементов. В основу техники генерации сеток положено STC-представление сетки, которое является двойственным для сетки четырехугольников (рис. 6) или шестигранников (рис. 7) [51-52], что делает его пригодным для анализа качества сеток. STC-представление, по сути, является аналогом диаграмм Воронова. Оно строится для дискретной модели границы объекта и затем конвертируется в дискретную модель на базе четырехугольников или шестигранников. Основным недостатком алгоритмов, использующих STC-представление, является вычислительная сложность: в худшем случае они становятся алгоритмически полными. В работах [53-54] предлагается метод малых боковых смещений (Whisker Weaving), который строит STC-представление с использованием подвижного фронта. Недостатки такого подхода аналогичны недостаткам прямых фронтальных методов. В целом, необходимо отметить, что результатом построения двойственного представления в трехмерном случае не всегда является валидная сетка шестигранных элементов. Также достаточно трудно реализовать устойчивую версию алгоритма для метода на основе STC-представления.

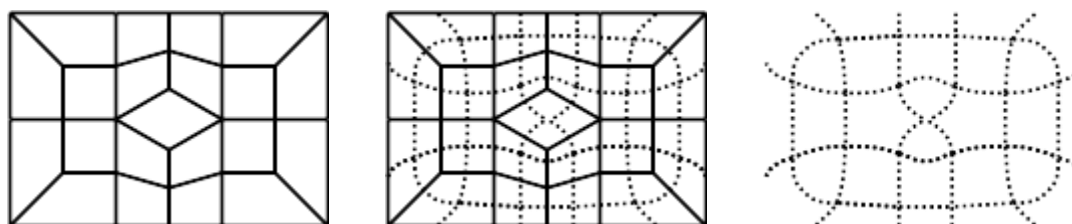


Рис. 6. Сетка четырехугольных элементов и ее STC-представление

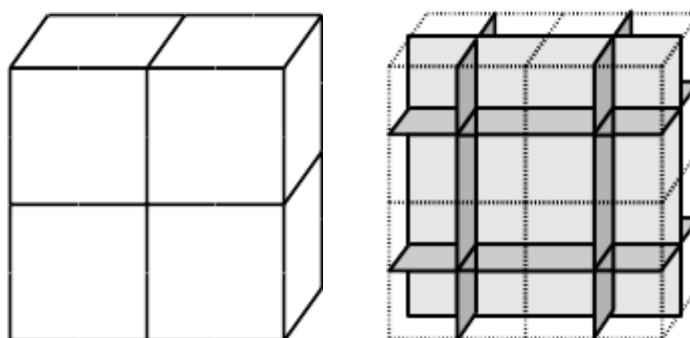


Рис. 7. STC-представление сетки шестигранных элементов

Методы суперпозиции основаны на использовании некоторой базовой стратегии при построении дискретных моделей на базе четырехугольников или шестигранников.

Алгоритмы данного класса, как правило, в качестве исходных данных используют фоновую сетку, которая более или менее просто может быть построена и покрывает область вокруг геометрического объекта. Затем исходное разбиение адаптируют к его границам (например, рис. 8). Необходимо отметить, что ключевым шагом данной группы методов является сложность генерации сетки высокого качества около границы объекта (граница должна быть аппроксимирована ребрами элементов, которые должны быть невырожденными), а их практическая реализация достаточно проблематичная. Существует два основных подхода к адаптации исходной сетки к границе объекта: сеточный [55-57] и проекционный [58-59]. Первый подход основан на идее поиска точек, расположенных на границе области, соответствующих граничным точкам начальной сетки, и последующем формировании слоя приграничных элементов с помощью техники изоморфизма [55]. Второй подход основан на перемещении близлежащих узлов исходной сетки на границу объекта. Также методы на основе суперпозиции могут быть использованы для адаптации неравномерной начальной сетки. Для этого, как и в методах фоновой сетки для симплексов, используют октодеревья. Общей особенностью методов на основе суперпозиции является генерация элементов приблизительно одинакового размера. При этом в результате удовлетворения требования, касающегося соотношения размеров ячейки фоновой сетки и наименьшей геометрической особенности, результирующая дискретная модель может быть избыточно густой.

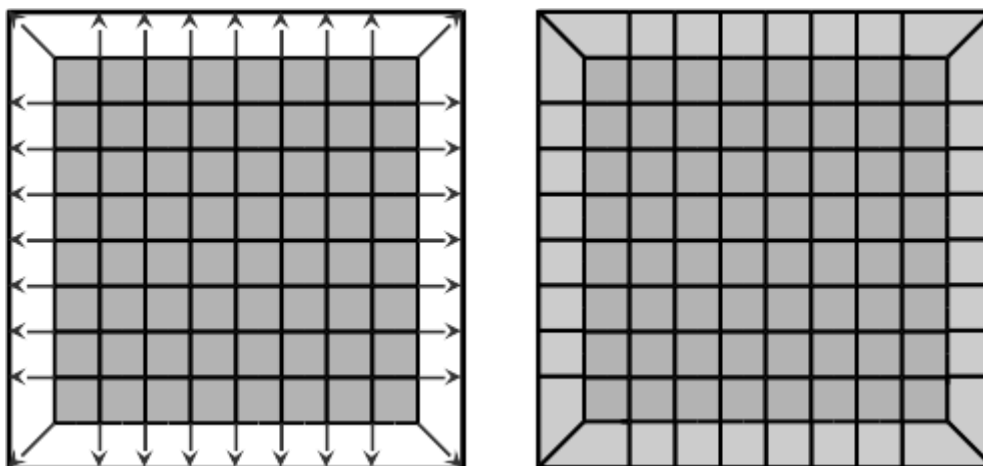


Рис. 8. Дискретизация квадратной области с использованием фоновой сетки

ВЫВОДЫ

Таким образом, проблема генерации дискретных моделей сложных геометрических объектов является актуальной и сложной. Наиболее активно разрабатываются методы генерации дискретных моделей с использованием треугольников (тетраэдров) и четырехугольников (шестигранников). Первые – двумерные и трехмерные методы триангуляции – наиболее развиты по причине топологической гибкости используемых элементов (треугольников или тетраэдров). Вторые – способы генерации дискретных моделей с использованием четырехугольников или шестигранников (топологических кубиков), как правило, более сложные и требуют значительно больших вычислительных ресурсов для обеспечения необходимого качества. В обеих группах представлены методы на базе фронтальных подходов (прямых и непрямых) и фоновых сеток. Однако, весьма популярная при триангуляции техника последовательной вставки узлов для улучшения качества модели практически не применима для четырехугольников и шестигранников. Перспективные исследования в данной области направлены на теоретическое обеспечение генерации дискретной модели с необходимым качеством, генерацию адаптивных сеток, а также разрабатываются методики, основанные на задействовании технологий параллельных вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu G. R. Mesh free methods: Moving Beyond the Finite Element Method / G. R. Liu. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. : CRC Press, 2003. – 693 P.
2. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Seventh Edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu. – London : Butterworth-Heinemann, 2013. – 756 P.
3. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Seventh Edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, D. D. Fox. – London : Butterworth-Heinemann, 2013. – 672 P.
4. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method for Fluid Dynamics, Seventh Edition / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Nithiarasu. – London : Butterworth-Heinemann, 2013. – 584 P.
5. Langelaar M. The use of convex uniform honeycomb tessellations in structural topology optimization / M. Langelaar // The 7th world congress on structural and multidisciplinary optimization : World Congress, Seoul, South Korea, 21-25 May 2007 : proceedings. – Seoul, 2007.
6. Saxena A. Combined Gradient-Stochastic Optimization with Negative Circular Masks for Large Deformation Topologies // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2013. – Volume 93, Issue 6. – P. 635-663. – DOI : 10.1002/nme.4401.
7. Heikes R. Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part I: Basic design and results of tests / R. Heikes, D. Randall // Monthly Weather Review. – 1995. – Volume 123. – P. 1862-1880.
8. Heikes R. Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part II: A detailed description of the grid and an analysis of numerical accuracy / R. Heikes, D. Randall // Monthly Weather Review. – 1995. – Volume 123. – P. 1881-1887.
9. Чопоров С. В. Методы построения дискретных моделей: структурированные и блочно-структурированные сетки / С. В. Чопоров, С. И. Гоменюк, Х. Х. Алатамнех, К. С. Оспищев // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 272-284.
10. Чопоров С. В. Сравнительный анализ треугольных и четырехугольных конечных элементов / С. В. Чопоров, С. И. Гоменюк, А. А. Лисняк // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2013. – № 2(47). – С. 382-386.
11. Thompson J. F. Handbook of grid generation / J. F. Thompson, Bh. Sony, N. Weatherill. – New York : CRC Press, 1999. – 1136 p.
12. Делоне Б. Н. О пустой сфере / Б. Н. Делоне // Известия АН СССР. ОМОН. – 1934. – № 4. – С. 793-800.
13. Watson D. F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes / D. F. Watson // The Computer Journal. – 1981. – Volume 24, Issue 2. – P. 167-172.
14. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и её применение / А. В. Скворцов. – Томск : Издательство Томского университета, 2002. – 128 с.
15. Скворцов А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – № 3. – С. 14-39.
16. Скворцов А. В. Алгоритмы построения и анализа триангуляции / А. В. Скворцов, Н. С. Мирза. – Томск : Издательство Томского университета, 2006. – 168 с.
17. Su P. A comparison of sequential Delaunay triangulation algorithms / P. Su, R. L. S. Drysdale // Computational Geometry. – 1997. – Volume 7, Issues 5-6. – P. 361-385.
18. Joe B. Construction of k-Dimensional Delaunay Triangulations using Local Transformations / B. Joe // SIAM Journal on Scientific Computing. – 1993. – Volume 14, Issue 6. – P. 1415-1436.
19. Joe B. Construction of Three-Dimensional Improved-Quality Triangulations Using Local Transformations / B. Joe // SIAM Journal on Scientific Computing. – 1995. – Volume 16, Issue 6. – P. 1192-1307.
20. Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation / J. Ruppert // Journal of Algorithms. – 1995. – Volume 18, Issue 3. – P. 548-585.
21. Chew L. P. Constrained Delaunay Triangulations / L. P. Chew // Algorithmica. – 1989. – Volume 4, Issue 1. – P. 97-108.

22. Cohel-Steiner D. Conforming Delaunay Triangulations in 3D / D. Cohen-Steiner, É. C. de Verdière, M. Yvinec // *Computational Geometry: Theory and Applications*. – 2004. – Volume 28. – P. 217-233.
23. Jamin C. CGALmesh: a Generic Framework for Delaunay Mesh Generation / C. Jamin, P. Alliez, M. Yvinec, J.-D. Boissonnat // *ACM Transactions on Mathematical Software*. – 2014. – Volume 1, No 1. – P. 1-26.
24. Frey W. H. Selective Refinement: A New Strategy for Automatic Node Placement in Graded Triangular Meshes / W. H. Frey // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1987. – Volume 24, Issue 11. – P. 2183-2200. – DOI : 10.1002/nme.1620241111.
25. Nigel P. W. Delaunay Triangulation in Computational Fluid Dynamics / P. W. Nigel // *Computers and Mathematics with Applications*. – 1992. – Volume 24, No 5/6. – P. 129-150.
26. Du Q. Tetrahedral mesh generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations / Q. Du, D. Wang // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2003. – Volume 56, Issue 9. – P. 1355-1373. – DOI : 10.1002/nme.616.
27. Du Q. Recent progress in robust and quality Delaunay mesh generation / Q. Du, D. Wang // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2006. – Volume 195, Issues 1-2. – P. 8-23.
28. George P. L. Automatic Mesh Generator with Specified Boundary / P. L. George, F. Hecht, E. Saltel // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1991. – Volume 92, Issue 3. – P. 269-288.
29. Mavriplis D. J. An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness / D. J. Mavriplis // *Journal of Computational Physics*. – 1995. – Volume 117, Issue 1. – P. 90-101.
30. Müller J.-D. A Frontal Approach for Internal Node Generation in Delaunay Triangulations / J.-D. Müller, P. L. Poe, H. Deconinck // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 1993. – Volume 17. – P. 241-255.
31. Silva C. T. Greedy Cuts: An Advancing Front Terrain Triangulation Algorithm / C. T. Silva, J. S. B. Mitchell // *The 6th ACM International Symposium on Advances in Geographic Information Systems : International Conference, Washington, USA, 2-7 November 1998 : proceedings*. – Washington : ACM, 1998. – P. 137-144. – DOI : 10.1145/288692.288717
32. Frey P. Delaunay tetrahedralization using an advancing-front approach / P. Frey, H. Borouchaki, P.-L. Geouge // *The 5th International Meshing Roundtable : International Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, October 10-11, 1996 : proceedings*. – Sandia : Sandia National Laboratories, 1996. – P. 31-48.
33. Frey P. 3D Delaunay mesh generation coupled with an advancing-front approach / P. Frey, H. Borouchaki, P.-L. Geouge // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 1998. – Volume 157, Issue 1. – P. 115-131.
34. El-Hamalawi A. A 2D combined advancing front-Delaunay mesh generation scheme / A. El-Hamalawi // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2004. – Volume 40, No 9-10. – P. 967-989.
35. Kucwaj J. An Algorithm of Combining of Advancing Front and Delaunay Triangulation to 3-D Domain Tessellation / J. Kucwaj, B. Borowik // *Annales UMCS Informatica AI IX*. – 2009. – No 1. – P. 15-26.
36. Baker B. S. Nonobtuse Triangulation of Polygons / B. S. Baker, E. Grosse, C. S. Rafferty // *Discrete and Computational Geometry*. – 1988. – Volume 3, Issue 2. – P. 147-168.
37. Bern M. Provably good mesh generation / M. Bern, D. Eppstein, J. Gilbert // *Journal of Computer and System Sciences*. – 1994. – Volume 48, Issue 3. – P. 384-409.
38. Neugebauer F. Improved Mesh Generation: Not Simple but Good / F. Neugebauer, R. Diekmann // *The 5th International Meshing Roundtable : International Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, October 10-11, 1996 : proceedings*. – Sandia : Sandia National Laboratories, 1996. – P. 257-272.
39. Mitchell S. A. Quality Mesh Generation in Three Dimensions / S. A. Mitchell, S. A. Vavasis // *The Eighth Annual Symposium on Computational Geometry : International Conference, Berlin, Germany, June 10-12, 1992 : proceedings*. – New York : Cornell University, 1992. – P. 92-104.
40. Mitchell S. A. Quality Mesh Generation in Higher Dimensions / S. A. Mitchell, S. A. Vavasis // *SIAM Journal on Computing*. – 2000. – Volume 29, Issue 4. – P. 1334-1370.

41. Blacker T. D. Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation / T. D. Blacker, M. B. Stephenson // International Journal For Numerical Methods in Engineering. – 1991. – Volume 32, Issue 4. – P. 811-847. – DOI : 10.1002/nme.1620320410.
42. Park C. A new automated scheme of quadrilateral mesh generation for randomly distributed line constraints / C. Park, J.-S. Noh, I.-S. Jang, J. M. Kang // Computer-Aided Design. – 2007. – Volume 39. – P. 258-267.
43. Zhao Y. A modified paving algorithm for quadrilateral mesh generation / Y. Zhao, B. Yu // Kung Cheng Je Wu Li Hsueh Pao/Journal of Engineering Thermophysics. – 2013. – Volume 34, Issue 4. – P. 728-732.
44. Blacker T. D. Seams and Wedges in Plastering: A 3D Hexahedral Mesh Generation Algorithm / T. D. Blacker, R. J. Meyers // Engineering with Computers. – 1993. – Volume 9, Issue 2. – P. 83-93.
45. Staten M. L. Unconstrained plastering – Hexahedral mesh generation via advancing-front geometry decomposition / M. L. Staten, S. J. Owen, T. D. Blacker, M. Supazzini, K. Shimada // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2010. – Volume 81, Issue 2. – P. 135-171. – DOI : 10.1002/nme.2679.
46. Owen S. J. Q-Morph: An Indirect Approach to Advancing Front Quad Meshing / S. J. Owen, M. L. Staten, S. A. Canann, S. Saigal // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1999. – Volume 44, Issue 9. – P. 1317-1340. – DOI : 10.1002/(SICI)1097-0207(19990330)44:9<1317::AID-NME532>3.0.CO;2-N.
47. Сквонь А. В. Усовершенствованный алгоритм построения нерегулярных четырехугольных сеток / А. В. Сквонь // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 8. – С. 1506-1528.
48. Owen S. J. H-Morph: An Indirect Approach to Advancing Front Hex Meshing / S. J. Owen, S. Saigal // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – Volume 49, Issue 1-2. – P. 289-312. – DOI : 10.1002/1097-0207(20000910/20)49:1/2<289::AID-NME934>3.0.CO;2-L.
49. Owen S. J. Hex-domain mesh generation using 3D constrained triangulation / S. J. Owen // Computer Aided Design. – 2001. – Volume 33, Issue 3. – P. 211-220.
50. Blacker T. D. Forming and Resolving Wedges in the Spatial Twist Continuum / T. D. Blacker, S. A. Mitchell, T. J. Tautges, P. Murdoch, S. Benzley // Engineering with Computers. – 1997. – Volume 13, Issue 1. – P. 35-47.
51. Murdoch P. The Spatial Twist Continuum / P. Murdoch, S. E. Benzley // The 4th International Meshing Roundtable : International Conference, Albuquerque, New Mexico, U.S.A., October 16-17, 1995 : proceedings. – Sandia : Sandia National Laboratories, 1995. – P. 243-251.
52. Murdoch P. The spatial twist continuum: A connectivity based method for representing all-hexahedral finite element meshes / P. Murdoch, S. E. Benzley, T. D. Blacker, S. A. Mitchell // Finite Elements in Analysis and Design. – 1997. – Volume 28, Issue 2. – P. 137-149.
53. Tautges T. J. Progress Report on the Whisker Weaving All-hexahedral Meshing Algorithm / T. J. Tautges, S. A. Mitchell // Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations : The 5th International Conference, Mississippi State University, April 1-5, 1996 : proceedings. – Mississippi : Mississippi State University, 1996. – P. 659-670.
54. Tautges T. J. The Whisker Weaving Algorithm: a connectivity based method for constructing all-hexahedral finite element meshes / T. J. Tautges, T. D. Blacker, S. A. Mitchell // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1996. – Volume 39, Issue 19. – P. 3327-3350. – DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19961015)39:19<3327::AID-NME2>3.0.CO;2-H.
55. Schneiders R. A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders // Engineering with Computers. – 1996. – Volume 12, Issue 3. – P. 168-177.
56. Schneiders R. Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders, R. Schindler, F. Weiler // The 5th International Meshing Roundtable : International Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A., October 10-11, 1996 : proceedings. – Sandia : Sandia National Laboratories, 1996. – P. 205-216.
57. Schneiders R. Octree-Based Hexahedral Mesh Generation / R. Schneiders // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 2000. – Volume 10, Issue 4. – P. 383-398.

58. Ives D. Geometric grid generation: surface modeling, grid generation, and related issues in computational fluid dynamic (CFD) solutions / D. Ives // Proceedings of NASA Conference, OH, NASA CP-3291. – Cleveland, 1995. – P. 535-546.
59. Taghavi R. Automatic, parallel and fault tolerant mesh generation from CAD / R. Taghavi // Engineering with Computers. – 1996. – Volume 12, Issue 3. – P. 178-185.

REFERENCES

1. Liu, G.R. (2003), *Mesh free methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.
2. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z. (2013), *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Seventh Edition*, Butterworth-Heinemann, London.
3. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Fox, D.D. (2013), *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Seventh Edition*, Butterworth-Heinemann, London.
4. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Nithiarasu, P. (2013), *The Finite Element Method for Fluid Dynamics, Seventh Edition*, Butterworth-Heinemann London.
5. Langelaar, M. (2007), “The use of convex uniform honeycomb tessellations in structural topology optimization”, “*Proceedings of the 7th world congress on structural and multidisciplinary optimization*”, World Congress, Seoul, South Korea, 21-25 May 2007.
6. Saxena, A. (2013), “Combined Gradient-Stochastic Optimization with Negative Circular Masks for Large Deformation Topologies”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 93, issue 6, pp. 635-663.
7. Heikes, R. and Randall, D. (1995), “Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part I: Basic design and results of tests”, *Monthly Weather Review*, vol. 123, pp. 1862-1880.
8. Heikes, R. and Randall, D. (1995), “Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part II: A detailed description of the grid and an analysis of numerical accuracy”, *Monthly Weather Review*, vol. 123, pp. 1881-1887.
9. Choporov, S.V., Gomenyuk, S.I., Alatanekh, Kh.Kh. and Ospishchev, K.S. (2016), “Metody postroeniya diskretnykh modeley: strukturirovannye i blochno-strukturirovannye setki” [Methods of construction of discrete models: structured and block-structured grids], *Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu: Zbirnyk naukovykh statey. Fizyko-matematichni nauky*, no. 1, pp. 272-284.
10. Choporov, S.V., Gomenyuk, S.I. and Lisnyak, A.A. (2013), “Sravnitel'nyy analiz treugol'nykh i chetyrekhugol'nykh konechnykh elementov” [Comparative analysis of triangular finite elements and triangular], *Vestnik Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta*, vol. 47, no. 2, pp. 382-386.
11. Thompson, J.F., Sony, Bh. and Weatherill, N. (1999), *Handbook of grid generation*, CRC Press, New York.
12. Delone, B.N. (1934), “O pustoy sfere” [On an empty field], *Izvestiya AN SSSR OMEN*, vol. 4, pp. 793-800.
13. Watson, D.F. (1981), “Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes”, *The Computer Journal*, vol. 24, issue 2, pp. 167-172.
14. Skvortsov, A.V. (2002), *Triangulyatsiya Delone i eye primeneniye* [Delaunay's triangulation and its application], Izdatel'stvo Tomskogo universiteta, Tomsk.
15. Skvortsov, A.V. (2002), “Obzor algoritmov postroeniya triangulyatsii Delone” [Overview of algorithms for constructing a Delaunay triangulation], *Vychislitel'nye metody i programirovaniye*, vol. 3, pp. 14-39.
16. Skvortsov, A.V. and Mirza, N.S. (2006), *Algoritmy postroeniya i analiza triangulyacii* [Algorithms for constructing and analyzing triangulation], Izdatel'stvo Tomskogo universiteta, Tomsk.
17. Su, P. and Drysdale, R.L.S. (1997), “A comparison of sequential Delaunay triangulation algorithms”, *Computational Geometry*, vol. 7, issue 5-6, pp. 361-385.
18. Joe, B. (1993), “Construction of k-Dimensional Delaunay Triangulations using Local Transformations”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 14, issue 6, pp. 1415-1436.

19. Joe, B. (1995), "Construction of Three-Dimensional Improved-Quality Triangulations Using Local Transformations", *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 16, issue 6, pp 1192-1307.
20. Ruppert, J.A (1995), "Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation", *Journal of Algorithms*, vol. 18, issue 3, pp. 548-585.
21. Chew, L.P. (1989), "Constrained Delaunay Triangulations", *Algorithmica*, vol. 4, issue 1, pp. 97-108.
22. Cohel-Steiner, D., de Verdière, É.C. and Yvinec, M. (2004), "Conforming Delaunay Triangulations in 3D", *Computational Geometry: Theory and Applications*, vol. 28, pp. 217-233.
23. Jamin, C., Alliez, P., Yvinec, M. and Boissonnat, J.-D. (2014), "CGALmesh: a Generic Framework for Delaunay Mesh Generation", *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 1, no 1, pp. 1-26.
24. Frey, W.H. (1987), "Selective Refinement: A New Strategy for Automatic Node Placement in Graded Triangular Meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, issue 11, pp. 2183-2200.
25. Nigel, P.W. (1992), "Delaunay Triangulation in Computational Fluid Dynamics", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 24, no 5/6, pp. 129-150.
26. Du, Q. and Wang, D. (2003), "Tetrahedral mesh generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, issue 9, pp. 1355-1373.
27. Du, Q. and Wang, D. (2006), "Recent progress in robust and quality Delaunay mesh generation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 195, issues 1-2, pp. 8-23.
28. George, P.L., Hecht, F. and Saltel, E. (1991), "Automatic Mesh Generator with Specified Boundary", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, issue 3, pp. 269-288.
29. Mavriplis, D.J. (1995), "An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness", *Journal of Computational Physics*, vol. 117, issue 1, pp. 90-101.
30. Müller, J.-D., Poe, P.L. and Deconinck, H. (1993), "A Frontal Approach for Internal Node Generation in Delaunay Triangulations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 17, pp. 241-255.
31. Silva, C.T. and Mitchell, J.S.B. (1998), "Greedy Cuts: An Advancing Front Terrain Triangulation Algorithm", *Proceedings of the 6th ACM International Symposium on Advances in Geographic Information Systems: International Conference*, Washington, USA, 2-7 November 1998, ACM, Washington, pp. 137-144.
32. Frey, P., Borouchaki, H. and Geouge, P.-L. (1996), "Delaunay tetrahedralization using an advancing-front approach", *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable: International Conference*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, October 10-11, 1996, Sandia National Laboratories, Sandia, pp. 31-48.
33. Frey, P., Borouchaki, H. and Geouge, P.-L. (1998), "3D Delaunay mesh generation coupled with an advancing-front approach", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 157, issue 1, pp. 115-131.
34. El-Hamalawi, A. (2004), "A 2D combined advancing front-Delaunay mesh generation scheme", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, no 9-10, pp. 967-989.
35. Kucwaj, J. and Borowik, B. (2009), "An Algorithm of Combining of Advancing Front and Delaunay Triangulation to 3-D Domain Tesselation", *Annales UMCS Informatica AI IX*, no 1, pp. 15-26.
36. Baker, B.S., Grosse, E. and Rafferty, C.S. (1988), "Nonobtuse Triangulation of Polygons", *Discrete and Computational Geometry*, vol. 3, issue 2, pp. 147-168.
37. Bern, M., Eppstein, D. and Gilbert, J. (1994), "Provably good mesh generation", *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 48, issue 3, pp. 384-409.
38. Neugebauer, F. and Diekmann, R. (1996), "Improved Mesh Generation: Not Simple but Good", *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable: International Conference*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, October 10-11, 1996, Sandia National Laboratories, Sandia, pp. 257-272.
39. Mitchell, S.A. and Vavasis, S.A. (1992), "Quality Mesh Generation in Three Dimensions", *Proceedings of the Eighth Annual Symposium on Computational Geometry: International Conference*, Berlin, Germany, June 10-12, 1992, Cornell University, New York, pp. 92-104.
40. Mitchell, S.A. and Vavasis, S.A. (2000), "Quality Mesh Generation in Higher Dimensions", *SIAM Journal on Computing*, vol. 29, issue 4, pp. 1334-1370.

41. Blacker, T.D. and Stephenson, M.B. (1991), "Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation", *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, issue 4, pp. 811-847.
42. Park, C., Noh, J.-S., Jang, I.-S. and Kang, J.M. (2007), "A new automated scheme of quadrilateral mesh generation for randomly distributed line constraints", *Computer-Aided Design*, vol. 39, pp. 258-267.
43. Zhao, Y. and Yu, B. (2013), "A modified paving algorithm for quadrilateral mesh generation", *Kung Cheng Je Wu Li Hsueh Pao/Journal of Engineering Thermophysics*, vol. 34, issue 4, pp. 728-732.
44. Blacker, T.D. and Meyers, R.J. (1993), "Seams and Wedges in Plastering: A 3D Hexahedral Mesh Generation Algorithm", *Engineering with Computers*, vol. 9, issue 2, pp. 83-93.
45. Staten, M.L., Owen, S.J., Blacker, T.D., Supazzini, M. and Shimada, K. (2010), "Unconstrained plastering – Hexahedral mesh generation via advancing-front geometry decomposition", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, issue 2, pp. 135-171.
46. Owen, S.J., Staten, M.L., Canann, S.A. and Saigal, S. (1999), "Q-Morph: An Indirect Approach to Advancing Front Quad Meshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, issue 9, pp. 1317-1340.
47. Skovpen', A. V. (2005), "Usovershenstvovannyi algoritm postroeniya neregulyarnykh chetyrekhugol'nykh setok" [An improved algorithm for constructing irregular quadrilateral meshes], *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, vol. 45, no. 8, pp. 1506-1528.
48. Owen, S. J., Saigal, S. (2000), "H-Morph: An Indirect Approach to Advancing Front Hex Meshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 49, issue 1-2, pp. 289-312.
49. Owen, S. J. (2001), "Hex-domain mesh generation using 3D constrained triangulation", *Computer Aided Design*, vol. 33, issue 3, pp. 211-220.
50. Blacker, T. D., Mitchell, S. A., Tautges, T. J., Murdoch, P., Benzley, S. (1997), "Forming and Resolving Wedges in the Spatial Twist Continuum", *Engineering with Computers* vol. 13, issue 1, pp. 35-47.
51. Murdoch, P., Benzley, S. E. (1995), "The Spatial Twist Continuum", *Proceedings of the 4th International Meshing Roundtable : International Conference*, Albuquerque, New Mexico, U.S.A., October 16-17, 1995, Sandia National Laboratories, Sandia, pp. 243-251.
52. Murdoch, P., Benzley, S. E., Blacker, T. D., Mitchell, S. A. (1997), "The spatial twist continuum: A connectivity based method for representing all-hexahedral finite element meshes", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 28, issue 2, pp. 137-149.
53. Tautges, T. J., Mitchell, S. A. (1996), "Progress Report on the Whisker Weaving All-hexahedral Meshing Algorithm", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations : The 5th International Conference*, Mississippi State University, April 1-5, 1996, Mississippi State University, Mississippi, pp. 659-670.
54. Tautges, T. J., Blacker, T. D., Mitchell, S. A. (1996), "The Whisker Weaving Algorithm: a connectivity based method for constructing all-hexahedral finite element meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, issue 19, pp. 3327-3350.
55. Schneiders, R. (1996), "A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes", *Engineering with Computers*, vol. 12, issue 3 pp. 168-177.
56. Schneiders, R., Schindler, R., Weiler, F. (1996), "Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes", *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable : International Conference*, Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A., October 10-11, 1996, Sandia National Laboratories, Sandia, pp. 205-216.
57. Schneiders, R. (2000), "Octree-Based Hexahedral Mesh Generation", *International Journal of Computational Geometry & Applications*, vol. 10, issue 4, pp. 383-398.
58. Ives, D. (1995), "Geometric grid generation: surface modeling, grid generation, and related issues in computational fluid dynamic (CFD) solutions", *Proceedings of NASA Conference NASA CP-3291*, Cleveland, pp. 535-546.
59. Taghavi, R. (1996), "Automatic, parallel and fault tolerant mesh generation from CAD", *Engineering with Computers*, vol. 12, issue 3, pp. 178-185.