

УДК 519.6

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-04>

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ ІЗ КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Дудик М. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
вул. Садова, 2, Умань, Черкаська обл., Україна
orcid.org/0000-0002-1399-6367
dudik_m@hotmail.com*

Решітник Ю. В.

*кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
вул. Садова, 2, Умань, Черкаська обл., Україна
orcid.org/0000-0002-7937-2880
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua*

Феньків В. М.

*аспірант
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
вул. Садова, 2, Умань, Черкаська обл., Україна
orcid.org/0000-0002-3848-5686
fenkiv@ukr.net*

Ключові слова: міжфазна тріщина, ламана межа розділу, метод Віггардта-Вільямса, показники сингулярності, контакт берегів.

У статті в умовах плоскої деформації досліджуються локальні поля напружень і переміщень біля куткової точки ламаної межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, із якої виходить міжфазна тріщина. Моделюючи тріщину математичним розрізом, береги якого вільні від навантажень, за допомогою методу Віггардта-Вільямса розвинень розв'язків рівнянь теорії пружності за власними функціями, знайшли асимптотичні вирази для компонент градієнтів переміщень і тензора напружень біля вершини тріщини. Отримано характеристичне рівняння для визначення показників сингулярності напружень в околі вершини. Здійснено числовий аналіз залежності показників сингулярності від кута зламу межі розділу й відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів і виявлено існування інтервалів кутів зламу, на яких мають місце два комплексно спряжені показники сингулярності. Оскільки наслідком комплексних значень показників сингулярності є просторові осциляції переміщень берегів з фізично некоректним взаємним перетином, для їх усунення передбачено можливість контакту берегів та отримано наближену оцінку довжини ділянки контакту за найбільшою з відстаней до вершини в межах розмірів тріщини, на якій розкриття тріщини обертається в нуль.

Ураховуючи можливий контакт берегів, за допомогою методу Віггардта-Вільямса розв'язали задачу про міжфазну тріщину із взаємодіючими за законом сухого тертя берегами, яка поширюється з куткової точки ламаної межі розділу матеріалів. Отримано рівняння для визначення показників сингулярності біля точки зламу межі розділу й аналітичні вирази для асимптотик полів напружень і переміщень у її околі. Показано, що наявність контакту берегів усуває можливі просторові осциляції переміщень берегів у рамках моделі розкритої міжфазної тріщини. Проте й у рамках моделі тріщини з контактуючими берегами виявлено інтервали кутів зламу межі розділу, для яких залежно від напрямку зсувних переміщень берегів тріщини мають місце комплексні показники сингулярності.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE NEAR THE TIP OF THE INTERPHACIAL CRACK OUTCOMING FROM ANGULAR POINT OF THE BROKEN INTERPHACE

Dudyk M. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Professor at the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences Training
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
Sadova str., 2, Uman, Cherkasy region, Ukraine
orcid.org/0000-0002-1399-6367
dudik_m@hotmail.com*

Reshitnyk Yu. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Physics and Integrative Technologies
of Natural Sciences Training
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
Sadova str., 2, Uman, Cherkasy region, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7937-2880
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua*

Fenkiv V. M.

*Postgraduate Student
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
Sadova str., 2, Uman, Cherkasy region, Ukraine
orcid.org/0000-0002-3848-5686
fenkiv@ukr.net*

Key words: *interfacial crack,
broken interface,
Wighardt-Williams method,
stress singularity indexes,
faces contact.*

In the article the local fields of stresses and displacements near the corner point of the broken interface between two different homogeneous isotropic materials, from which the interfacial crack emerges, was investigated under the plane strain deformation. The crack is modelled by a mathematical cut with load-free faces. Using the Wieghardt-Williams method of the solutions expansion of the elasticity theory equations in terms of eigenfunctions, asymptotic expressions for the components of the displacement gradients and the stress tensor at the crack tip were found. A characteristic equation for the calculation of singularity indexes of stresses at the vicinity of the vertex was obtained. A numerical analysis of the dependence of singularity indexes on the kink angle of interface and on the ratio of Young's moduli of joined materials was carried out and the existence of kink angles intervals on which two complex conjugate singularity indexes take place was found out. Since the consequence of complex values of the singularity indexes is spatial oscillations of faces displacements with physically incorrect mutual intersection, we provided for the possibility of faces contact to eliminate this oscillations and obtained an approximate estimate of the length of contact area as the largest distance within a crack length, at which the crack opening becomes zero.

Taking into account the possibility of the faces contact and using the Wieghardt-Williams method, the problem of an interfacial crack with the faces interacting according to the law of dry friction, which extends from the corner point of the broken interface, was solved. Analytical expressions for the asymptotes of stresses and displacements fields and equation for the computation of stress singularity indexes near the corner point of the interface were obtained. It is shown that the presence of faces contact eliminates possible spatial oscillations of faces displacements within the framework of the model of an open interfacial crack. However, within the framework of the model of a crack with contacting faces, the intervals of angles of kink of the interface were found, for which complex singularity indexes take place. The presence of these intervals depends on the direction of shear displacements of the faces crack.

Вступ. Більшість досліджень міжфазних тріщин стосується випадку їх розташування на плоскій межі розділу двох різних матеріалів. Водночас бракує аналогічних досліджень більш загального випадку – міжфазних тріщин, розташованих на ламаній межі розділу. Зокрема, P.S. Theocaris та E.E. Gdoutos [1], використовуючи метод комплексних потенціалів Мусхелішвілі, отримали в явному вигляді характеристичні рівняння для показників сингулярності напружень у рамках першої, другої й змішаної основних задач теорії пружності для міжфазної тріщини, що виходить із кутової точки ламаної межі розділу двох різних однорідних матеріалів. Проте автори обмежилися числовими розрахунками показників сингулярності, відмовившись від пошуку аналітичних виразів для локального поля напружень, які необхідні для аналізу НДС і розрахунку параметрів маломасштабних зон передруйнування в околі вершини тріщини. За певних припущень показники сингулярності напружень у вищезгаданих умовах можуть бути визначені в рамках досліджень [2–7] локальних полів напружень в околі спільної вершини багатоклинової гетерогенної системи. Відзначимо також роботи [8–10], у яких за допомогою інтегрального перетворення Мелліна розв’язано задачу про визначення полів напружень і коефіцієнтів інтенсивності в околі розкритої тріщини скінченної довжини, що лежить на межі з’єднання двох клинів з різними пружними сталими, але на певній відстані від їх спільної вершини.

Метою роботи є дослідження локального поля напружень і переміщень біля кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина. Завдання полягає в знаходженні в умовах плоскої деформації за допомогою методу Віггардта-Вільямса асимптотичних виразів для компонент тензора напружень біля вершини тріщини.

1. НДС біля кутової точки ламаної межі розділу матеріалів, із якої виходить розкрита міжфазна тріщина

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі теорії пружності для кусково-однорідного ізотропного тіла дослідимо поведінку напружень біля вершини міжфазної тріщини, яка співпадає з кутовою точкою межі розділу двох різних пружних матеріалів. Із цією метою, дотримуючись загальних положень про поведінку напружень поблизу кутових точок пружних тіл, розглянемо однорідну задачу теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею розділу матеріалів у формі прямолінійних сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін виходить півнескінченна тріщина (рис. 1).

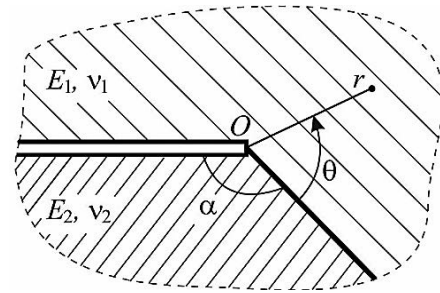


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Виберемо полярну систему координат (r, θ) із початком O у вершині кута зламу межі розділу матеріалів і полярною віссю вздовж лінії з’єднання матеріалів. Припускаючи береги тріщини вільними від навантаження й урахувавши умову неперервності напружень і переміщень на лінії з’єднання матеріалів, доходимо крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^1(r, 0) &= \sigma_{\theta}^2(r, 0), & \tau_{r\theta}^1(r, 0) &= \tau_{r\theta}^2(r, 0), \\ u_{\theta}^1(r, 0) &= u_{\theta}^2(r, 0), & u_r^1(r, 0) &= u_r^2(r, 0), \\ \sigma_{\theta}^1(r, \beta) &= \sigma_{\theta}^2(r, -\alpha) = 0, \\ \tau_{r\theta}^1(r, \beta) &= \tau_{r\theta}^2(r, -\alpha) = 0 \quad (\beta = 2\pi - \alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

де верхні індекси відповідають номеру матеріалу. Оскільки досліджуване тіло є з’єднанням двох пружних клинів, скористаємося методом Віггардта-Вільямса [11; 12] розкладання розв’язків рівнянь теорії пружності за власними функціями й подамо напруження та похідні від переміщень у кожному з матеріалів у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^n(r, \theta) &= r^{\lambda} [a_1^n \sin(\lambda + 2)\theta + a_2^n \sin \lambda\theta + a_3^n \cos(\lambda + 2)\theta + a_4^n \cos \lambda\theta], \\ \tau_{r\theta}^n(r, \theta) &= -\frac{r^{\lambda}}{(\lambda + 2)} [a_1^n (\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + \\ &+ a_2^n \lambda \cos \lambda\theta - a_3^n (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta - a_4^n \lambda \sin \lambda\theta], \\ \sigma_r^n(r, \theta) &= -\frac{r^{\lambda}}{\lambda + 2} [a_1^n (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta + \\ &+ a_2^n (\lambda - 2) \sin \lambda\theta + a_3^n (\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + a_4^n (\lambda - 2) \cos \lambda\theta], \\ \frac{\partial^2 u_{\theta}^n(r, \theta)}{\partial r^2} &= -\frac{1 + \nu_n}{E_n} \frac{\lambda r^{\lambda-1}}{\lambda + 2} [a_1^n (\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + a_2^n (\lambda + 4 - 4\nu_n) \cos \lambda\theta - \\ &- a_3^n (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta - a_4^n (\lambda + 4 - 4\nu_n) \sin \lambda\theta], \\ \frac{\partial u_r^n(r, \theta)}{\partial r} &= -\frac{1 + \nu_n}{E_n} \frac{r^{\lambda}}{\lambda + 2} [a_1^n (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta + \\ &+ a_2^n (\lambda - 2 + 4\nu_n) \sin \lambda\theta + a_3^n (\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + \\ &+ a_4^n (\lambda - 2 + 4\nu_n) \cos \lambda\theta] \end{aligned} \quad ; \quad (2)$$

де $n=1$ для $0 \leq \theta \leq \beta$ і $n=2$ для $-\alpha \leq \theta \leq 0$. Задовольняючи граничні умови (1) за допомогою формул (2), доходимо системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_j^n ($j=1 \div 4$), нетривіальний розв’язок якої вимагає

рівності нулю її детермінанта. Ця умова приводить до характеристичного рівняння задачі для визначення показника λ у функціональній залежності напружень від відстані r до вершини тріщини, яке після розрахунку детермінанта і його алгебраїчних перетворень набуває вигляду:

$$D_0(\lambda) = 0, \quad (3)$$

$$D_0(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 t_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_2 - e^2(1 + \kappa_2)^2 t_3 + 4(e - 1)^2 t_4 + 4e(1 + \kappa_2) \times (e - 1)t_5 + 2e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_2 = \sin^2(\lambda + 1)\beta, \quad t_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\beta,$$

$$t_5 = t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda \cos(\lambda + 1)\beta,$$

$$e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

З (2) випливає, що поведінка напружень біля вершини тріщини матиме сингулярний характер, якщо рівняння (3) матиме корені в смугі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$. Чисельний аналіз рівняння (3) показав, що таких коренів може бути 2 або 3 (рис. 2), отже, поведінку напружень поблизу вершини визначатимуть 2 або 3 сингулярних доданки.

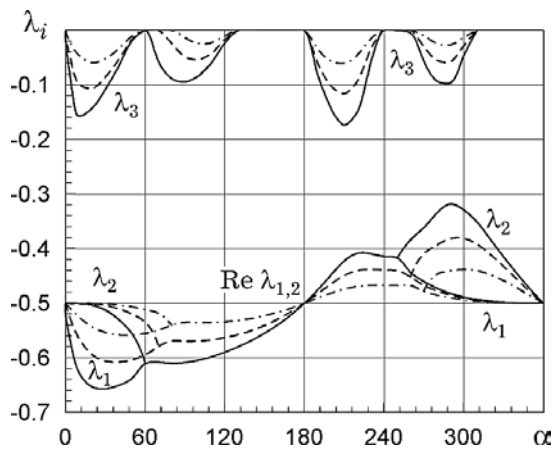


Рис. 2. Залежність показників сингулярності напружень λ_i ($i=1, 2, 3$) від кута зламу межі розділу матеріалів α для $\nu_1=\nu_2=0,3$ і $E_1/E_2=0,1$ (суцільні лінії), $E_1/E_2=0,25$ (штрихові лінії), $E_1/E_2=0,5$ (штрих-пунктирні лінії)

Виявлено також, що існує інтервал кутів зламу ($\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$), на якому рівняння (3) має в смугі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ два комплексно спряжені корені $\lambda_1, \lambda_2 = \overline{\lambda_1} \equiv \lambda_r + i\lambda_m$. Значення $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ для окремих параметрів пружних матеріалів приведені в таблиці 1. У частинному випадку тріщини, що лежить на плоскій межі розділу матеріалів ($\alpha = 180^\circ$), характеристичне рівняння (3) має два комплексно спряжені корені:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\omega, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta_D}{1 + \beta_D}, \quad \beta_D = \frac{(1 + e\kappa_2) - (e + \kappa_1)}{(1 + e\kappa_2) + (e + \kappa_1)}$$

(β_D – параметр Дандерса), що узгоджується з результатами досліджень [13; 14].

Для кожного зі знайдених коренів λ_i рівняння (3) вважатимемо один із коефіцієнтів a_j^n відомим і рівним заданій сталій, а саме: $a_4^n(\lambda_i) = C_i$. Це дає змогу визначити решту коефіцієнтів, виразивши їх через C_j , та отримати шукані формули для локального поля напружень і переміщень біля вершини тріщини, які подамо у вигляді суперпозиції частинних розв’язків задачі:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \sum_i C_i F_1(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i}, \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) = \sum_i C_i F_2(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i},$$

$$\sigma_r(r, \theta) = \sum_i C_i F_3(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i},$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta(r, \theta)}{\partial r^2} = \sum_i C_i F_4(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i - 1}, \quad \frac{\partial u_r(r, \theta)}{\partial r} = \sum_i C_i F_5(\lambda_i, \theta) r^{\lambda_i}$$

$$F_m(\lambda, \theta) = \begin{cases} F_m^1(\lambda, \theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi - \alpha, \\ F_m^2(\lambda, \theta), & -\alpha \leq \theta \leq 0; \end{cases} \quad (m = 1 \div 5)$$

$$F_1^n(\lambda, \theta) = \tilde{a}_1^n(\lambda) \sin(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda) \sin \lambda \theta + \tilde{a}_3^n(\lambda) \cos(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda) \cos \lambda \theta,$$

$$F_2^n(\lambda, \theta) = -\tilde{a}_1^n(\lambda) \cos(\lambda + 2)\theta - \tilde{a}_2^n(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda + 2} \cos \lambda \theta + \tilde{a}_3^n(\lambda) \sin(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda + 2} \sin \lambda \theta,$$

$$F_3^n(\lambda, \theta) = -[\tilde{a}_1^n(\lambda) \sin(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda) \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2} \sin \lambda \theta + \tilde{a}_3^n(\lambda) \cos(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda) \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2} \cos \lambda \theta],$$

$$F_4^n(\lambda, \theta) = -\frac{1 + \nu_n}{E_n} \frac{\lambda}{\lambda + 2} [\tilde{a}_1^n(\lambda)(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)(\lambda + 4 - 4\nu_n) \cos \lambda \theta - \tilde{a}_3^n(\lambda)(\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta - \tilde{a}_4^n(\lambda)(\lambda + 4 - 4\nu_n) \sin \lambda \theta],$$

$$F_5^n(r, \theta) = -\frac{1 + \nu_n}{E_n(\lambda + 2)} [\tilde{a}_1^n(\lambda)(\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)(\lambda - 2 + 4\nu_n) \sin \lambda \theta + \tilde{a}_3^n(\lambda)(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda)(\lambda - 2 + 4\nu_n) \cos \lambda \theta]. \quad (4)$$

Функції $\tilde{a}_j^n(\lambda)$ подано в додатку А. Отже, формули (4) з точністю до сталих C_i , які залежать від конфігурації кусково-однорідного тіла й прикла-

Таблиця 1

Інтервал кутів зламу межі розділу матеріалів, яким відповідають комплексні показники сингулярності

E1/E2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha_{\min}, ^\circ$	61	70	75	79	82	84	86	88	89
$\alpha_{\max}, ^\circ$	252	255	258	260	262	264	266	267	268

дених навантажень, повністю визначають поле напружень і переміщень в околі кутової точки ламаної межі розділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина.

У поведінці напружень при наближенні до вершини тріщини головну роль відіграватимуть доданки, що відповідають найменшим, близьким за величиною кореням λ_1 і λ_2 (рис. 2). Сталі C_1 і C_2 пов'язані з коефіцієнтами інтенсивності напружень у вершині тріщини K_1, K_2 , які визначаються з розв'язку відповідної задачі теорії пружності [15]. У разі комплексно спряжених коренів $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ для отримання дійсних значень напружень і переміщень покладемо $C_1 = \bar{C}_2$ та подамо С1 через комплексний КІН $K = K_1 + iK_2$, як це зазвичай робиться в теорії міжфазних тріщин [16]:

$$C_1 = \bar{C}_2 = (2\pi)^{\lambda_r} (K_1 + iK_2) L^{-i\lambda_m} = (2\pi)^{\lambda_r} |K| L^{-i\lambda_m} \exp(i\psi), \quad (5)$$

де $\psi = \arg K = \arctg(K_2 / K_1)$ – фазовий кут, що характеризує ступінь змішування мод навантаження. Зауважимо, що через відсутність симетрії в будові кусково-однорідного тіла й викликане цим перемішування мод навантаження біля вершини тріщини величини K_1 і K_2 не можуть бути зіставлені коефіцієнтам інтенсивності напружень при розтягу і зсуві, як у теорії тріщин в однорідному матеріалі. У поданні C_1 для уникнення залежності напружень і переміщень від вибору одиниці вимірювання відстані введено множник $L^{-i\lambda_m}$, який містить деякий характерний розмір задачі L , наприклад, довжину тріщини.

У разі комплексно спряжених коренів $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ характеристичного рівняння (3) формули (4) передбачають фізично некоректні просторові осциляції напружень і переміщень при наближенні до вершини тріщини. Проте, як показує досвід численних досліджень міжфазної тріщини на плоскій межі розділу, це не перешкоджає отримувати фізично коректні результати на відстанях від кутової точки, що перевищують ділянку осциляцій, якщо її розміри значно менші за довжину тріщини.

Використовуючи знайдений розв'язок (4), оцінимо розмір ділянку осциляцій за найбільшою відстанню до вершини в межах розмірів тріщини, на якій передбачається взаємний перетин берегів. Припускаючи малість контактної зони порівняно з розмірами тріщини, обмежимося у виразі для $\partial^2 u_0(r, \theta) / \partial r^2$ лише двома доданками, які дають найбільший вклад при $r \rightarrow 0$. Прийемо також вживане в лінійній механіці руйнування припущення, що вершина тріщини є точкою повернення [17], тобто що береги тріщини у вершині мають спільну дотичну. Тоді, згідно з вимогою дійсного характеру напружень і переміщень, отримаємо для нормальної компоненти переміщення вираз:

$$u_0(r, \theta) = 2 \operatorname{Re} \left(C_1 \cdot \frac{F_4(\lambda_1, \theta)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \cdot r^{\lambda_1 + 1} \right),$$

або, враховуючи (5), маємо:

$$u_0(r, \theta) = 2(2\pi)^{\lambda_r} \cdot r^{\lambda_r + 1} \cdot |K| \cdot \left| \frac{F_4(\lambda_1, \theta)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \cos \left(\lambda_m \ln \frac{r}{L} + \psi + \varphi \right),$$

де $\varphi = \arg \frac{F_4(\lambda_1, \theta)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)}$. Визначаючи розкриття тріщини як відносне переміщення її берегів $\delta(r) = -u_0(r, 2\pi - \alpha) + u_0(r, -\alpha)$, отримаємо:

$$\delta(r) = 2(2\pi)^{\lambda_r} r^{\lambda_r + 1} |K| a \cos \left(\lambda_m \ln \frac{r}{L} + \psi + \xi \right),$$

де

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \xi = \arctg(B / A),$$

$$A = \left| \frac{F_4^2(\lambda_1, -\alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \cos \varphi_2 - \left| \frac{F_4^1(\lambda_1, 2\pi - \alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \cos \varphi_1,$$

$$B = \left| \frac{F_4^2(\lambda_1, -\alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \sin \varphi_2 - \left| \frac{F_4^1(\lambda_1, 2\pi - \alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right| \sin \varphi_1,$$

$$\varphi_1 = \arg \left| \frac{F_4^1(\lambda_1, 2\pi - \alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right|, \quad \varphi_2 = \arg \left| \frac{F_4^2(\lambda_1, -\alpha)}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \right|.$$

Через наявність логарифма під знаком косинуса розкриття аперіодично осилує при зміні r , нескінченну кількість раз змінюючи знак. Для $\delta < 0$ це означає фізично неможливий взаємний перетин протилежних берегів тріщини, що трактується як виникнення контакту берегів на відповідних відрізках. Оцінимо довжину всієї ділянки контакту берегів за найбільшою з відстаней $r_m < L$, на якій розкриття обертається в нуль. Прирівнюючи $\delta(r)$ до нуля, знаходимо:

$$r_m = L \cdot \exp \left(\frac{1}{\lambda_m} \left(\frac{\pi}{2} - \psi - \xi \right) \right). \quad (6)$$

Як показує аналіз формули (6), розмір контактної зони залежить від пружних параметрів матеріалів і кута зламу межі поділу, які входять у r_m через λ_m і ξ , і від конфігурації зовнішнього навантаження, яка представлена фазовим кутом ψ . Також із (6) випливає, що нехтування контактною зоною ($r_m \ll L$), яке дає підстави вважати отриманий вище розв'язок прийнятним для аналізу НДС біля вершини тріщини на відстанях $r_m \ll r \ll L$ у разі комплексних показників сингулярності, є можливим при виконанні нерівності $\frac{1}{\lambda_m} \left(\frac{\pi}{2} - \psi - \xi \right) \ll -1$. Порушення цієї умови призводить до появи значної за розмірами контактної зони й вимагає розв'язання задачі, яка від самого початку вимагає врахування ділянки контакту берегів.

2. Вплив контакту берегів на НДС біля вершини міжфазної тріщини

Згідно з висновками п. 2, припускаємо, що частина берегів тріщини перебуває в контакті з тертям за законом Кулона. Для дослідження впливу контакту берегів на локальне поле напружень

біля вершини тріщини знехтуємо скінченністю розмірів ділянки контакту й дійдемо крайової задачі теорії пружності, аналогічної розглянутій вище, із заміною в (1) останніх двох умов такими:

$$\theta = (2\pi - \alpha) \cup (-\alpha): \quad \langle \sigma_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r,\theta} = -\mu \sigma_\theta, \quad \langle u_\theta \rangle = 0$$

($\langle f \rangle$ – стрибок величини f ; μ – коефіцієнт тертя). Розв’язання цієї крайової задачі виконується за допомогою методу Віггардта-Вільямса аналогічно розв’язанню задачі в п. 2 і приводить до наступного характеристичного рівняння для визначення показників сингулярності:

$$D(\lambda) = 0, \quad D(\lambda) = D_1(\lambda) + \mu D_2(\lambda), \quad (7)$$

$$D_1(\lambda) = (1 - e)[0, 5(1 + \kappa_1)D_{11}t_1 - 0, 5e(1 + \kappa_2)D_{12}t_3 + e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)d_3] + e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)D_{13},$$

$$D_2(\lambda) = (1 - e)\{(1 + \kappa_1)D_{21}t_1 - e(1 + \kappa_2)[D_{22}t_3 - (1 + \kappa_1)d_4] + 2(1 - e)^2t_3\} + e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)D_{23},$$

$$D_{11}(\lambda) = (1 - e)d_5 + (1 + \kappa_1) \sin 2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$D_{12}(\lambda) = e(1 + \kappa_2) \sin 2(\lambda + 1)\alpha + (1 - e)d_2,$$

$$D_{13}(\lambda) = \sin^2 \lambda \pi [(1 + \kappa_1)d_7 - e(1 + \kappa_2)d_9];$$

$$D_{21}(\lambda) = (1 - e)d_6 - (1 + \kappa_1)t_2,$$

$$D_{22}(\lambda) = e(1 + \kappa_2)t_4 + (1 - e)d_1,$$

$$D_{23}(\lambda) = \sin^2 \lambda \pi [(1 + \kappa_1) - e(1 + \kappa_2)]d_8;$$

$$d_1 = (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + 3t_4, \quad d_2 = (\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$d_3 = [(\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta] \sin 2(\lambda + 1)(\alpha - \pi) - 2(\lambda + 1) \sin^2 \lambda \pi \sin 2\alpha \cos^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha),$$

$$d_4 = 2[(\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta] \sin^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - 4 \sin^2 \lambda \pi [(\lambda + 1) \sin^2 \alpha \cos^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta],$$

$$d_5 = (\lambda + 1) \sin 2\alpha - \sin 2(\lambda + 1)\beta, \quad d_6 = (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + 3t_2,$$

$$d_7 = (\lambda + 1) \sin \alpha \cos \alpha - \sin(\lambda + 1)\alpha \cos(\lambda + 1)\beta,$$

$$d_8 = (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta,$$

$$d_9 = (\lambda + 1) \sin \alpha \cos \alpha + \cos(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta.$$

У випадку $\alpha = \pi$ рівняння (7) із точністю до несуттєвих множників зводиться до відомого результату М. Комніноу [18]:

$$\cos \lambda \pi + \mu \beta_D \sin \lambda \pi = 0,$$

якому відповідає показник сингулярності $\lambda = -\pi^{-1} \operatorname{arctg} |\mu \beta_D|$.

Згідно з розрахунками, рівняння (7) може мати від 1 до 3 коренів у смугі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$, які визначають сингулярну поведінку напружень при наближенні до вершини тріщини. На рис. 3 показані залежності показників сингулярності λ_1, λ_2 для $E_1/E_2=0,1, \nu_1=\nu_2=0,3$ при $\mu=0$ (суцільна лінія), $\mu=1$ (штрихована лінія) і $\mu=-1$ (штрих-пунктирна лінія); знак μ визначається напрямком зсувних переміщень берегів тріщини. Найменший з цих коренів ν_1 є дійсним для всіх кутів зламу у випадку $\mu \geq 0$, тому напруження біля вершини тріщини мають степеневу особливість і контакт берегів усуває виявлені в п. 2 в рамках класичної моделі міжфазної тріщини просторові осциляції переміщень і напружень біля вершини тріщини при кутах зламу в інтервалі $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$. Проте для $\mu < 0$ на певних інтервалах кутів зламу $(\alpha_{1\min}, \alpha_{1\max})$, що залежать від відношення модулів Юнга з’єднаних матеріалів і коефіцієнта тертя (таблиця 2), показники сингулярності можуть набувати комплексно спряжених значень $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, які обумовлюють фізично некоректні просторові осциляції переміщень (пунктирна ділянка на графіку для $\mu = -1$, рис. 3). Ширина інтервалу прямує до нуля по мірі зближення пружних характеристик матеріалів і зменшення (за модулем) коефіцієнта тертя (таблиця 2). Отримані результати переносяться на випадок $E_1/E_2 > 1$ шляхом одночасних заміन $E_1 \leftrightarrow E_2, \mu \rightarrow -\mu, \alpha \rightarrow 2\pi - \alpha$.

Отже, модель М. Комніноу міжфазної тріщини з контактом берегів не дає однозначного вирішення проблеми осцилюючої сингулярності. Розв’язання цієї проблеми, згідно з комплексною моделлю міжфазної тріщини [19; 20], убачається в урахуванні утворення зони передруйнування в околі вершини тріщини.

Аналогічно п. 2, визначивши коефіцієнти в розвиненнях (2), доходимо виразів (4) для компонент напружень і похідних від переміщень із функціями $\bar{a}_j^n(\lambda)$, поданими в додатку Б, і довільними множниками C_j , у яких закладена можливість урахування зовнішнього навантаження й

Таблиця 2

Інтервал кутів зламу межі розділу, яким відповідають комплексні показники сингулярності біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами ($\nu_1=\nu_2=0,3$)

E_1/E_2	0,1		0,3		0,5		0,7	
μ	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-3	-4
$\alpha_{1\min}^\circ$	264	242	274	252	-	267	-	268
$\alpha_{1\max}^\circ$	316	322	305	312	-	305	-	304

будови конкретного кусково-однорідного тіла. На множник C_1 накладається умова $C_1 F_1(\lambda_1, \theta) < 0$, що відповідає дії стискального нормального напруження на береги тріщини та забезпечує їх контакт.

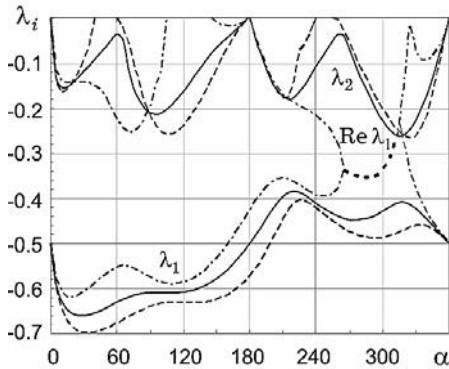


Рис. 3. Залежність показника сингулярності напружень біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами від кута зламу межі розділу

Отриманий розв'язок дає змогу оцінити довжину ділянки контакту берегів за відстанню від вершини, на якій нормальне напруження на берегах тріщини обертається в нуль. Обмежуючись у розвиненні $\sigma_\theta(r, 2\pi - \alpha)$ двома першими доданками, знаходимо:

$$s \approx \left(-\frac{C_1 F_1(\lambda_1, 2\pi - \alpha)}{C_2 F_2(\lambda_2, 2\pi - \alpha)} \right)^{1/(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

Оскільки знайдений вище розв'язок описує локальне поле напружень, використання отриманої оцінки довжини контактної зони обмежено вимогою, що розміри зони повинні бути значно меншими порівняно з довжиною тріщини або

будь-якими іншими актуальними довжинами (відстанями від вершини тріщини до найближчої межі конкретного тіла, до найближчої точки прикладання зовнішніх сил тощо).

Висновки. Виконане дослідження в умовах плоскої деформації напружено-деформованого стану біля вершини розкритої міжфазної тріщини, яка виходить кутової точки ламаної межі розділу двох різних матеріалів, виявило існування інтервалів кутів зламу, на яких мають місце комплексно спряжені показники сингулярності напружень. Їх наслідком є просторові осциляції переміщень берегів з фізично некоректним взаємним перетином, що можуть бути усунуті введенням ділянки контакту берегів. Розв'язок задачі про міжфазну тріщину із взаємодіючими за законом сухого тертя берегами, яка поширюється з кутової точки ламаної межі розділу матеріалів, показав, що наявність контакту берегів усуває можливі просторові осциляції переміщень берегів у рамках моделі розкритої міжфазної тріщини. Проте в рамках моделі тріщини з контактуючими берегами виявлено існування інтервалів кутів зламу межі розділу, для яких залежно від напрямку зсувних переміщень берегів тріщини також мають місце комплексні показники сингулярності.

Знайдені в роботі вирази для полів напружень і переміщень в околі вершини міжфазної тріщини можуть бути використані в рамках лінійної механіки руйнування для дослідження параметрів маломасштабних зон передруйнування і граничних навантажень у кусково-однорідних тілах з ламаною межею розділу матеріалів. Частково ця проблема розв'язана для випадку розкритої тріщини [21–23], проте вона залишається актуальною для випадку тріщини з контактуючими берегами.

Додаток А

Власні функції в розвиненнях компонент напружень і похідних від переміщень біля вершини міжфазної тріщини з вільними від навантаження берегами

$$\begin{aligned} \bar{a}_j^1(\lambda) &= \frac{e(1 + \kappa_2) \cdot \Delta_j^1(\lambda)}{(\lambda + 2) \cdot \Delta(\lambda)} \quad (j = 1 \div 4), \\ \bar{a}_1^2(\lambda) &= \frac{\Delta_1^2(\lambda)}{(\lambda + 2) \cdot \Delta(\lambda)}, \quad \bar{a}_2^2(\lambda) = \frac{\Delta_2^2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \bar{a}_3^2(\lambda) = \frac{\Delta_3^2(\lambda)}{(\lambda + 2) \cdot \Delta(\lambda)}, \quad \bar{a}_4^2(\lambda) = 1; \\ \Delta_1^1 &= e(1 + \kappa_2) [2t_3 \cos(\lambda + 2)\alpha + \lambda t_9] - (1 + \kappa_1) [2t_3 \cos(\lambda + 2)\alpha + \lambda \sin \alpha \cdot t_7 + \\ &+ 2 \sin 2\lambda\pi \sin(\lambda + 2)\beta] + 2(e - 1) [t_3 t_8 - \lambda((\lambda + 2) \sin \alpha \cdot t_6 - \sin 2\lambda\pi \sin \lambda\beta)], \\ \Delta_2^1 &= 2(e - 1) [(\lambda + 2) \sin \alpha \cdot t_6 - \sin 2\lambda\pi \sin \lambda\beta - t_3 \cos(\lambda + 2)\alpha] + \\ &+ (1 + \kappa_1)(\lambda + 2) \sin \alpha \sin(\lambda + 1)\alpha - e(1 + \kappa_2) t_9, \\ \Delta_3^1 &= 2(e - 1) [(\lambda + 2)(\lambda \sin \alpha \cdot t_{10} - 2 \sin(\lambda + 1)\alpha \cdot t_{11}) - t_3 t_{12}] + \\ &+ e(1 + \kappa_2) [2t_3 \sin(\lambda + 2)\alpha - (\lambda + 2) t_{14}] + \\ &+ (1 + \kappa_1) [(\lambda + 2)(t_{14} - \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda + 2)\beta) - 2t_3 \sin(\lambda + 2)\alpha], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_4^1 &= 2(e-1)[t_3 \cdot \sin(\lambda+2)\alpha + 2\sin(\lambda+1)\alpha \cdot t_{11} - \lambda \sin \alpha \cdot t_{10}] + \\
&+ e(1+\kappa_2)t_{14} - (1+\kappa_1)t_{13}, \\
\Delta_2^1 &= e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)[(\lambda+2)t_{15} - 2t_3 \cos(\lambda+2)\alpha] - \\
&- (1+\kappa_1)[(1+\kappa_1) + 4(e-1)t_2] \lambda(\lambda+2) \sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha + \\
&+ 2t_3 [2\lambda(\lambda+2)(e-1)^2 \sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha + e(1+\kappa_2)(e-1)t_8 + \\
&+ e^2(1+\kappa_2)^2 \cos(\lambda+2)\alpha], \\
\Delta_2^2 &= (1+\kappa_1) \{ [(1+\kappa_1) + 4(e-1)t_2] (\lambda+2) \sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha - e(1+\kappa_2)t_9 \} - \\
&- 2(e-1)t_3 [2(e-1)(\lambda+2) \sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha + e(1+\kappa_2) \cos(\lambda+2)\alpha], \\
\Delta_3^2 &= (\lambda+2)(1+\kappa_1)t_{13} [(1+\kappa_1) + 4(e-1)t_2] - \\
&- e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1) [2t_3 \sin(\lambda+2)\alpha + (\lambda+2)t_{16}] - \\
&- 2t_3 [2(\lambda+2)(e-1)^2 t_{13} + e(1+\kappa_2)(e-1)t_{12} - e^2(1+\kappa_2)^2 \sin(\lambda+2)\alpha]; \\
\Delta &= 2(e-1)t_3 [2(e-1)t_{13} + e(1+\kappa_2) \sin(\lambda+2)\alpha] + e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)t_{14} - \\
&- (1+\kappa_1)t_{13} [4(e-1)t_2 + (1+\kappa_1)]; \\
t_6 &= \cos 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) \sin(\lambda+1)\beta + \sin(\lambda+1)\alpha, \\
t_7 &= \lambda \sin(\lambda+1)\alpha - 2 \sin(\lambda+1) \cos 2\lambda\pi, \\
t_8 &= (\lambda+2) \cos \lambda\alpha - 2 \cos(\lambda+2)\alpha, \\
t_9 &= (\lambda+2) \sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha - \sin 2\lambda\pi \sin \lambda\beta, \\
t_{10} &= \sin(\lambda+1)\beta \sin 2(\lambda+1)\beta, \quad t_{11} = \sin(\lambda+1)\beta \sin \lambda\beta, \\
t_{12} &= (\lambda+2) \sin \lambda\alpha + 2 \sin(\lambda+2)\alpha, \\
t_{13} &= \lambda \sin \alpha \cos(\lambda+1)\alpha - \sin \lambda\alpha, \quad t_{14} = \lambda \sin \alpha \cos(\lambda+1)\alpha + \sin \lambda\beta \cos 2\lambda\pi, \\
t_{15} &= \lambda \sin \alpha \sin(\lambda+1)\alpha - \sin 2\lambda\pi \sin(\lambda+2)\beta, \\
t_{16} &= (\lambda+2) \sin \alpha \cos(\lambda+1)\alpha + \cos 2\lambda\pi \sin(\lambda+2)\beta.
\end{aligned}$$

Додаток Б

**Власні функції в розвиненнях компонент напружень і похідних від переміщень
біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами**

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_1^2(\lambda) &= \Delta_{12}(\lambda)B_1(\lambda) - \Delta_{22}(\lambda)B_2(\lambda) + \Delta_{32}(\lambda)B_3(\lambda), \\
\tilde{a}_2^2(\lambda) &= -\Delta_{11}(\lambda)B_1(\lambda) + \Delta_{21}(\lambda)B_2(\lambda) - \Delta_{31}(\lambda)B_3(\lambda), \\
\tilde{a}_3^2(\lambda) &= \Delta_{14}(\lambda)B_4(\lambda) + \Delta_{24}(\lambda)B_5(\lambda) + \Delta_{34}(\lambda)B_6(\lambda), \\
\tilde{a}_4^2(\lambda) &= -(\Delta_{13}(\lambda)B_4(\lambda) + \Delta_{23}(\lambda)B_5(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda)B_6(\lambda)); \\
\tilde{a}_1^1(\lambda) &= \frac{1}{(1+\kappa_1)} \left[\tilde{a}_1^2(\lambda)((1+\kappa_1) + \lambda(1-e)) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{a}_2^2(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda+2} ((1+\kappa_1) + \lambda(1-e) - e(1+\kappa_2)) \right], \\
\tilde{a}_2^1(\lambda) &= \frac{1}{(1+\kappa_1)} \left[-\tilde{a}_1^2(\lambda)(\lambda+2)(1-e) - \tilde{a}_2^2(\lambda)(\lambda(1-e) - e(1+\kappa_2)) \right], \\
\tilde{a}_3^1(\lambda) &= \frac{1}{(1+\kappa_1)} \left[\tilde{a}_3^2(\lambda)((1+\kappa_1) - (\lambda+2)(1-e)) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{a}_4^2(\lambda)((1+\kappa_1) - (\lambda+2)(1-e) - e(1+\kappa_2)) \right], \\
\tilde{a}_4^1(\lambda) &= \frac{1}{(1+\kappa_1)} \left[\tilde{a}_3^2(\lambda)(\lambda+2)(1-e) + \tilde{a}_4^2(\lambda)((\lambda+2)(1-e) + e(1+\kappa_2)) \right]; \\
\Delta_{11}(\lambda) &= (\lambda+2) [\cos(\lambda+2)\alpha + \mu \sin(\lambda+2)\alpha], \\
\Delta_{12}(\lambda) &= \lambda \cos \lambda\alpha + \mu(\lambda+2) \sin \lambda\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{13}(\lambda) &= (\lambda + 2) [\sin(\lambda + 2)\alpha - \mu \cos(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{14}(\lambda) &= \lambda \sin \lambda \alpha - \mu(\lambda + 2) \cos \lambda \alpha; \\
\Delta_{21}(\lambda) &= (1 - e)(\lambda + 2) [\cos \lambda \beta - \cos(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{22}(\lambda) &= [\lambda(1 - e) - e(1 + \kappa_2)] (\cos \lambda \beta - \cos \lambda \alpha), \\
\Delta_{23}(\lambda) &= (1 - e)(\lambda + 2) [\sin \lambda \beta - \sin(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{24}(\lambda) &= (1 - e) [(\lambda + 2) \sin \lambda \beta - \lambda \sin \lambda \alpha] + e(1 + \kappa_2) (\sin \lambda \alpha + \sin \lambda \beta); \\
\Delta_{31}(\lambda) &= (1 - e) \delta_{11}(\lambda) + (1 + \kappa_1) [\sin(\lambda + 2)\beta + \sin(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{32}(\lambda) &= \frac{(1 - e) - e(1 + \kappa_2)}{\lambda + 2} \delta_{11}(\lambda) + \frac{1 + \kappa_1}{\lambda + 2} [\lambda \sin(\lambda + 2)\beta + (\lambda + 2) \sin \lambda \alpha], \\
\Delta_{33}(\lambda) &= (1 - e)(\lambda + 2) \delta_{12}(\lambda) + (1 + \kappa_1) [\cos(\lambda + 2)\beta - \cos(\lambda + 2)\alpha], \\
\Delta_{34}(\lambda) &= [(\lambda + 2)(1 - e) + e(1 + \kappa_2)] \delta_{12}(\lambda) + (1 + \kappa_1) [\cos(\lambda + 2)\beta - \cos \lambda \alpha]; \\
B_1(\lambda) &= (1 - e)^2 B_{11}(\lambda) - e(1 + \kappa_2)(1 - e) B_{12}(\lambda) + (1 + \kappa_1)(1 - e) B_{13}(\lambda) - \\
&\quad - e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) B_{14}(\lambda), \\
B_{11}(\lambda) &= -(\lambda + 2) \delta_{12}(\lambda) \delta_{13}(\lambda), \quad B_{12}(\lambda) = (\lambda + 2) [\sin \lambda \alpha + \sin(\lambda + 2)\alpha] \delta_{12}(\lambda), \\
B_{13}(\lambda) &= -[(\lambda + 2) \sin \lambda \beta \delta_{22}(\lambda) + \cos(\lambda + 2) \beta \delta_{23}(\lambda)] + \delta_{32}(\lambda), \\
B_{14}(\lambda) &= (\sin \lambda \alpha + \sin \lambda \beta) [\cos(\lambda + 2)\beta - \cos(\lambda + 2)\alpha]; \\
B_2(\lambda) &= (1 - e) B_{21}(\lambda) + e(1 + \kappa_2) B_{22}(\lambda) + (1 + \kappa_1) B_{23}(\lambda), \\
B_{21}(\lambda) &= (\lambda + 2) [\delta_{23}(\lambda) + \mu(\lambda + 2) \delta_{22}(\lambda)] \delta_{12}(\lambda), \\
B_{22}(\lambda) &= (\lambda + 2) [\sin(\lambda + 2)\alpha - \mu \cos(\lambda + 2)\alpha] \delta_{12}(\lambda), \\
B_{23}(\lambda) &= [\delta_{23}(\lambda) + \mu(\lambda + 2) \delta_{22}(\lambda)] \cos(\lambda + 2)\beta - \delta_{32}(\lambda); \\
B_3(\lambda) &= (1 - e) B_{31}(\lambda) + e(1 + \kappa_2) B_{32}(\lambda), \\
B_{31}(\lambda) &= (\lambda + 2) [[\delta_{32}(\lambda) + \mu(\lambda + 2) \delta_{22}(\lambda)] \sin \lambda \beta - \mu \delta_{32}(\lambda)], \\
B_{32}(\lambda) &= (\lambda + 2) (\sin \lambda \beta + \sin \lambda \alpha) [\sin(\lambda + 2)\alpha - \mu \cos(\lambda + 2)\alpha]; \\
B_4(\lambda) &= (1 - e) [(1 - e)\lambda - e(1 + \kappa_2)] B_{41}(\lambda) + (1 + \kappa_1) B_{42}(\lambda) + \\
&\quad + e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1) B_{43}(\lambda), \\
B_{41}(\lambda) &= \delta_{11}(\lambda) \delta_{22}(\lambda), \quad B_{42}(\lambda) = \lambda \sin(\lambda + 2)\beta \delta_{22}(\lambda) - \cos \lambda \beta \delta_{21}(\lambda) - \delta_{31}(\lambda), \\
B_{43}(\lambda) &= [\sin(\lambda + 2)\alpha + \sin(\lambda + 2)\beta] (\cos \lambda \beta - \cos \lambda \alpha); \\
B_5(\lambda) &= (1 - e) B_{51}(\lambda) + e(1 + \kappa_2) B_{52}(\lambda) + (1 + \kappa_1) B_{53}(\lambda), \\
B_{51}(\lambda) &= [\lambda \delta_{22}(\lambda) - \mu \delta_{21}(\lambda)] \delta_{11}(\lambda), \\
B_{52}(\lambda) &= [\cos(\lambda + 2)\alpha + \mu \sin(\lambda + 2)\alpha] \delta_{11}(\lambda), \\
B_{53}(\lambda) &= [\lambda \delta_{22}(\lambda) - \mu \delta_{21}(\lambda)] \sin(\lambda + 2)\beta - \delta_{31}(\lambda); \\
B_6(\lambda) &= (1 - e) B_{61}(\lambda) - e(1 + \kappa_2) B_{62}(\lambda), \\
B_{61}(\lambda) &= (\lambda + 2) [-[\lambda \delta_{22}(\lambda) - \mu \delta_{21}(\lambda)] \cos \lambda \beta + \mu \delta_{31}(\lambda)], \\
B_{62}(\lambda) &= (\lambda + 2) (\cos \lambda \beta - \cos \lambda \alpha) [\cos(\lambda + 2)\alpha + \mu \sin(\lambda + 2)\alpha]; \\
\delta_{11}(\lambda) &= \lambda \sin(\lambda + 2)\beta - (\lambda + 2) \sin \lambda \beta, \quad \delta_{12}(\lambda) = \cos \lambda \beta - \cos(\lambda + 2)\beta, \\
\delta_{13}(\lambda) &= (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\beta - \lambda \sin \lambda \beta; \\
\delta_{21}(\lambda) &= \lambda \sin(\lambda + 2)\alpha - (\lambda + 2) \sin \lambda \alpha, \quad \delta_{22}(\lambda) = \cos \lambda \alpha - \cos(\lambda + 2)\alpha, \\
\delta_{23}(\lambda) &= (\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)\alpha - \lambda \sin \lambda \alpha; \\
\delta_{31}(\lambda) &= -(\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha, \\
\delta_{32}(\lambda) &= (\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha.
\end{aligned}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Theocaris P.S., Gdoutos E.E. Stress singularities in cracked composite full-planes. *Int. J. Fract.* 1977. Vol. 13. № 6. P. 763–773.
2. Махоркін М., Сулим Г. Асимптотики і поля напружень у клиновій системі за умов антиплоскої деформації. *Машинознавство*. 2007. № 1. С. 8–13.
3. Carpinteri A., Paggi M. Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. *Eng. Fract. Mech.* 2007. Vol. 74. P. 59–74.
4. Djoković J.M., Nikolić R.R., Ulewicz R., Hadzima B. Interface crack approaching a three-material joint. *Appl. Sci.* 2020. Vol. 10. P. 416.
5. Linkov A.M., Koshelev V.F. Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponent and angular distribution. *Int. J. Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. P. 5909–5930.
6. Luo Y., Subbarayan G. A study of multiple singularities in multi-material wedges and their use in analysis microelectronic interconnect structures. *Eng. Fract. Mech.* 2007. Vol. 74. P. 416–430.
7. Pageau S.S., Gadi K.S., Biggers S.B., Joseph P.F. Standardized complex and logarithmic eigensolutions for n -material wedges and junctions. *Int. J. Eng. Fract.* 1996. Vol. 77. P. 51–76.
8. Вальшенбаум В.М., Гольдштейн Р.В., Холмянский М.Л. Плоская задача о трещине на границе соединения двух упругих клиньев. *Механика тв. тела*. 1980. № 5. С. 77–85.
9. Srivastava K.N., Choudhary A., Palaiya R.M. Mellin transform technique for solving Griffith crack problem at the interface of two bonded dissimilar wedges. *Indian J. of Pure and Appl. Mathematics*. 1979. Vol. 10. № 2. P. 147–157.
10. Srivastava K.N., Palaiya R.M., Choudhary A. On a Griffith crack at the interface of two bonded dissimilar elastic wedges. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1979. Vol. 59. № 11. P. 643–646.
11. Wieghardt K. Über das spalten und zerreißen elastischer Körper. *Z. Math. Phys.* 1907. B. 55. S. 60–103.
12. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1952. Vol. 19. № 4. P. 526–535.
13. Williams M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1959. Vol. 49. P. 199–204.
14. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32. № 2. P. 403–410.
15. Дудик М.В. Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина. *Вісник Тернопільського нац. техн. ун-ту*. 2014. № 3 (75). С. 87–98.
16. Rice J.R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55. № 3. P. 98–103.
17. Гузь А.Н. О физически некорректных результатах механики разрушения. *Прикладная механика*. 2009. Т. 45. № 10. С. 4–21.
18. Comninou M. Interface crack with friction in the contact zone. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1977. Vol. 44. P. 780–781.
19. Каминский А.А., Кипнис Л.А. О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред. *Доповіді НАН України*. 2010. № 2. С. 59–63.
20. Каминский А.А., Кипнис Л.А. О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред. *Доповіді НАН України*. 2011. № 1. С.38-43.
21. Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В. Развитие зоны переддуринування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2011. Т. 54. № 2. С. 103–114.
22. Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В. Дослідження початкового етапу повороту міжфазної тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2011. Т. 47. № 5. С. 53–59.
23. Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В. Дослідження впливу пластичності матеріалів на міцність композитного з'єднання. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2013. Т. 56. № 1. С. 71–83.

REFERENCES

1. Theocaris P. S., Gdoutos E. E. (1977) Stress singularities in cracked composite full-planes. *Int. J. Fract.*, vol.13, no. 6, pp. 763–773.
2. Makhorkin M., Sulym G. (2007) Asymptotyky i polja napruzenj u klynovij systemi za umov antyplokoji deformaciji [Stresses asymptotics and fields in the wedge system in condition antipflat deformation]. *Mechanical Engineering*, no. 1, pp. 8–13.

3. Carpinteri A., Paggi M. (2007) Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 74, pp. 59–74.
4. Djoković J. M., Nikolić R. R., Ulewicz R., Hadzima B. (2020) Interface crack approaching a three-material joint. *Appl. Sci.*, vol.10, p. 416.
5. Linkov A. M., Koshelev V. F. (2006) Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponent and angular distribution. *Int. J. Solids and Structures*, vol. 43, pp. 5909–5930.
6. Luo Y., Subbarayan G. (2007) A study of multiple singularities in multi-material wedges and their use in analysis microelectronic interconnect structures. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 74, pp. 416–430.
7. Pageau S. S., Gadi K. S., Biggers S. B., Joseph P. F. (1996) Standardized complex and logarithmic eigen-solutions for n -material wedges and junctions. *Int. J. Eng. Fract.*, vol.77, pp. 51–76.
8. Walshenbaum V. M., Goldstein R. V., Kholmyansky M. L. (1980) Ploskaya zadacha o treshchine na granitse soedineniya dvukh uprugikh klin'ev [Plane problem of a crack at the interface between two elastic wedges]. *Solid body mechanics*, no. 5, pp. 77–85.
9. Srivastava K. N., Choudhary A., Palaiya R. M. (1979) Mellin transform technique for solving Griffith crack problem at the interface of two bonded dissimilar wedges. *Indian J. of Pure and Appl. Mathematics*, vol. 10, no. 2, pp. 147–157.
10. Srivastava K. N., Palaiya R. M., Choudhary A. (1979) On a Griffith crack at the interface of two bonded dissimilar elastic wedges. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 59, no. 11, pp. 643–646.
11. Wieghardt K. (1907) Über das spalten und zerreißen elastischer Körper. *Z. Math. Phys.*, B. 55, S. 60–103.
12. Williams M. L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 19, no. 4, pp. 526–535.
13. Williams M. L. (1959) The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 49, pp. 199–204.
14. Erdogan F. (1965) Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 32, no. 2, pp. 403–410.
15. Dudyk M. V. (2014) Doslidzhennja napruzhenno-deformovanogho stanu bilja kutovoji tochky mezhi podilu materialiv, z jakoji vykhodytj mizhfazna trishhyna [Investigation of the stress-strain state near the corner point of interface, from which the interfacial crack is initiated]. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*, no. 3 (75), pp. 87–98.
16. Rice J. R. (1988) Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 55, no. 3, pp. 98–103.
17. Guz A. N. (2009) On physically incorrect results in fracture mechanics. *Int. Appl. Mech.*, vol. 45, pp. 1041–1051.
18. Comninou M. (1977) Interface crack with friction in the contact zone. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp.780–781.
19. Kaminsky A. A., Kipnis L. A. (2010) O kompleksnoy modeli zony predrazrusheniya v kontse treshchiny na granitse razdela uprugikh sred [On a complex model of the pre-fracture zone at the end of a crack on the interface of elastic media]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, no. 2, pp. 59–63.
20. Kaminsky A. A., Kipnis L. A. (2011) O stragivanii treshchiny, raspolozhennoy na granitse razdela uprugikh sred [On the start of a crack on the interface of elastic media]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, no. 1, pp. 38–43.
21. Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. (2012) Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 184, no. 2, pp. 121–135.
22. Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. (2012) Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media. *Materials Science*, vol. 47, no. 5, pp. 627–635.
23. Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. (2014) Investigation of the influence of plasticity of materials on the strength of a composite joint. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 201, no. 1, pp. 83–98.