УДК 519.6:004.021
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-03

# ЕВОЛЮЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

**Вакал Л. П.**
*кандидат технічних наук,*
*старший науковий співробітник*
*Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова*
*пр. Академіка Глушкова, 40, Київ, Україна*
*orcid.org/0000-0002-1658-5432*
*lara.vakal@gmail.com*

**Вакал Є. С.**
*кандидат фізико-математичних наук, доцент,*
*доцент кафедри математичної фізики*
*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*
*вул. Володимирська, 60, Київ, Україна*
*orcid.org/0000-0001-8581-9098*
*jvakal@gmail.com*

***Ключові слова:***
*диференціальні рівняння в частинних похідних, чебишовське наближення, похибка наближення крайових умов, алгоритм диференціальної еволюції, цільова функція, оптимальні значення параметрів.*

У роботі запропоновано еволюційний підхід до розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь еліптичного типу. Він ґрунтується на застосуванні алгоритму диференціальної еволюції. Згідно із цим підходом, замість точного розв'язку задачі, розглядають близьку до нього функцію, яка при будь-яких значеннях параметрів, що входять у неї, точно задовольняє диференціальне рівняння. Найкращі значення невідомих параметрів визначаються так, щоб похибка наближення крайових умов була мінімальною в чебишовській нормі. Одна із суттєвих переваг застосування найкращих чебишовських наближень при розв'язанні крайових задач для рівнянь еліптичного типу полягає в можливості оцінити похибку наближеного розв'язку першої крайової задачі в усій області на основі похибки апроксимації на її границі. Задача мінімізації похибки розглядається як оптимізаційна задача, для її розв'язання застосовується алгоритм диференціальної еволюції. Такий підхід дає змогу розв'язувати як лінійні, так і нелінійні задачі без унесення змін і залучення чисельних методів. Можливі розв'язки задачі мінімізації представляються в алгоритмі у вигляді популяції векторів, компонентами яких є значення параметрів. У кожному поколінні популяції для вектора-мішені створюється мутантний вектор. Над ним виконується операція схрещування з метою отримання пробного вектора. Далі проводиться селекція. Якщо значення цільової функції пробного вектора менше, ніж у вектора-мішені, то він заміняє його в наступному поколінні. Алгоритм завершується, якщо досягнуто задане максимальне число поколінь або відбувається стагнація еволюційного процесу. Алгоритм реалізовано засобами системи Matlab. Надано рекомендації щодо вибору значень основних параметрів налаштування алгоритму (розміру популяції, коефіцієнтів мутації та схрещування). Проведено обчислювальний експеримент із розв'язання за допомогою алгоритму низки крайових задач. Наведено результати для лінійної задачі про скрут-балки й модельної крайової задачі для нелінійного диференціального рівняння з лінійними крайовими умовами. Обчислювальний експеримент підтвердив ефективність застосування запропонованого алгоритму для розв'язання крайових задач.

# EVOLUTIONARY APPROACH TO SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATIONS

**Vakal L. P.**
*Candidate of Technical Sciences,*
*Senior Research Fellow*
*V. M. Glushkov Institute of Cybernetics*
*Academician Glushkov ave., 40, Kyiv, Ukraine*
*orcid.org/0000-0002-1658-5432*
*lara.vakal@gmail.com*

**Vakal Ye. S.**
*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,*
*Associate Professor at the Department of Mathematical Physics*
*Taras Shevchenko National University of Kyiv*
*Volodymyrska str., 60, Kyiv, Ukraine*
*orcid.org/0000-0001-8581-9098*
*jvakal@gmail.com*

***Key words:*** *differential equations in partial derivatives, Chebyshev approximation, approximation error of boundary conditions, differential evolution algorithm, objective function, optimal values of parameters..*

In the paper an evolutionary approach to solving boundary value problems for elliptic differential equations is proposed. It is based on using differential evolution algorithm. According to the approach, instead of an exact solution of the problem, we consider a closed function, which for any values of the parameters included in it, exactly satisfies the differential equation. The best values of unknown parameters are determined so that an approximation error of boundary conditions was minimal in Chebyshev norm. One of the significant advantages of using the best Chebyshev approximations in solving boundary value problems for equations of elliptic type is the ability to estimate the approximate solution error for the first boundary value problem in the whole domain based on the approximation error at its boundary. The problem of error minimization is considered as an optimization problem and the algorithm of differential evolution is used to solve it. The proposed approach allows to solve both linear and nonlinear problems without making changes and using numerical methods. In the algorithm possible solutions of the minimization problem are represented in a form of a population of vectors, components of which are values of the parameters. A mutant vector is created for a target vector in each generation of the population. A crossover operation is performed on the mutant vector to obtain a trial vector. Selection is performed after that. If a value of the objective function of the trial vector is less than a value of the objective function of the target vector, it replaces target vector in a next generation. The algorithm is finished if maximum number of generations is reached or the evolutionary process stagnates. The algorithm is implemented in Matlab system. Recommendations for choosing values of the main parameters of the algorithm settings (population size, mutation constatnt and crossover constant) are given. A computational experiment on solving a number of boundary value problems has been performed using the algorithm. Results of a linear problem of beam torsion and a model boundary value problem for a nonlinear differential equation with linear boundary conditions are presented. The computational experiment has showed the effectiveness of the proposed algorithm for solving boundary value problems.

**Вступ.** Еволюційні алгоритми (далі – ЕА) – сучасний ефективний інструмент розв'язання оптимізаційних задач. Ідея цих алгоритмів полягає в моделюванні основних еволюційних процесів (мутації, схрещування, селекції) з метою знаходження оптимальних розв'язків складних задач. ЕА успішно застосовуються для розв'язання різноманітних задач, про що свідчать численні публікації в науковій літературі. Що стосується використання ЕА в задачах математичної фізики, то публікацій на цю тему дуже мало [1–5], ідеться в них переважно про крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь. У роботах [1–3] розв'язки цих задач знаходять за допомогою неперервного генетичного алгоритму, у працях [4; 5] – алгоритму диференціальної еволюції. Наведені результати свідчать про ефективність. застосування таких алгоритмів до цього класу задач. Диференціальна еволюція (далі – ДЕ) – це один із кращих ЕА, розроблений Р. Сторном і К. Прайсом [6] для розв'язання задач багатовимірної оптимізації. Цільова функція (критерій оптимізації) в алгоритмі ДЕ може бути нелінійною, недиференційовною й багатоекстремальною. Він простий у реалізації та використанні (має мало параметрів, що потребують налаштування).

Мета роботи – розробити на основі ДЕ ефективний і водночас нескладний у реалізації метод знаходження параметрів наближених розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) еліптичного типу. До таких крайових задач приходять при математичному моделюванні стаціонарних процесів різної фізичної природи, наприклад, рівноваги, теплопровідності, потенціального руху нестисливої рідини, стаціонарних електричних і магнітних полів тощо [7].

**Формулювання задачі.** У випадку двох незалежних змінних $x$ і $y$ крайову задачу для ДРЧП можна записати в такій загальній формі:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0 \text{ в області } D,$$

$$S\left(u, \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right) = 0 \text{ на границі } \Gamma \text{ області } D,$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до $\Gamma$.

Одним із найпоширеніших методів інтегрування крайових задач для ДРЧП є метод Фур'є. Для його застосування істотною є лінійність як диференціального рівняння, так і крайових умов [7].

Лінійна крайова задача для ДРЧП еліптичного типу формулюється так: потрібно знайти функцію $u = u(x, y)$ класу $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, яка в області $D$ задовольняє рівняння:

$$\Delta u + p(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + r(x, y)\, u = f(x, y), \quad (1)$$

а на її межі $\Gamma$ – крайову умову:

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = w(x, y), \quad (2)$$

де $\Delta u$ – оператор Лапласа, $p$, $q$, $r$, $f$, $w$ – неперервні функції, $\alpha$ і $\beta$ – задані числа, причому $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Для наближеного розв'язання крайових задач (1), (2) ефективний підхід запропоновано в роботах Л. Коллатца [8; 9]. Він ґрунтується на використанні апарату найкращої апроксимації функцій декількох змінних. Замість точного розв'язку $u$, розглядають близьку до нього функцію $v(x, y; c_1, \ldots, c_n)$, яка при будь-яких значеннях параметрів $c_1, \ldots, c_n$ точно задовольняє або диференціальне рівняння (перший випадок), або крайові умови (другий випадок). Для функції $v$ намагаються знайти такі значення параметрів $c_1, \ldots, c_n$, при яких вона найкраще (у вибраній нормі) задовольняє крайові умови або, відповідно, найкраще задовольняє диференціальне рівняння.

Розглянемо перший випадок (другий випадок висвітлено у [2]). Функцію $v(x, y; c_1, \ldots, c_n)$, яка при довільних значеннях параметрів $c_1, \ldots, c_n$ точно задовольняє рівняння (1), підставимо в крайові умови (2) й отримаємо:

$$\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n} - w(x, y) = \varepsilon(x, y; c_1, \ldots, c_n), \quad (3)$$

де $\varepsilon$ – функція похибки. Ставиться задача підібрати такі значення параметрів $c_1, \ldots, c_n$, щоб на межі $\Gamma$ похибка $\varepsilon$ була мінімальною у вибраній нормі. Нами обрано чебишовську (рівномірну) норму, використання якої в крайових задачах (1), (2) має певні переваги (див. пояснення нижче).

Покриємо границю $\Gamma$ двовимірною сіткою $E_m = \{(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, m\}$. Тоді задача визначення невідомих параметрів наближеного розв'язку $v$ зводиться до задачі найкращого чебишовського дискретного наближення:

$$\|\varepsilon(x,\ y;\ c_1, \ldots, c_n\| \to \min_{c_1, \ldots, c_n}, \quad (4)$$

$$\|\varepsilon(x,\ y;\ c_1, \ldots, c_n)\| = \max_{i=1,\ldots,m} |\varepsilon(x_i,\ y_i;\ c_1, \ldots, c_n)|. \quad (5)$$

Позначимо через $\rho$ мінімум норми (5). Значення параметрів $c_1, \ldots, c_n$, на яких досягається цей мінімум, називають найкращими або оптимальними.

Варто зазначити, що з урахуванням принципу максимуму для гармонічних функцій [7, с. 213] використання чебишовських наближень дозволяє оцінити похибку наближеного розв'язку першої крайової задачі ($\beta = 0$) у всій області на основі похибки апроксимації на її границі. У цьому проявляється одна із суттєвих переваг застосування найкращих чебишовських наближень при розв'язанні крайових задач для ДРЧП еліптичного типу, де для модуля різниці точного $u$ й наближеного $v$ розв'язків має місце теорема про досягнення максимуму на границі області [10, с. 513].

Ураховуючи складність і громіздкість відповідних алгоритмів найкращого чебишовського наближення функцій декількох змінних [11], а також їх недостатню реалізацію в загальнодоступних математичних пакетах, для практичного знаходження наближеного розв'язку задачі (4) застосуємо запропонований у [12–15] підхід, який не потребує залучення чисельних методів і може використовуватись у випадку як лінійної, так і нелінійної апроксимуючої функції. Він полягає в тому, що задача (4), (5) розглядається як оптимізаційна задача пошуку мінімуму чебишовської норми похибки $\varepsilon$ (глобальний мінімум дорівнює нулю й досягається на точному розв'язку $u$ крайової задачі), і ця оптимізаційна задача розв'язується за допомогою алгоритму ДЕ.

Можливі розв'язки задачі мінімізації (4), (5) представляються в алгоритмі ДЕ у вигляді популяції векторів, компонентами яких є значення параметрів $c_1,\dots,c_n$. Чисельність популяції в процесі еволюції не змінюється, однак при переході до нового покоління змінюється її склад. Для кожного вектора поточного покоління – вектора-мішені – створюється мутантний вектор, над яким виконується операція схрещування. Вектор, отриманий у результаті схрещування, називається пробним. Після цього проводиться селекція: якщо його значення цільової функції менше, ніж у вектора-мішені, то в наступне покоління переходить пробний вектор, у протилежному випадку – вектор-мішень. Послідовність кроків – мутація, схрещування, селекція – повторюється до тих пір, поки не виконається термінальна умова (або умови), наприклад, кількість поколінь досягне заданого максимального числа.

**Алгоритм розв'язання задачі.** Нижче наводиться схема алгоритму ДЕ для пошуку оптимальних значень параметрів наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2).

1. Покладається $G=0$, де $G$ – номер популяції, і генерується початкова популяція векторів $C_i=(c_{i1},\dots,c_{in})$, $i=1,\dots,Np$, де $Np$ – розмір популяції. Координати $c_{i1},\dots,c_{in}$ векторів $C_i$ – випадкові дійсні числа із проміжку $[-1,\ 1]$ (у процесі еволюції значення координат можуть виходити далеко за межі заданого проміжку).

2. Для векторів $C_i$, $i=1,\dots,Np$, початкової популяції обчислюються значення цільової функції за формулою:

$$F(C_i)=\max_{k=1,\dots,m}\varepsilon\,(x_k,y_k;c_{i1},\dots,c_{in})\,. \qquad (6)$$

3. Для вектора-мішені $C_i$ створюється мутантний вектор $\tilde{C}_i$:

$$\tilde{C}_i=C_{r_1}+Fm\cdot(C_{r_2}-C_{r_3})\,,\ i=1,\dots,Np\,,$$

де $r_1$, $r_2$, $r_3$ – випадкові цілі числа із проміжку $[1,\ Np]$, $r_1\neq r_2\neq r_3\neq i$, $Fm\in(0,2]$ – заданий коефіцієнт мутації.

4. Обчислюються координати пробного вектора $\bar{C}_i$ за формулою:

$$\bar{c}_{ij}=\begin{cases}\tilde{c}_{ij}, \text{ якщо } \operatorname{rand}(0,1)\le Cr\vee j=j_{rand}\\ c_{ij}, \text{ якщо } \operatorname{rand}(0,1)> Cr\wedge j\neq j_{rand}\end{cases},\ j=1,\dots,n\,,$$

де $\operatorname{rand}(0,1)$ – випадкове число з інтервалу $(0,1)$, $Cr$ – задана ймовірність схрещування.

5. Для пробного вектора $\bar{C}_i$, $i=1,\dots,Np$ за формулою (6) обчислюється значення цільової функції $F(\bar{C}_i)$.

6. Селекція. Якщо $F(\bar{C}_i)<F(C_i)$, то в наступну популяцію з номером $G+1$ переходить вектор $\bar{C}_i$, інакше – вектор $C_i$.

7. Якщо $G>G_{\max}$, де $G_{\max}$ – задане максимальне число популяцій або виконується умова стагнації еволюційного процесу:

$$\max_{i=1,\dots,NP}F(C_i)-\min_{i=1,\dots,NP}F(C_i)<\delta\cdot\min_{i=1,\dots,NP}F(C_i)\,,$$

то визначається вектор $C_{best}$, який має найменше значення цільової функції в поточній популяції, й алгоритм завершується. За умовчанням $\delta=10^{-4}$. Якщо жодна з указаних умов не виконується, то відбувається перехід на п. 3.

Описаний алгоритм реалізовано засобами системи комп'ютерної математики Matlab [16]. Розмір популяції $Np$, коефіцієнт мутації $Fm$ і ймовірність схрещування $Cr$ є основними параметрами налаштування алгоритму ДЕ. При розв'язанні задачі (1), (2) рекомендується брати $5n\le Np\le 10n$, $0{,}5\le Fm\le 0{,}6$, $0{,}9\le CR\le 1$. Вибір значення параметра $G_{\max}$ залежить від числа $n$, для $n\le 5$ можна взяти $G_{\max}=150-300$.

**Аналіз результатів обчислювального експерименту.** За допомогою системи комп'ютерної математики Matlab виконано обчислювальний експеримент із розв'язання низки крайових задач, для яких відомі точні розв'язки. Нижче наведено приклади їх розв'язання.

Приклад 1. Потрібно знайти розв'язок задачі про скрут балки з поперечним перерізом $D$ (рис. 1):

$$\Delta u(x,y)=-1 \text{ в області } D,$$

$$u(x,y)=0 \text{ на границі } \Gamma. \qquad (7)$$

Границя $\Gamma$ складається з двох відрізків прямих $y=\pm 1$ для $|x|\le 1$ і двох дуг півкіл радіуса 1 із центрами в точках $(-1,\ 0)$ і $(1,\ 0)$ для $|x|\ge 1$ [17, с. 365].

Наближений розв'язок $v(x,y)$ крайової задачі (7) шукаємо у вигляді:

$$v(x,y;c_1,\dots,c_n)=-\frac{x^2+y^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k(x,y)\,, \qquad (8)$$

$$\phi_k(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{2k-2},\ k = \overline{1, n}.$$

Зокрема, перші п'ять функцій $\phi_k$ є такими:

$$\phi_1(x, y) = 1,\ \phi_2(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$\phi_3(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$$

$$\phi_4(x, y) = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6,$$

$$\phi_5(x, y) = x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8.$$

Невідомі параметри $c_1, \ldots, c_n$ визначаємо з умови мінімуму (4), (5). З огляду на властивості симетрії, можна обмежитися чвертю границі $\Gamma$ (рис. 1).

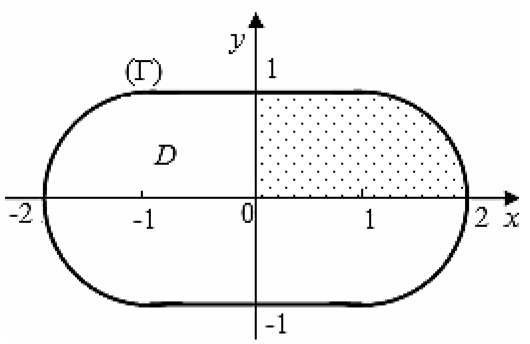


**Рис. 1. Поперечний переріз балки**

Обчислення виконувалися в системі Matlab на сітці $E_{51}$:

$$E_{51} = \begin{cases} (x_i, y_i),\ x_i = 0,05i;\ y_i = 1;\ i = \overline{0, 19}, \\ (x_i, y_i),\ x_i = 1 + \sin(i - 20)\alpha;\ y_i = \cos(i - 20)\alpha;\ \alpha = \pi/60;\ i = \overline{20, 50}. \end{cases}$$

Для випадку $n = 5$ отримано такі значення параметрів наближеного розв'язку (8) і похибки найкращого чебишовського наближення:

$$c_1 = 0{,}4424397;\ c_2 = 0{,}1813411;\ c_3 = -0{,}0139581;$$

$$c_4 = 0{,}0008424;\ \ c_5 = 0{,}0000207;\ \rho = 0{,}0036812.$$

З урахуванням принципу максимуму для гармонічних функцій маємо $|u - v| \le 0{,}0036812$ в усіх точках області $D \cup \Gamma$. Коефіцієнт $c_1$ дає наближене значення для функції $u(x, y)$ у середній точці [17, с. 366]. Має місце оцінка $c_1 - \rho \le u(0, 0) \le c_1 + \rho$, тобто $0{,}43876 \le u(0, 0) \le 0{,}44612$.

Отримані значення параметрів і похибки наближення збігаються з результатами, знайденими за методом найкращого чебишовського наближення функцій декількох змінних узагальненим поліномом [18]. Цей метод досить складний і застосовний тільки у випадках, коли параметри $c_1, \ldots, c_n$ входять у функцію $\varepsilon$ лінійно [11]. Алгоритм ДЕ цього обмеження не має, що демонструє наступний приклад.

Приклад 2. Потрібно знайти розв'язок модельної задачі для нелінійного диференціального рівняння з лінійними крайовими умовами:

$$u \cdot \Delta u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \text{ в області } D, \quad (9)$$

$$u(x, y)\big|_{x=0} = e^{2y},\ u(x, y)\big|_{y=1} = e^{x+2},\ u(x, y)\big|_{x=1} = e^{1+2y},\ u(x, y)\big|_{y=0} = e^{x}. \quad (10)$$

Область $D$ – квадрат зі стороною 1, границя $\Gamma$ – контур цього квадрату.

Наближений розв'язок задачі (9), (10) шукаємо у вигляді:

$$v(x, y; c_1, c_2) = e^{c_1x + c_2y}. \quad (11)$$

Легко перевірити, що функція (11) точно задовольняє диференціальне рівняння (9) для довільних значень параметрів $c_1$ і $c_2$.

У системі Matlab на рівномірній сітці $E_{81}$ із кроком 0,05 по кожній змінній отримані такі значення шуканих параметрів: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Вони відповідають точному розв'язку $u(x, y) = e^{x+2y}$ крайової задачі (9), (10).

**Висновки.** У роботі запропоновано еволюційний підхід до розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь еліптичного типу на основі алгоритму ДЕ. Невідомі параметри наближених розв'язків цих задач визначаються так, щоб похибка наближення крайових умов була мінімальною в чебишовській нормі. Алгоритм ДЕ дає змогу знаходити оптимальні значення параметрів не тільки в лінійному, а й у нелінійному випадках. Результати обчислювального експерименту показали ефективність застосування цього алгоритму для розв'язання крайових задач. У подальшому планується адаптувати алгоритм ДЕ для розв'язання мішаних крайових задач.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Abu-Arqub O., Abo-Hammour Z. Numerical solution of systems of second-order boundary value problems using continuous genetic algorithm. *Information Sciences*. 2014. Vol. 279. P. 396–415.
2. Vakal L.P. Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47. № 8. P. 52–62. URL: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.50.
3. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми як інструмент розв'язання нелінійних крайових задач. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2015. № 14. С. 16–23.
4. Biologically inspired computing framework for solving two-point boundary value problems using differential evolution / M.F. Fateh, A. Zameer, N.M. Mirza, S.M. Mirza, M.A.Z. Raja. *Neural Computing and Applications*. 2017. Vol. 28. P. 2165–2179. URL: https://doi.org/10.1007/s00521-016-2185-z.

5. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв’язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь за алгоритмом диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2020. № 1. С. 43–52.
6. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–35.
7. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ : Либідь, 2001. 336 с.
8. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Москва : Из-во иностр. лит., 1953. 460 с.
9. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения. Москва : Наука, 1978. 272 с.
10. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев : Наук. думка, 1969. 623 с.
11. Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних**.** *Комп’ютерні засоби, мережі та системи*. 2007. № 6. С. 141–148.
12. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48. № 6. P. 49–59. URL: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50.
13. Вакал Л.П. Апроксимація функцій багатьох змінних із застосуванням алгоритму диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2017. № 1. С. 90–96.
14. Vakal L.P. Seeking Optimal Knots for Segment Approximation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48. № 11. P. 68–75. URL: https://doi.org/10.1007/s00521-016-2185-z.
15. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Знаходження оптимальних параметрів емпіричних формул декількох змінних за допомогою еволюційних алгоритмів. *Математичні машини і системи*. 2018. № 3. С. 109–116.
16. Використання математичного пакета Matlab для розв’язування прикладних задач / Б.П. Довгий, Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал, А.В. Попов. Київ : Фітосоціоцентр, 2012. 78 с.
17. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. Москва : Мир, 1969. 447 с.
18. Вакал Л.П. Розв’язання крайових задач з використанням програмних засобів чебишовських наближень. *Комп’ютерні засоби, мережі та системи*. 2010. № 9. С. 47–53.


## REFERENCES


1. Abu-Arqub, O., & Abo-Hammour, Z. (2014). Numerical solution of systems of second-order boundary value problems using continuous genetic algorithm. *Information Sciences*, *279*, 396–415.
2. Vakal, L.P. (2015). Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*, *47*(8), 52–62. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.50.
3. Vakal, L.P. (2015). Henetychni alhorytmy yak instrument rozv’iazannia neliniinykh kraiovykh zadach [Genetic algorithms as a tool for solving nonlinear boundary value problems]. *Komp’yuterni zasoby, merezhi ta systemy*, (14), pp. 16–23 (in Ukrainian).
4. Fateh, M.F., Zameer, A., Mirza, N.M., Mirza, S.M., & Raja, M.A.Z. (2017). Biologically inspired computing framework for solving two-point boundary value problems using differential evolution. *Neural Computing and Applications*, *28*, 2165-2179. https://doi.org/10.1007/s00521-016-2185-z.
5. Vakal, L.P., & Vakal, Ye.S. (2020). Rozviazannia kraiovykh zadach dlia zvychainykh dyferentsialnykh rivnian za alhorytmom dyferentsialnoi evoliutsii [The solution of boundary value problems for ordinary differential equations using the differential evolution algorithm]. *Matematychni mashyny i systemy,* (1), 43–52 (in Ukrainian).
6. Storn, R., & Price, K. (1997). Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11, 341–35.
7. Perestyuk, M.O., & Marynets, V.V. (2001). *Teoriya rivnyan’ matematychnoyi fizyky* [Theory of mathematical physics equations]. Kyiv: Lybid’. (in Ukrainian).
8. Collatz, L. (1953). *Chislennyie metodyi resheniya differentsialnyih uravneniy* [Numerical methods for solving differential equations] Moscow: izdatel’stvo inostrannoj literatury (in Russian).
9. Collatz, L., & Krabs, W. (1978). *Teoriya priblizheniy. Chebyishevskie priblizheniya* [Approximation theory. Chebyshev approximations]. Moscow: Nauka (in Russian).
10. Remez, Ye.Ya. (1969). *Osnovyi chislennyih metodov chebyishevskogo priblizheniya* [Fundamentals of numerical methods for Chebyshev approximation]. Kiev: Naukova dumka (in Russian).
11. Kalenchuk-Porkhanova, A.O., & Vakal, L.P. (2007). Pobudova naikrashchykh rivnomirnykh nablyzhen funktsii bahatokh zminnykh [Constructing the best uniform approximations for many-variables functions]. *Komp’yuterni zasoby, merezhi ta systemy*, (6), 141–148 (in Ukrainian).
12. Vakal, L.P. (2016). Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*, *48*(6). 49–59. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50.

13. Vakal, L.P. (2017). Aproksymatsiia funktsii bahatokh zminnykh iz zastosuvanniam alhorytmu dyferentsialnoi evoliutsii [Approximation of many-variables functions using differential evolution algorithm[. *Matematychni mashyny i systemy,* (1), 90–96 (in Ukrainian).
14. Vakal, L.P. (2016). Seeking Optimal Knots for Segment Approximation. *Journal of Automation and Information Sciences, 48*(11), 68–75. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50.
15. Vakal, L.P., & Vakal, E.S. (2018). Znakhodzhennia optymalnykh parametriv empirychnykh formul dekilkokh zminnykh za dopomohoiu evoliutsiinykh alhorytmiv [Finding optimal parameters of the empirical formulas of several variables using evolutionary algorithms]. *Matematychni mashyny i systemy*, (3). 109–116 (in Ukrainian).
16. Dovgiy, B.P., Vakal, E.S., Vakal, Yu.E., & Popov, A.V. (2012). *Vykorystannya matemat`chnogo paketa matlab dlya rozv'yazuvannya prykladnyh zadach* [Using the matlab math package to solve application problems]. Kyiv: Fitosociocentr (in Ukrainian).
17. Collatz, L. (1969). *Funktsionalnyiy analiz i vyichislitelnaya matematika* [Functional analysis and computational mathematics]. Moscow: Mir (in Russian).
18. Vakal, L.P. (2010). Rozv'iazannia kraiovykh zadach z vykorystanniam prohramnykh zasobiv chebyshovskykh nablyzhen [Solving boundary value problems using software for chebyshev approximations]. *Komp'yuterni zasoby, merezhi ta systemy*, (9), 47–53 (in Ukrainian).