УДК 517.9

# ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ В $L^p\left(R^l, d^l x\right)$ ПРОСТОРАХ, ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Яременко М. І.

*Національний технічний університет України «КПІ»,*
*просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056, Україна*

math.kiev@gmail.com

Розглядаються умови існування розв'язку задачі Коші для рівнянь гіперболічного типу в просторі Лебега. При доведенні теореми існування використовується схема Гальоркіна, будується послідовність наближення Гальоркіна та показується, що ця послідовність збігається до розв'язку рівняння.

*Ключові слова: квазілінійні диференціальні рівняння, метод Гальоркіна, метод форм, апріорні оцінки.*

# СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В $L^p\left(R^l, d^l x\right)$ ПРОСТРАНСТВАХ, ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Яременко Н. И.

*Национальный технический университет Украины «КПИ»,*
*просп. Победы, 37, г. Киев, 03056, Украина*

math.kiev@gmail.com

Рассматриваются условия существования решения задачи Коши для уравнений гиперболического типа пространстве Лебега. При доказательстве теоремы существования используется схема Галеркина, строится последовательность приближения Галеркина и показывается, что эта последовательность сходится к решению уравнения.

*Ключевые слова: квазилинейные дифференциальные уравнения, метод Галеркина, метод форм, априорные оценки.*

# THE EXISTENCE OF SOLUTION OF HYPERBOLIC EQUATION IN $L^p\left(R^l, d^l x\right)$ SPACE, THE COUCHY PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

Yremenko M. I.

*National Technical University of Ukraine "KPI",*
*Victory av., 37, Kiev, 03056, Ukraine*

math.kiev@gmail.com

Dedicated to the research of the conditions of existence of the solution of the Cauchy problem for hyperbolic equations in Lebesgue space. We conducted the research under the scheme: by the equation we built a special form and studied its properties, has its boundedness established this form creates an operator and we study the properties of the operator using the form that it generates. Then we have a theorem on the existence of the solution of the equation by which the form is built. To proof the theorem Galerkin scheme is being used, we built Galerkin sequence of approximation and showed that this sequence converges to the solution of the hyperbolic equation.

*Key words: quasi-linear differential equations, Galerkin method, the method forms a priori estimations.*

## ВСТУП

Розглянемо рівняння вигляду:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) + b(x,u,\nabla u) = f(x,t),$$

де з фізичної точки зору функція $f(x,t)$ характеризує зовнішній вплив на систему, що досліджується. Нелінійна функції $b(x,u,\nabla u)$ враховує механізм взаємодії хвилі з середовищем, під час розповсюдження хвилі у випадку, коли швидкість розповсюдження хвилі є функцією частоти.

Робота присвячена дослідженню слабкої розв'язуваності квазілінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу з гладкими та вимірними коефіцієнтами. Дослідження базується на методах теорії напівгруп із застосуванням методу диференційних форм. Вивчення задачі проводиться за такою схемою: спочатку від гіперболічного рівняння, за допомогою певної заміни, здійснюється перехід до системи параболічних рівнянь спеціального вигляду і далі досліджується розв'язуваність цієї системи, при цьому виникає потреба в дослідженні рівнянь еліптичного типу. Рівняння еліптичного типу розглядаються за допомогою аналогу метода монотонних слабко компактних операторів. У роботі отримано аналог теореми типу Мінті-Браудера. При цьому розглядається новий тип операторів $\mathrm{A}_{\lambda}^{p}:W_{\mathbf{1}}^{p}\left(R^{l},d^{l}x\right)\to W_{-\mathbf{1}}^{p}\left(R^{l},d^{l}x\right)$.

Розглянемо рівняння вигляду:

$$\frac{d^{2}u(t)}{dt^{2}}\in \mathrm{A}u(t),$$

за умов, що $t\in[\mathbf{0},T]$, $u(\mathbf{0})=u_{\mathbf{0}}\in D(\mathrm{A})$, $\frac{du(\mathbf{0})}{dt}=v_{\mathbf{0}}\in D(\mathrm{A})$, де функції $u_{\mathbf{0}}$, $v_{\mathbf{0}}$ – задані функції дійсного аргументу. Нелінійний оператор $\mathrm{A}$ породжений диференційним виразом у частинних похідних, який має вигляд:

$$\sum_{i,j=\mathbf{1}}^{l}\frac{\partial}{\partial x_{j}}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{i}}u\right)-b(x,u,\nabla u).$$

Вивчення задачі будемо проводити за схемою: спочатку від гіперболічного рівняння перейдемо до системи параболічних рівнянь за допомогою заміни: $v=\frac{du}{dt}$. Тоді задача набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathrm{I}\\ \mathrm{A} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\quad t\in[\mathbf{0},T],\quad u(\mathbf{0})=u_{\mathbf{0}}\in D(\mathrm{A}),\quad v(\mathbf{0})=v_{\mathbf{0}}\in D(\mathrm{A}).$$

Отже, хвильове рівняння звелося до еволюційної системи рівнянь у певному функціональному просторі.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ В ПРОСТОРАХ $L^{p}\left(R^{l},d^{l}x\right)$, $p\geq\mathbf{2}$, $l\geq\mathbf{3}$

Досліджується задача про існування розв'язку для гіперболічного нелінійного диференційного рівняння другого порядку в частинних похідних з вимірними коефіцієнтами в просторах $L^{p}\left(R^{l},d^{l}x\right)$, $p\geq\mathbf{2}$, $l\geq\mathbf{3}$.

Розглядається хвильове рівняння вигляду:

$$\frac{d^{2}u(t)}{dt^{2}}\in \mathrm{A}u(t),$$

за умов, що $t \in [\mathbf{0}, T]$, $u(\mathbf{0}) = u_0 \in D(\mathrm{A})$, $\dfrac{du(\mathbf{0})}{dt} = v_0 \in D(\mathrm{A})$, де функції $u_0$, $v_0$ – дійсні задані функції. Де нелінійний диференційний оператор $\mathrm{A}$ породжений виразом, який має вигляд:

$$\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) - b(x, u, \nabla u),$$

за умов його строгої еліптичності в евклідовому $l$-вимірному просторі, та

$$\left| b(x, u, \nabla u) \right| \le \mu_1(x)\left|\nabla u\right| + \mu_2(x)\left|u\right| + \mu_3(x),$$

$$\left| b(x, u, \nabla u) - b(x, v, \nabla v) \right| \le \mu_4(x)\left|u - v\right| + \mu_5(x)\left|\nabla(u - v)\right|.$$

В цій умові функції $\mu_1^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$, функція $\mu_3 \in L^p(R^l)$, $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$. Де $a(\cdot): R^l \mapsto R^l \otimes R^l$, $a(\cdot) \in \left[ L^1_{loc}(R^l) \right]^{l \times l}$ симетрична еліптична матрична функція, що задовольняє умови: існують $\varsigma, \xi \in R: \mathbf{0} < \varsigma \le \xi < \infty$ виконується нерівність $\varsigma \mathrm{I} \le a(x) \le \xi \mathrm{I}$, для всіх $x \in R^l$.

Вивчення цієї задачі здійснюватимемо за схемою: спочатку від гіперболічного рівняння перейдемо до системи параболічних рівнянь за допомогою наступної заміни: $v = \dfrac{du}{dt}$. Тоді задача набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad t \in [\mathbf{0}, T], \quad u(\mathbf{0}) = u_0 \in D(\mathrm{A}), \quad v(\mathbf{0}) = v_0 \in D(\mathrm{A}).$$

Отже, хвильове рівняння звелося до еволюційної системи рівнянь у функціональному просторі $L^p(R^l, d^l x)$, $p \ge \mathbf{2}$, $l \ge \mathbf{3}$. Розглянемо множину, що задається так: $L = L^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$, $p \ge \mathbf{2}$, $l \ge \mathbf{3}$, з нормою: $\|\tilde{u}\| = \left\langle u, u|u|^{p-2} \right\rangle^{p^{-1}} + \left\langle v, v|v|^{p-2} \right\rangle^{p^{-1}}$, де $\tilde{u} = (u, v) \in L = L^p(R^l, d^l x) \times L^p(R^l, d^l x)$, $p \ge \mathbf{2}$, $l \ge \mathbf{3}$. Так побудований простір буде Банаховим.

## ВИПАДОК ЗАДАЧІ ІЗ ГЛАДКИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ПРОСТОРАХ $L^p(R^l, d^l x)$, $p \ge \mathbf{2}$, $l \ge \mathbf{3}$

Отже, розглянемо випадок, коли коефіцієнти є нескінченно гладкими функціями своїх аргументів. За цих умов доведемо наступну теорему.

**Теорема 1.** *Для довільних елементів* $\{\gamma, \eta\} \subset W_1^p(R^l, d^l x)$ *існує таке дійсне число* $\tilde{\mu} > \mathbf{0}$, *що для всіх* $\mathbf{0} < \mu < \tilde{\mu}$ *система рівнянь:*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$$

*має єдиний розв'язок* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

***Доведення.*** Для доведення існування розв'язку перепишемо систему у вигляді: $u=\gamma+\mu v$, $v-\mu \mathrm{A}u=\eta$, і підставимо $u=\gamma+\mu v$ в $v-\mu \mathrm{A}u=\eta$, тоді маємо: $v-\mu \mathrm{A}(\gamma+\mu v)=\eta$.

Або в розгорнутому вигляді:

$$v-\mu\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma+\mu v)\right)+\mu b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)=\eta .$$

Розпишемо лінійний доданок:

$$\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma-\mu v)\right)=\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right)+\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\mu v\right),$$

тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$v-\mu^2\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\mu b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)=\eta+\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right).$$

Далі зауважимо, що доданок елементу $\gamma$ у нелінійній складовій рівняння $b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)$ не впливає на характер умов, тобто умови на не лінійність матимуть той самий вигляд (з іншими функціями $\mu_i(x)$, а отже з іншою форм – гранью), а саме:

$$\left|b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)\right|\le\mu\big(\mu_1(x)|\nabla u|+\mu_2(x)|u|+\mu_3(x)\big),$$

$$\left|b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)-b\big(x,(\gamma+\mu w),\nabla(\gamma+\mu w)\big)\right|\le\mu\big(\mu_4(x)|v-w|+\mu_5(x)|\nabla(v-w)|\big).$$

Поділимо його на $\mu^2$, при цьому $\frac{1}{\mu^2}$ позначимо через $\lambda$, оскільки $\mu^2>0$, а праву частину через $\psi$, при цьому зміняться лише позначення, а рівняння залишиться тим самим, у спрощеному записі зміняться лише числові сталі форм – грані, що не суттєво, оскільки $\mu^2\to 0$ залежить лише від початкових даних. Отже, маємо рівняння:

$$\lambda v-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\frac{1}{\mu}b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)=\psi .$$

Це квазілінійне еліптичне диференційне рівняння в частинних похідних з гладкими повільно зростаючими коефіцієнтами. Дослідимо його за допомогою аналога методу монотонних слабко компактних операторів із застосуванням форм.

*Схема метода.* За рівнянням складається спеціальна форма та досліджуються її властивості, доводиться її обмеженість, після цього *встановлюється, що ця форма породжує оператор, який діє за правилом* $A_\lambda^p: W_1^p\left(R^l,d^lx\right)\to W_{-1}^p\left(R^l,d^lx\right)$ *і досліджуються властивості цього оператора за допомогою форми, що його породжує, встановлюється обмеженість, коерцитивність, акретивність та хемінеперервність цього оператора. Далі доводиться теорема про існування розв'язку рівняння, за яким складена форма, що породжує оператор, який має властивості обмеженості, коерцитивності, акретивності та хемінеперервності. При доведенні теореми існування використовується схема Гальоркіна, аналог леми про гострий кут, за допомогою якого будується послідовність наближення Гальоркіна та показується, що ця послідовність збігається до розв'язку рівняння.*

За рівнянням складемо форму $h_\lambda^p(v,w)$:

$$h_\lambda^p(v,w) \equiv \lambda\langle v,w\rangle + \langle dw \circ a \circ dv\rangle + \left\langle \frac{1}{\mu} b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big), w\right\rangle,$$

де $v \in W^p\left(R^l, d^l x\right)$, $w \in W_{1,0}^q\left(R^l, d^l x\right)$. Справедлива лема.

**Лема 1.** *Форма* $h_\lambda^p(v,w)$ *є обмеженою.*

Як наслідок леми 1 маємо, що форма $h_\lambda^p(v,w)$ породжує оператор $A_\lambda^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$, який також є обмеженим, а отже $h_\lambda^p(v,w) = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p(v), w\right\rangle$ де $v \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$, $w \in W_{1,0}^q\left(R^l, d^l x\right)$.

**Лема 2.** *Оператор* $A_\lambda^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$ *визначає коерцитивне відображення.*

***Доведення.*** Оцінимо форму $h_\lambda^p(v,w) = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p(v), w\right\rangle$, де елементи $v \in W_1^p\left(R^l, d^l x\right)$, $w \in W_{1,0}^q\left(R^l, d^l x\right)$:

$$h_\lambda^p\left(v, v|v|^{p-2}\right) = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p(v), v|v|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} v\right) + \frac{1}{\mu} b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big), v|v|^{p-2}\right\rangle \geq$$

$$\geq \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} v\right) - \left|\mu_1(x)|\nabla v| + \mu_2(x)|v| + \mu_3(x)\right|, v|v|^{p-2}\right\rangle \geq$$

$$\geq \lambda\|v\|_p^p + \frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle d\left(v_n|v_n|^{\frac{p-1}{2}}\right) \circ a \circ d\left(v_n|v_n|^{\frac{p-1}{2}}\right)\right\rangle - \left\langle \left|\mu_1(x)|\nabla v| + \mu_2(x)|v| + \mu_3(x)\right|, v|v|^{p-2}\right\rangle.$$

Позначимо $W = v|v|^{\frac{p-2}{2}}$ і оцінимо останній доданок:

$$\left\langle \left|\mu_1(x)|\nabla v| + \mu_2(x)|v| + \mu_3(x)\right|, v|v|^{p-2}\right\rangle \leq$$

$$\leq \frac{2}{p}\|\nabla W\|_2\|\mu_1 W\|_2 + \|\mu_2 W\|_2\|W\|_2 + \|\mu_3\|_p \left\|v|v|^{p-2}\right\|_q \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\left(\varepsilon^2\|\nabla W\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2\|W\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2\right)\right) + \frac{1}{p\sigma^p}\|\mu_3\|_p^p + \frac{\sigma^q}{q}\left\|v|v|^{p-2}\right\|_q^q \leq$$

$$\leq \left(\sqrt{\beta}\left(\frac{2}{p} + \frac{1}{2}\right)\right)\|\nabla W\|_2^2 + \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} + \frac{c(\beta)}{p\sqrt{\beta}} + \frac{c(\beta)}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\sigma^q}{q}\right)\|W\|_2^2 + \frac{1}{p\sigma^p}\|\mu_3\|_p^p.$$

Далі групуємо відповідні доданки, отримуємо твердження леми.

**Лема 3.** *Оператор* $A_\lambda^p : W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p\left(R^l, d^l x\right)$ *визначає акретивне відображення в* $L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

***Доведення.*** Дійсно, згідно з означенням акретивності, враховуючи умови, маємо:

$$\left\langle A_\lambda^p(u)-A_\lambda^p(v),(u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle=$$

$$=\left\langle \lambda v-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\frac{1}{\mu}b\left(x,\gamma+\mu v,\nabla(\gamma+\mu v)\right),(v-w)|v-w|^{p-2}\right\rangle-$$

$$-\left\langle \lambda w-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}w\right)+\frac{1}{\mu}b\left(x,\gamma+\mu w,\nabla(\gamma+\mu w)\right),(v-w)|v-w|^{p-2}\right\rangle=$$

$$=\lambda\|u-v\|_p^p++\frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle d\left(u_n|u_n|^{\frac{p-1}{2}}\right)\circ a\circ d\left(u_n|u_n|^{\frac{p-1}{2}}\right)\right\rangle+$$

$$+\left\langle\frac{1}{\mu}b\left(x,\gamma+\mu v,\nabla(\gamma+\mu v)\right)-\frac{1}{\mu}b\left(x,\gamma+\mu w,\nabla(\gamma+\mu w)\right),(v-w)|v-w|^{p-2}\right\rangle.$$

Оцінимо останній доданок, використовуючи початкові умови, обмеженість коефіцієнтів і оцінку Гельдера, покладаючи $W=(v-w)|v-w|^{\frac{p-2}{2}}$, маємо:

$$\left|\left\langle\frac{1}{\mu}b\left(x,\gamma+\mu v,\nabla(\gamma+\mu v)\right)-\frac{1}{\mu}b\left(x,\gamma+\mu w,\nabla(\gamma+\mu w)\right),(v-w)|v-w|^{p-2}\right\rangle\right|\le$$

$$\le\left\langle\mu_4(x)|u-v|+\mu_5(x)\left|\nabla(u-v)\right|,(v-w)|v-w|^{p-2}\right\rangle\le$$

$$\le\left\langle\mu_4(x)(v-w),(v-w)|v-w|^{p-2}\right\rangle+\left\langle\mu_5(x)\left|\nabla(u-v)\right|,(u-v)|u-v|^{p-2}\right\rangle\le$$

$$\le\frac{2}{p}\|\nabla W\|_2\|\mu_5W\|_2+\|\mu_4W\|_2\|W\|_2\le$$

$$\le\frac{2}{p}\|\nabla W\|\left(\beta\|\nabla W\|_2^2+c(\beta)\|W\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}+\|W\|_2\left(\beta\|\nabla W\|_2^2+c(\beta)\|W\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\le\frac{1}{p}\left(\varepsilon_1^2\|\nabla W\|_2^2+\frac{1}{\varepsilon_1^2}\left(\beta\|\nabla W\|_2^2+c(\beta)\|W\|_2^2\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sigma^2\|W\|_2^2+\frac{1}{\sigma^2}\left(\beta\|\nabla W\|_2^2c(\beta)\|W\|_2^2\right)\right)\le$$

$$\le\left(\frac{2}{p}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\beta}\|\nabla W\|_2^2+\left(\frac{1}{p}\frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{2}+\frac{1}{2}\frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}}\right)\|W\|_2^2.$$

Використовуючи ці оцінки, доводимо лему.

**Лема 4.** *Нелінійний оператор* $A_\lambda^p:W_1^p\left(R^l,d^lx\right)\to W_{-1}^p\left(R^l,d^lx\right)$ *визначає хемінеперервне відображення.*

У випадку просторів $L^p\left(R^l,d^lx\right),\ p\ge 2,\ l\ge 3$ потрібно застосовувати аналог леми 5, а саме:

**Лема 5** (про гострий кут). *Нехай на сфері* $S_R=\left(\bar{C}:|\bar{C}|=R\right)$, *де* $R>0$ *– деяке відповідним чином вибране число, задано неперервне відображення* $\vec{B}:R^n\to R^n$, *для якого виконується* *аналог умови про гострий кут, тобто* $\left\langle \bar{B}\left(\bar{C}\right), \bar{C}^{*}\right\rangle \geq \mathbf{0}$. *Тоді існує принаймні одна така точка* $\vec{C}: \ |\vec{C}| \leq R$, *що* $\vec{B}\left(\vec{C}\right) = \mathbf{0}$. Ця лема доводиться від супротивного.

Для того, щоб показати, що еліптичне рівняння має розв'язок, використаємо модифікацію метода Гальоркіна. Нехай $\{w_i\}$ і $\{w_i^*\}$ – гладкі базиси просторів $W^p_{\mathbf{1,0}}\left(R^l, d^l x\right)$, $W^q_{\mathbf{1,0}}\left(R^l, d^l x\right)$, відповідно, і нехай $\left[w_{\mathbf{1}}, \ldots w_k\right]$ – лінійна оболонка базисних елементів, така, що виконується властивість: $\left\langle v_k, v_k^*\right\rangle = \|v_k\|_p^p$. Покладемо за визначенням $v_k = \sum_{i=\mathbf{1}}^{k} c_i w_i$, $v_k^* = \sum_{i=\mathbf{1}}^{k} c_i^* w_i^*$. Для знаходження послідовності Гальоркіна складемо систему рівнянь: $\left\langle \mathrm{A}^p_\lambda\left(w_k\right) - \psi, w_i^*\right\rangle = \mathbf{0}$, $i = \mathbf{1}, \ldots, k$. Ця система визначає неперервне відображення $\vec{B}: R^k \to R^k$, а отже має місце аналог леми про гострий кут. Скористаємося аналогом методу Гальоркіна. Покажемо, що система ця має розв'язок у лінійній оболонці перших $k$ елементів базису $\{w_i\}$. Дійсно, відображення $\vec{B}\left(\vec{C}\right): \mathbf{0} \subset B_i\left(\vec{C}\right) = \left\langle \mathrm{A}^p_\lambda\left(v_k\right) - \psi, w_i^*\right\rangle$, $i = 1, \ldots, k$, внаслідок коерцитивності оператора $\mathrm{A}^p_\lambda: W^p_{\mathbf{1}}\left(R^l, d^l x\right) \to W^p_{-\mathbf{1}}\left(R^l, d^l x\right)$, задовольняє умови аналога леми про гострий кут:

$$\left\langle \vec{B}\left(\vec{C}\right), \vec{C}^{*}\right\rangle = \left\langle \mathrm{A}^p_\lambda\left(\sum_{i=1}^{k} c_i w_i\right) - \psi, \sum_{i=1}^{k} c_i^* w_i^*\right\rangle = \left\langle \mathrm{A}^p_\lambda\left(v_k\right) - \psi, v_k\, |v_k|^{p-2}\right\rangle \geq$$

$$\geq \left(\frac{h^p_\lambda\left(v_k, v_k\left|v_k\right|^{p-\mathbf{2}}\right)}{\left\|v_k\left|v_k\right|^{p-\mathbf{2}}\right\|_{W^q_{\mathbf{1}}}} - \|\psi\|_{W^p_{-\mathbf{1}}}\right)\left\|v_k\left|v_k\right|^{p-\mathbf{2}}\right\|_{W^q_{\mathbf{1}}} \geq \mathbf{0}.$$

Оскільки $\mathrm{A}^p_\lambda: W^p_{\mathbf{1}}\left(R^l, d^l x\right) \to W^p_{-\mathbf{1}}\left(R^l, d^l x\right)$ – неперервне відображення на скінчених підпросторах простору $W^p_{\mathbf{1,0}}$, то внаслідок аналога леми про гострий кут для достатньо великих значень $R > \mathbf{0}$ існує такий елемент $\vec{C}, |\vec{C}| = R$, що $\vec{B}\left(\vec{C}\right) = 0$.

Отже, вище вказано спосіб побудови послідовності $\{v_k(x)\}$, елементи якої є розв'язками рівняння. Далі покажемо, що послідовність $\{v_k(x)\}$ збігається до розв'язку цього рівняння. Використавши коерцитивність оператора $\mathrm{A}^p_\lambda: W^p_{\mathbf{1}}\left(R^l, d^l x\right) \to W^p_{-\mathbf{1}}\left(R^l, d^l x\right)$, одержимо нерівність $\left\|\mathrm{A}^p_\lambda\left(v_k\right)\right\|_{W^p_{-\mathbf{1}}} \leq \|\psi\|_{W^p_{\mathbf{1}}}$.

Якщо доведемо нерівність $\|v_k\|_{W^p_{\mathbf{1}}} < C$, де стала $C$ залежить лише від функцій $\mu$ (структури рівняння), то тоді внаслідок слабкої компактності простору $W^p_{\mathbf{1}}\left(R^l, d^l x\right)$ отримаємо, що існує така підпослідовність $\{v_{k'}(x)\}$, що має місце властивість: $v_{k'} \xrightarrow[W^p_{\mathbf{1}}]{} v_{\mathbf{0}}$ слабко і $\mathrm{A}^p_\lambda\left(v_{k'}\right) \xrightarrow[W^p_{\mathbf{1}}]{} y$ слабко.

Покажемо, що $y = \mathrm{A}^p_\lambda\left(v_{\mathbf{0}}\right) = \psi$. Звідси випливатиме, що відображення $\mathrm{A}^p_\lambda: W^p_{\mathbf{1}}\left(R^l, d^l x\right) \to W^p_{-\mathbf{1}}\left(R^l, d^l x\right)$ є сюр'єктивним відображенням, тобто відображенням «на».

Складемо інтегральні тотожності: $\left\langle \mathrm{A}_\lambda^p\left(v_{k'}\right), w_i^*\right\rangle = \left\langle \psi, v_i^*\right\rangle$, $i=\mathbf{1},...,k'$, і перейдемо до границі при $k'\to+\infty$. Тоді одержимо: $\lim\limits_{k'\to\infty} \mathrm{A}_\lambda^p\left(v_{k'}\right) = y = \psi$, де границя береться за нормою простору $W_{-\mathbf{1}}^p\left(R^l, d^l x\right)$. Оскільки оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_{\mathbf{1}}^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-\mathbf{1}}^p\left(R^l, d^l x\right)$ є акретивним в $L^p\left(R^l, d^l x\right)$, то має місце нерівність: $\left\langle \mathrm{A}_\lambda^p\left(v_{k'}\right) - \mathrm{A}_\lambda^p\left(w\right), \left(v_{k'} - w\right) | v_{k'} - w|^{p-2}\right\rangle \ge \mathbf{0}$. Переходячи в останній нерівності до границі при $k'\to\infty$, одержимо нерівність: $\left\langle y - \mathrm{A}_\lambda^p\left(w\right), \left(v_{\mathbf{0}} - w\right) | v_{\mathbf{0}} - w|^{p-2}\right\rangle \ge \mathbf{0}$. Поклавши $w = v_{\mathbf{0}} - tz$, $t > \mathbf{0}$, $z \in W_{\mathbf{1},\mathbf{0}}^p\left(R^l, d^l x\right)$, і скоротивши обидві частини одержаної нерівності на $t^{p-\mathbf{1}}$, отримаємо: $\left\langle y - \mathrm{A}_\lambda^p\left(v_{\mathbf{0}} - tz\right), z|z|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle \ge \mathbf{0}$.

З хемінеперервності оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_{\mathbf{1}}^p\left(R^l, d^l x\right) \to W_{-\mathbf{1}}^p\left(R^l, d^l x\right)$, враховуючи довільність елемента $z \in W_{\mathbf{1},\mathbf{0}}^p\left(R^l, d^l x\right)$, одержимо $y = \mathrm{A}_\lambda^p\left(v_{\mathbf{0}}\right) = \psi$, тобто для заданих початкових даних побудовано послідовність $\left\{v_{k'}\right\}$ і доведено її збіжність до елементу $v_{\mathbf{0}} \in W_{\mathbf{1}}^p\left(R^l, d^l x\right)$, що реалізує розв'язок рівняння за даних умов.

Єдиність цього розв'язку випливає з властивості акретивності оператора $A_\lambda^p\left(\cdot\right)$. Отже, функції $u = \gamma + \mu v$ і $v = \eta + \mu \mathrm{A} u$ є шуканими і такими, що задовольняють систему $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$.

***Зауваження.*** *Має місце оцінка для* $\left\{u, v\right\} \subset W_{\mathbf{1}}^p\left(R^l, d^l x\right) \cap C^\infty\left(R^l\right)$, *які задовольняють наступну нерівність:*

$$\left\langle u - \lambda_{\mathbf{0}} \mathrm{A} u, u|u|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle + \lambda_{\mathbf{0}} \|v\|_p^p \le \left(\mathbf{1} + o\left(\mu\right)\right)\left(\left\langle \gamma - \lambda_{\mathbf{0}} \mathrm{A} \gamma, \gamma|\gamma|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle + \lambda_{\mathbf{0}} \|\eta\|_p^p\right),$$

*причому додатня стала* $\lambda_{\mathbf{0}}$ *не залежать від числа* $\mu$ *і елементів* $\left\{\gamma, \eta\right\}$.

Доведемо оцінку. Оскільки:

$$\mathrm{A} u = \frac{\mathbf{1}}{\mu}\left(v - \eta\right), \quad \text{то} \quad \mathrm{A} v = \mathrm{A}\frac{\left(u - \gamma\right)}{\mu},$$

а отже для $\left\{u, v\right\} \subset W_{\mathbf{1}}^p\left(R^l, d^l x\right) \cap C^\infty\left(R^l\right)$:

$$\left\langle \gamma - \lambda_{\mathbf{0}} \mathrm{A} \gamma, \gamma|\gamma|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle + \lambda_{\mathbf{0}} \|\eta\|_p^p = \left\langle \gamma - \lambda_{\mathbf{0}} \sum_{i,j=\mathbf{1}}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma\right) + \lambda_{\mathbf{0}} b\left(x, \gamma, \nabla\gamma\right), \gamma|\gamma|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle =$$

$$= \left(\left\langle u - \lambda_{\mathbf{0}} \sum_{i,j=\mathbf{1}}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\right)\right) + \lambda_{\mathbf{0}} b\left(x, \left(u\right), \nabla\left(u\right)\right), u|u|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle + \lambda_{\mathbf{0}} \|v\|_p^p\right) +$$

$$+ \left(\left\langle u - \mu v - \lambda_{\mathbf{0}} \sum_{i,j=\mathbf{1}}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u - \mu v\right)\right) + \lambda_{\mathbf{0}} b\left(x, \left(u - \mu v\right), \nabla\left(u - \mu v\right)\right), \left(u - \mu v\right)|u - \mu v|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle -\right.$$

$$\left. - \left\langle u - \lambda_{\mathbf{0}} \sum_{i,j=\mathbf{1}}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\right)\right) + \lambda_{\mathbf{0}} b\left(x, \left(u\right), \nabla\left(u\right)\right), u|u|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle\right) +$$

$$+\lambda_0\left(\left\langle v-\mu \mathrm{A}u,(v-\mu \mathrm{A}u)|v-\mu \mathrm{A}u|^{p-2}\right\rangle-\left\langle v,v|v|^{p-2}\right\rangle\right).$$

$$\left\langle \gamma-\lambda_0 \mathrm{A}\gamma,\gamma|\gamma|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\|\eta\|_p^p=\left\langle \gamma-\lambda_0\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma\right)+\lambda_0 b(x,\gamma,\nabla\gamma),\gamma|\gamma|^{p-2}\right\rangle=$$

$$=\left(\left\langle u-\lambda_0 Au,u|u|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\|v\|_p^p\right)+$$

$$+\left(\left\langle u-\mu v-\lambda_0 A(u-\mu v),(u-\mu v)|u-\mu v|^{p-2}\right\rangle-\left\langle u-\lambda_0 Au,u|u|^{p-2}\right\rangle\right)+$$

$$+\lambda_0\left(\left\langle v-\mu \mathrm{A}u,(v-\mu \mathrm{A}u)|v-\mu \mathrm{A}u|^{p-2}\right\rangle-\left\langle v,v|v|^{p-2}\right\rangle\right)=$$

$$=\left(\left\langle u-\lambda_0 Au,u|u|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\|v\|_p^p\right)+\left\langle u,(u-\mu v)|u-\mu v|^{p-2}-u|u|^{p-2}\right\rangle-$$

$$+\left\langle v,\lambda_0(v-\mu \mathrm{A}u)|v-\mu \mathrm{A}u|^{p-2}-\lambda_0 v|v|^{p-2}-\mu(u-\mu v)|u-\mu v|^{p-2}\right\rangle+$$

$$+\lambda_0\left(\left\langle \mathrm{A}u,u|u|^{p-2}-\mu(v-\mu \mathrm{A}u)|v-\mu \mathrm{A}u|^{p-2}\right\rangle-\left\langle A(u-\mu v),(u-\mu v)|u-\mu v|^{p-2}\right\rangle\right).$$

Звідси випливає наведена вище нерівність.

Зауваження. Для $\{u,v\}\subset W_1^p\left(R^l,d^l x\right)\cap C^\infty\left(R^l\right)$ можна використати наступні міркування:

$$\left|\left\langle v-\mu \mathrm{A}u,(v-\mu \mathrm{A}u)|v-\mu \mathrm{A}u|^{p-2}\right\rangle-\left\langle v,v|v|^{p-2}\right\rangle\right|\le$$

$$\le\int_{R^l}\left\||v-\mu \mathrm{A}u|^p-|v|^p\right|dx^l=\int_{R^l}|v|^p\left\|\mathbf{1}-\mu\frac{\mathrm{A}u}{|v|^p}\right|^p-|\mathbf{1}|\right|dx^l\le\mu p\|\mathrm{A}u\|_{L^1}+o\left(\mu^2\right).$$

**Теорема 2.** *Гіперболічне рівняння* $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}\in \mathrm{A}u(t)$, *за початкових умов* $t\in[\mathbf{0},T]$, $u(\mathbf{0})=u_0\in D(\mathrm{A})$, $\dfrac{du(\mathbf{0})}{dt}=v_0\in D(\mathrm{A})$, *має розв'язок.*

***Доведення.*** Для доведення цього розглянемо прямий добуток просторів $W_1^p\times L^p$, елементами якого є вектори

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\quad u\in W_1^p\left(R^l,d^l x\right),\quad v\in L^p\left(R^l,d^l x\right).$$

У цьому просторі можна ввести функцію, що буде нормою за наступним правилом:

$$\left\|\begin{matrix}u\\ v\end{matrix}\right\|=\left(\left\langle u-\lambda_0 \mathrm{A}u,u|u|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\left\langle v,v|v|^{p-2}\right\rangle\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Областю визначення оператора $\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathrm{I}\\ \mathrm{A} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ є множина елементів $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$, $u\in W_1^p\left(R^l,d^l x\right)$, $v\in L^p\left(R^l,d^l x\right)$, таких що $u$, $v$ задаються формулами $u=\gamma+\mu v$ і $v=\eta+\mu \mathrm{A}u$ та є такими, що задовольняють систему:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Тоді, коли додатне число $\mu$ достатньо мале, область значень оператора $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ містить усі елементи $\begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$, $\gamma, \eta \in \hat{W}_1^p\left(R^l, d^l x\right)$, отже, для мінімального замкнутого розширення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ у просторі $W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \times L^p\left(R^l, d^l x\right)$, оператор $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ має розв'язний, якій всюди визначений на добутку просторів $W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \times L^p\left(R^l, d^l x\right)$. ***А отже,*** випливає, що відповідне розширення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ є локальним генератором деякої напівгрупи $T_t$ в $W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \times L^p\left(R^l, d^l x\right)$ і $W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \subset L^p\left(R^l, d^l x\right)$. Звідси слідує твердження теореми 2.

## ВИПАДОК ВИМІРНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ПРОСТОРАХ $L^p\left(R^l, d^l x\right),\ p \geq \mathbf{2},\ l \geq \mathbf{3}$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти у хвильовому рівнянні вигляду: $\dfrac{d^2 u(t)}{dt^2} \in \mathrm{A}u(t)$ є вимірними, загалом не гладкими функціями.

У цьому випадку дослідження проводиться наступним чином:

1. Від гіперболічного рівняння перейдемо до системи параболічних рівнянь за допомогою підстановки: $v = \dfrac{du}{dt}$.

Тоді задача набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad t \in [\mathbf{0}, T], \quad u(\mathbf{0}) = u_{\mathbf{0}} \in D(\mathrm{A}), \quad v(\mathbf{0}) = v_{\mathbf{0}} \in D(\mathrm{A}).$$

Отже, як і у випадку дослідження рівняння з гладкими коефіцієнтами, хвильове рівняння звелося до еволюційної системи рівнянь.

Досліджуємо розв'язуваність наступної системи і доводимо, що для довільних елементів $\{\gamma, \eta\} \subset W_1^p$ існує таке дійсне число $\tilde{\mu} > \mathbf{0}$, що для всіх малих $\mathbf{0} < \mu < \tilde{\mu}$ система нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$$

має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

***Доведення.*** Для доведення існування розв'язку перепишемо цю систему в такому вигляді: $u = \gamma + \mu v$, $v - \mu \mathrm{A} u = \eta$ і підставимо $u = \gamma + \mu v$ в $v - \mu \mathrm{A} u = \eta$, тоді маємо: $v - \mu \mathrm{A}(\gamma + \mu v) = \eta$. Або в розгорнутому вигляді:

$$v-\mu\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma+\mu v)\right)+\mu b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)=\eta .$$

Розпишемо лінійний доданок:

$$\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma-\mu v)\right)=\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right)+\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\mu v\right),$$

тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$v-\mu^2\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\mu b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)=\eta+\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right).$$

Далі зауважимо, що доданок елементу $\gamma$ в нелінійній складовій рівняння $b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)$ не впливає на характер умов, тобто умови на не лінійність матимуть той самий вигляд (з іншими функціями $\mu_i(x)$, а отже з іншою форм-гранню), а саме:

$$\left|b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)\right|\le\mu\big(\mu_1(x)|\nabla u|+\mu_2(x)|u|+\mu_3(x)\big),$$

$$\left|b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)-b\big(x,(\gamma+\mu w),\nabla(\gamma+\mu w)\big)\right|\le\mu\big(\mu_4(x)|v-w|+\mu_5(x)|\nabla(v-w)|\big).$$

Поділимо його на $\mu^2$, при цьому $\frac{1}{\mu^2}$ позначимо через $\lambda$, оскільки $\mu^2>0$, а праву частину через $\psi$, при цьому зміняться лише позначення, а рівняння залишиться тим самим, у спрощеному записі зміняться лише числові сталі форм-грані, що не суттєво, оскільки $\mu^2\to 0$ залежить лише від початкових даних. Отже, маємо рівняння:

$$\lambda v-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\frac{1}{\mu}b\big(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\big)=\psi .$$

Це квазілінійне еліптичне диференційне рівняння в частинних похідних з повільно зростаючими вимірними коефіцієнтами. Досліджуємо його за допомогою методу акретивних слабко компактних операторів із застосуванням $L^p\left(R^l,d^lx\right)$ – форм.

2. Еліптичне рівняння з вимірними повільно зростаючими коефіцієнтами наближається (апроксимується) рівняннями з обмеженими (зрізаними) вимірними коефіцієнтами таким чином.

***Означення.*** *Нехай $f(x)$ – вимірна за Лебегом функція на $R^l$. Тоді, визначимо зрізку $f_n$ функції $f$ за правилом:*

$$f_n=\begin{cases} n, & f>n,\\ f, & |f|\le n,\\ -n, & f<-n.\end{cases}$$

3. Наступним кроком є згладжування уже обмежених коефіцієнтів еліптичного рівняння.

***Означення.*** *Нехай $f(x)$ – вимірна за Лебегом функція на $R^l$. Тоді, функція $f^m(x)$ є* «гладкою» апроксимацію функції $f(x)$, за аргументом $x$:

$$f^m(x)=\int_{R^l}\rho_m(x-t)f(t)\,dt=\rho_m*f ,$$

де $\rho_n(t)$ – гладка невід'ємна апроксимація 1 в $R^l$.

Тобто, отримано множину еліптичних рівнянь, що залежать від двох натуральних параметрів, які виникають під час «зрізання» та «згладжування». Зауважимо, що послідовність проведення операцій «зрізання» та «згладжування» важлива, тобто спочатку отримуємо коефіцієнти у вигляді обмежених функцій, а вже потім їх наближаємо гладкими функціями.

4. Далі досліджуємо множину рівнянь з гладкими коефіцієнтами за допомогою методів, що були розроблені вище. Доведення проводяться дослівно аналогічно, з урахуванням того моменту, що замість одного рівняння розглядається сукупність при двох фіксованих натуральних параметрах, так, наприклад, форма буде визначатися відповідно:

$$h_\lambda^{p,mn}(v,w) \equiv \lambda\langle v,w\rangle + \langle dw \circ a^{m,n} \circ dv\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{1}}{\mu} b^{m,n}\left(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)\right),w\right\rangle,$$

де $w \in W_{\mathbf{1},\mathbf{0}}^q\left(R^l,d^lx\right)$. При цьому оцінки при доведенні лем не зміняться, оскільки там використовувались лише норми функцій коефіцієнтів та властивість форм – обмеженості. Отже, отримана множина розв'язків $v^{m,n}$, що залежить від двох натуральних параметрів згладжування $m$ і зрізання $n$, далі потрібно зняти обмеження на згладжування та зрізання, тобто перейти до границі за цими натуральними параметрами. Важливим моментом доведення є те, що спочатку знімаються обмеження на згладжування, перехід до границі за параметром $m$, а потім, обмеженість коефіцієнтів, перехід до границі за параметром $n$.

5. Переходимо до границі за параметром $m$.

6. Переходимо до границі за параметром $n$. А отже, існують функції $u$ і $v$ є шуканими і такими, що задовольняють систему:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

***Зауваження.*** *Якщо елементи* $\{u,v\} \subset W_{\mathbf{1}}^p\left(R^l,d^lx\right) \cap C^\infty\left(R^l\right)$*, тоді є вірною оцінка:*

$$\left\langle u-\lambda_{\mathbf{0}}\mathrm{A}u, u|u|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle + \lambda_{\mathbf{0}}\|v\|_p^p \le (\mathbf{1}+o(\mu))\left(\left\langle \gamma-\lambda_{\mathbf{0}}\mathrm{A}\gamma, \gamma|\gamma|^{p-\mathbf{2}}\right\rangle + \lambda_{\mathbf{0}}\|\eta\|_p^p\right),$$

*причому додатня стала* $\lambda_{\mathbf{0}}$ *не залежать від числа* $\mu$ *і елементів* $\{\gamma,\eta\}$.

7. Область визначення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ є множина таких елементів $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $u \in W_{\mathbf{1}}^p\left(R^l,d^lx\right)$, $v \in L^p\left(R^l,d^lx\right)$, що елементи $u$, $v$ є розв'язками системи:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Тоді, коли додатне число $\mu$ достатньо мале, область значень оператора $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ містить всі елементи $\begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$, $\gamma,\eta \in \hat{W}_{\mathbf{1}}^p\left(R^l,d^lx\right) \subset L^p\left(R^l,d^lx\right)$, отже, для мінімального замкнутого розширення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ у просторі $W_{\mathbf{1}}^p\left(R^l,d^lx\right) \times L^p\left(R^l,d^lx\right)$, оператор

$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ має розв'язок, який всюди визначений на добутку просторів $W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \times L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

А отже, випливає, що відповідне розширення оператора $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ є локальним генератором деякої нелінійної напівгрупи $T_t$ в $W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \times L^p\left(R^l, d^l x\right)$ і $W_1^p\left(R^l, d^l x\right) \subset L^p\left(R^l, d^l x\right)$.

## ВИСНОВКИ

Одержано результати щодо існування розв'язку рівняння вигляду: $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} \in \mathrm{A}u(t)$, при умовах, що $t \in [\mathbf{0}, T]$, $u(\mathbf{0}) = u_\mathbf{0} \in D(\mathrm{A})$, $\frac{du(\mathbf{0})}{dt} = v_\mathbf{0} \in D(\mathrm{A})$, де функції $u_\mathbf{0}$, $v_\mathbf{0}$ – задані функції дійсного аргументу. Нелінійний оператор $\mathrm{A}$ породжений диференційним виразом з частинними похідними, з коефіцієнтами: $\mu_1{}^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$, функція $\mu_3 \in L^p\left(R^l\right)$, $\mu_4{}^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Benjamini I. Heat kernel lower bounds on Riemannian manifolds using the old ideas of Nash / I. Benjamini, I. Chavel, E. A. Feldman // Proc. London Math. Soc. – 1996. – V. 72. – P. 215-240.
2. Berlyiand A. G. On the $L_p$-theory of Schrodinger semigroups / A. G. Berlyiand, Yu. A. Semenov // Siberian Math. J. – 1990. – V. 31. – P. 16-26.
3. David E. E. Hardy operators, functional spaces and embeddings / E. E. David, W. D. Evans. – Berlin : Springer, 2004. – 326 p.
4. Dorroh J. R. A nonlinear Hille-Yosida-Phillips theorem / J. R. Dorroh // J. Func. Anal. – 1969. – V. 3. – P. 345-353.
5. Komura Y. Differentiability of nonlinear semigroups / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. –1969. – V. 21. – P. 375-402.
6. Papageorgiou N. S. Existence of solutions for the second order evolution inclusion / N. S. Papageorgiou // journal of applied mathematics and stochastic analysis. – 1994. – Vol. 7, N 4. – P. 525-535.
7. Papageorgiou N. S. Second order nonlinear evolution inclusions: structure of the solution set / N. S. Papageorgiou // Acta math. sinica, English series. – 2006. – Vol. 22, N 1. – P. 195-206.
8. Papageorgiou N. S. On multivalued evolutions equations and differential inclusions in Banach spaces / N. S. Papageorgiou // Comment. math. unaiv. San. Pauli. – 1987. – Vol. 36. – P. 21-39.
9. Papageorgiou N. S. Volterra integral inclusions in Banach spaces / N. S. Papageorgiou // J. Integra equation and application. – 1988. – N 1. – P. 65-81.
10. Panagiotopoulos P. D. On a type of hyperbolic variational - hemivariational inequalities / P. D. Panagiotopoulos, G. Pop // J. Applied Anal. – 1999. – Vol. 5, N 1. – P. 95-112.
11. Yaremenko M. I. Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in $R^l$ and nonlinear semi-groups of contraction in $L^p$ / M. I. Yaremenko // Матеріали конференції «Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. 15-17 травня 2008 року, Київ». – Київ, 2008. – С. 473.
12. Yaremenko M. I. Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in $R^l$ and nonlinear semi- groups of contraction in $L^p$ / M. I. Yaremenko // Матеріали конференції

«International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008). May 12-17, 2008». – 2008. – С. 43.

13. Yanchuk S. Partial synchronization and clustering in a system of diffusively coupled chaotic oscillators / S. Yanchuk, Yu. Maistrenko, E. Mosekilde // Math. Comp. Simul. – 2001. – V. 54. – С. 491-508.

## REFERENCE

1. Benjamini, I., Chavel, I. and Feldman, E.A. (1996), "Heat kernel lower bounds on Riemannian manifolds using the old ideas of Nash", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 72, pp. 215-240.
2. Berlyiand, A.G. and Semenov, Yu.A. (1990), "On the $L_p$-theory of Schrodinger semigroups", *Siberian Math. J.*, vol. 31, pp. 16-26.
3. David, E.E. and Evans, W.D. (2004), "Hardy operators, functional spaces and embeddings", Springer, Berlin.
4. Dorroh, J.R. (1969), "A nonlinear Hille-Yosida-Phillips theorem", *J. Func. Anal.*, vol. 3, pp. 345-353.
5. Komura, Y. (1969), "Differentiability of nonlinear semigroups", *J. Math. Soc. Japan*, vol. 21, pp. 375-402.
6. Papageorgiou, N.S. (1994), "Existence of solutions for the second order evolution inclusion", *Journal of applied mathematics and stochastic analysis*, vol. 7, no. 4, pp. 525-535.
7. Papageorgiou, N.S. (2006), "Second order nonlinear evolution inclusions: structure of the solution set", *Acta math. sinica, English series*, vol. 22, no. 1, pp. 195-206.
8. Papageorgiou, N.S. (1987), "On multivalued evolutions equations and differential inclusions in Banach spaces", *Comment. math. unaiv. San. Pauli*, vol. 36, pp. 21-39.
9. Papageorgiou, N.S. (1988), "Volterra integral inclusions in Banach spaces", *J. Integra equation and application*, no. 1, pp. 65-81.
10. Panagiotopoulos, P.D. and Pop, G. (1999), "On a type of hyperbolic variational - hemivariational inequalities", *J. Applied Anal.*, vol. 5, no. 1, pp. 95-112.
11. Yaremenko, M.I. (2008), "Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in $R^l$ and nonlinear semi-groups of contraction in $L^p$", *Materialy konferentsiyi "Dvanadtsyata mizhnarodna naukova konferentsiya imeni akademika M. Kravchuka"* [Conference materials "Twelfth International Conference Academician M. Kravchuk"], Kyiv, May 15-17, 2008, p. 473.
12. Yaremenko, M.I. (2008), "Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in $R^l$ and nonlinear semi-groups of contraction in $L^p$", *Materialy konferentsiyi "International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008)"* [Conference materials "International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008)"], May 12-17, 2008, p. 43.
13. Yanchuk, S., Maistrenko, Yu. and Mosekilde, E. (2001), "Partial synchronization and clustering in a system of diffusively coupled chaotic oscillators", *Math. Comp. Simul.*, vol. 54, pp. 491-508.

 ISSN 2518-1785 (Online), ISSN 2413-6549 (Print)