УДК 519.8
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-05

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ З ОБМЕЖЕННЯМИ-ПОЛІРОЗМІЩЕННЯМИ НА СТРАТЕГІЇ ОДНОГО ГРАВЦЯ: ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ТИПУ БРАУНА-РОБІНСОН

Ємець О. О.
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики
Полтавський університет економіки і торгівлі
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна
orcid.org/0000-0001-9248-9234
yemetsli@ukr.net

Ємець О. О.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики
Полтавський університет економіки і торгівлі
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна
orcid.org/0000-0001-9248-9234
yemets2008@ukr.net

Поляков І. М.
аспірант кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики
Полтавський університет економіки і торгівлі
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна
orcid.org/0000-0003-3273-1206
polyakov_ivan_m@ukr.net

Ключові слова: *комбінаторні ігрові задачі, ітераційні методи, метод типу Брауна-Робінсон, поліразміщення, теорія ігор, комбінаторна оптимізація, задачі евклідової комбінаторної оптимізації.*

У статті розглядається така ігрова задача. У регіоні існують і працюють два конкуренти – великі виробники хлібної продукції. Є певна кількість населених пунктів регіону, де є фірмові магазини 1-го виробника, і певна кількість населених пунктів, де є фірмові магазини 2-го виробника. Продукція вважається швидкореалізовуваною. Тому проблема визначення кількості продукції, що розвозиться, виникає щоденно. Першому виробнику в певному місті потрібна відома кількість автомобілів, якими продукція щоранку буде розвозитися в таку ж кількість фірмових магазинів. Автомобілі пропонується вибрати з деякою більшої, ніж потрібно, кількості в цьому місті. Уважається, що вчорашня продукція або реалізована, або непридатна для вживання. Будемо вважати, що другий виробник може розвозити у свої фірмові магазини (які розташовуються в регіоні) таку кількість продукції, яку вважає за потрібне. Прибуток обох підприємців залежить від обсягу хлібної продукції, що завозиться, у кожний фірмовий магазин. Обидва виробники прагнуть отримати якомога більший прибуток, тому вони прагнуть максимально збільшити різницю між своїм прибутком і прибутком конкурента.
У статті для задачі побудована ігрова модель комбінаторного типу з використанням множини поліразміщень, якими є стратегії першого гравця. Для першого гравця його задача є задачею комбінаторної оптимізації на поліразміщеннях. Для другого гравця його задача схожа на задачу гравця у звичайних матричних іграх. Розглядається випадок наявності й відсутності сідлової точки в ігровій моделі. У разі відсутності сідлової точки шукаються мішані стратегії гравців.
Для цього запропоновано метод типу Брауна-Робінсон. При цьому розігрується гра. Один гравець має звичайні мішані стратегії, а інший гравець як стратегії має вибір з елементу з множини поліразміщень. Кроки гравці роблять один за одним. Розраховуються накопичені платежі, за якими й визначається наближений розв'язок гри. Алгоритм цього методу викладено як у табличній формі, зручній для сприйняття, так і у формі, зручній для програмування. Цей метод ілюструється числовим прикладом.

SOLVING OF GAME PROBLEMS WITH RESTRICTIONS-POLYARRANGEMENTS ON STRATEGIES OF ONE PLAYER: ITERATION METHOD TYPE BROWN-ROBINSON

Yemets O. O.
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Chief of the Department of Mathematical Simulation and Social Informatics
Poltava University of Economics and Trade, Poltava, Ukraine
Kovalya str., 3, Poltava, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9248-9234
yemetsli@ukr.net

Yemets O. O.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematical Simulation and Social Informatics
Poltava University of Economics and Trade, Poltava, Ukraine
Kovalya str., 3, Poltava, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9248-9234
yemets2008@ukr.net

Polyakov I. M.
Postgraduate Student at the Department of Mathematical Simulation and Social Informatics
Poltava University of Economics and Trade, Poltava, Ukraine
Kovalya str., 3, Poltava, Ukraine
orcid.org/0000-0003-3273-1206
polyakov_ivan_m@ukr.net

Key words: *combinatorial gaming problems, iteration methods, method type Brown-Robinson, polyarrangements, game theory, combinatorial optimization, Euclidean combinatorial optimization problems.*

Such a game problem is considered in the article. There are two rivals in the region, large producers of bread products. There are a number of settlements in the region, where there are chain stores of the 1st producer, and a certain number of settlements, where there are chain stores of the 2nd producer. Products are considered to be rapidly sold. Therefore, the problem of determining the quantity of products transported occurs on a daily basis. The first producer in a certain city needs a known number of cars, which products will be shipped to the same number of chain stores every morning. Cars are offered to choose with some more than the required amount in this city. It is considered that yesterday's products are either realized or unsuitable to use. We will assume that the second producer can bring to its chain stores (located in the region) the number of products that it thinks fit. The profits of both entrepreneurs depend on the volume of imported cereal products in each chain store. Both producers seek to get as much profit as possible, so they seek to maximize the difference between their profits and the profit of a competitor. In the article for this problem a game model of a combinatorial type is constructed using a sets of polyarrangements which are the strategies of the first player. For the first player, his task is the task of combinatorial optimization on polyarrangements. For a second player, his task is similar to the task of the player in ordinary matrix games. The case of presence and absence of a saddle point in the gaming model is considered. Mixed combinations of strategies are being searched for in the case of the absence of a saddle point.
For this purpose, the method of Brown-Robinson type is proposed. The game is being played. One player has the usual mixed strategies, and the other player as a strategy has a choice of an element from the set of polyarrangements. The players take steps one after another. Accumulated payments are calculated, which determine the approximate solution of the game. The algorithm of this method is presented in tabular form, convenient for perception, and in the form convenient for programming. This method is illustrated by a numerical example.

Вступ. У роботах [1–8] розглядаються задачі комбінаторної оптимізації, які важливі тим, що є моделями складних задач у різних галузях: прийняття рішень, розкрій матеріалів, розташування об'єктів, планування, проектування тощо.

Ю.Г. Стоян виокремив із них клас так званих задач евклідової комбінаторної оптимізації (дивись, зокрема, [7; 8]). Моделі й методи розв'язування задач цього класу стрімко розвиваються. Стаття присвячена одному новому типу таких задач і їх розв'язанню.

Огляд літератури. Ігрові задачі, у яких наявні комбінаторні обмеження на стратегії, починають розглядатися в праці [9] і подальших роботах О.О. Ємця та Н.Ю. Устьян. Від класичних матричних ігор вони відрізняються тим, що вектор, який є мішаною стратегією, належить множині перестановок або розміщень із певної мультимножини ймовірностей. Далі такі задачі досліджуються в роботах О.О. Ємця та О.В. Ольховської (дивись, зокрема, [10]).

Але, як показує матеріал статті, є й більш складні комбінаторні обмеження, які накладаються на мішані стратегії. Такі задачі, де б ці стратегії були полірозміщеннями чи полісполученнями, не розглядалися й не розв'язувалися раніше, хоча відомі більш пізні [11] роботи, присвячені ігровим задачам комбінаторного типу.

Отже, актуальною є задача, що розглядається в статті. Математичною моделлю цієї задачі є задача теорії ігор, де мішана стратегія є полірозміщенням (або полісполученням).

Запропоновано наближено розв'язувати таку задачу ітераційним методом типу Брауна-Робінсон.

Виклад основного матеріалу.

1. Постановка ігрової комбінаторної задачі та її модель на полікомбінаторних множинах

Задача. У регіоні існують і працюють два конкуренти – великі виробники хлібної продукції. Є s населених пунктів регіону, де є фірмові магазини 1-го, і σ – населених пунктів, де є фірмові магазини 2-го виробника. Продукція вважається швидкореалізовуваною. Тому проблема визначення кількості продукції, що розвозиться, виникає щоденно. Першому виробнику в місті з номером i потрібно k_i автомобілів, якими продукція щоранку буде розвозитися в k_i фірмових магазинів. На вибір пропонується n_i автомобілів в місті i ($n_i \ge k_i \ge 1$). Уважаємо, що вчорашня продукція або реалізована, або непридатна для вживання.

Будемо вважати, що другий виробник може розвозити у свої n фірмових магазинів (які розташовуються в регіоні) таку кількість продукції, яку вважає за потрібне. Прибуток обох підприємців залежить від обсягу хлібної продукції, що завозиться, у кожний фірмовий магазин.

Обидва виробники прагнуть отримати якомога більший прибуток, тому прагнуть максимально збільшити різницю між своїм прибутком і прибутком конкурента. Складемо матрицю $A' = (a'_{i,j})$, де $a'_{i,j}$ – це різниця прибутків другого і першого виробників, у тому разі якби перший виробник отримував весь прибуток за умови реалізації продукції в магазині i_t населеного пункту t, $i_t \in \{1, 2, ..., k_i\}$; $t \in \{1, 2, ..., s\} = J_s$; а другий виробник отримував би весь прибуток за умови реалізації в магазині j.

Нехай P_i^x вектор $P_i^x = (P_{i1}^x, ..., P_{ij}^x, ..., P_{in_i}^x)$, де P_{ij}^x – відношення кількості продукції, яку можна відвести в i-му місті j-им із запропонованих автомобілів, до загальної кількості продукції, що виробляє перший виробник для міста i, $j \in J_{n_i}$; $i \in J_s$. Очевидно, $P_{ij}^x \ge 0$.

Позначимо

$$m_0 = 0,\ k_0 = 0;\ m_i = m_{i-1} + k_{i-1} \quad \forall i \in J_s. \tag{1}$$

Нехай $X_i = (x_{m_i+1}, ..., x_{m_i+j}, ..., x_{m_i+k_i})$ – вектор, що визначає обсяги розвезення продукції першим виробником і x_{m_i+j} – j-та координата X_i – є частиною продукції, що завезена в j-ий магазин i-ого населеного пункту. Нехай визначено, що в кожен магазин першого виробника буде завозити продукцію один автомобіль, який запропоновано з n_i автомобілів для i-го населеного пункту. Це дає змогу записати таку комбінаторну умову на вектор X_i:

$$X_i \in E_{n_i \nu_i}^{k_i}(P_i^x) \qquad \forall i \in J_s, \tag{2}$$

де ν_i – кількість різних елементів у P_i^x, тобто кількість елементів основи мультимножини P_i^x, або $\nu_i = |S(P_i^x)|$, а $E_{n_i \nu_i}^{k_i}(P_i^x)$ – евклідова множина розміщень [7].

Якщо позначити G – суму мультимножин P_i^x, тобто $G = \sum_{i=1}^{s} P_i^x$, тоді (2) можна, ураховуючи означення множини полірозміщень $E_{n\nu}^{ks}(G)$, записати так:

$$x = (x_1, ..., x_k) = (X_1, ..., X_s) \in E_{n\nu}^{ks}(G), \tag{3}$$

де $E_{n\nu}^{ks}(G)$ – евклідова множина полірозміщень [7],

$$k = k_1 + ... + k_s;\ \eta = \eta_1 + ... + \eta_s,\ \nu = |S(G)|.$$

Крім того, якщо вся продукція в i-му населеному пункті повинна розвозитися в магазин, то ця вимога виражається так:

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{m_i+j} = 1, \tag{4}$$

тобто всі автомобілі, крім останнього, будуть розвозити частину продукції x_{m_i+j}, $j \in J_{k_i-1}$, а останній автомобіль таку частину продукції $1 - \sum_{i=1}^{k_i-1} x_{m_i+j}$. Тому умова (2), якщо позначити $\bar{X}_i = (x_{m_i+1}, ..., x_{m_i+k_i-1})$, набуде вигляду:

$$\bar{X}_i \in E_{n_i \nu_i}^{k_i-1}(P_i^x). \tag{5}$$

Економічно реальною є задача, коли на території виробничих потужностей, що знаходяться в i -ому населеному пункті, є фірмовий магазин, тобто певна частина продукції не потребує транспортування. Для такого (i -го) населеного пункту умова (4) набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{m_i+j} < 1 . \qquad (6)$$

З економічного погляду можливою є ситуація, коли перший виробник має невеликі пекарні в i -му населеному пункті (які працюють за потреби), продукція яких також розвозиться, якщо доцільно її виробництво в певні («пікові» за навантаження споживання дні – приклад споживання пасок перед Великоднем). У такому разі умова (4) набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{k_i} x_{m_i+j} > 1 . \qquad (7)$$

Розглянемо комбінаторну оптимізаційну задачу ігрового типу на множині полірозміщень, у якій комбінаторні обмеження накладаються на стратегії одного (першого) гравця.

Гра полягає в тому, що перший гравець обирає стратегію – вектор $x = (x_1, ..., x_k) = (X_1, ..., X_s) \in E_{n\nu}^{ks}(G)$, а другий обирає стратегію – число $j \in J_n$. Ці стратегії називатимемо чистими. При такому виборі перший гравець платить другому платежі $a'_{1j}, ..., a'_{kj}$ з імовірностями $x = (x_1, ..., x_k)$, де a'_{ij} – задані дійсні числа, $A' = (a'_{ij})$. Середній платіж (математичне сподівання) першого гравця другому (при виборі стратегії $x^i = (x_1^i, ..., x_k^i) = (X_1^i, ..., X_s^i) \in E_{\eta\nu}^{ks}(G)$ і стратегії j, $j \in J_n$, відповідно першим і другим гравцями) виражається платіжною функцією:

$$F(x^i, j) = \sum_{t=1}^{k} a'_{tj} x_{it} = a_{ij} , \qquad (8)$$

де $i \in J_m$, а m – кількість елементів в $E_{\eta\nu}^{ks}(G)$, тобто $m = | E_{\eta\nu}^{ks}(G) |$.

Модель. Задача полягає в знаходженні стратегії гравців x^*, j^*, які визначені так:

$$x^* = \arg \min_{x \in E_{\eta\nu}^{ks}(G)} (\max_{j \in J_n} F(x, j)) , \qquad (9)$$

$$j^* = \arg \max_{j \in J_n} (\min_{x \in E_{\eta\nu}^{ks}(G)} F(x, j)) , \qquad (10)$$

де $F(x, j)$ має вигляд (8).

Якщо

$$\max_{j \in J_n} \min_{x \in E_{\eta\nu}^{ks}(G)} F(x, j) = \min_{x \in E_{\eta\nu}^{ks}(G)} \max_{j \in J_n} F(x, j) = F(x^*, j^*) , \qquad (11)$$

то, очевидно, що x^*, j^* є оптимальним розв'язком (стратегіями) задачі, а $U = F(x^*, j^*)$ є ціною гри (випадок сідловок точки).

Якщо сідлової точки немає, треба вести пошук мішаних стратегій – імовірностей застосування стратегій $x_k^i \in E_{\eta\nu}^{ks}(G)$, $i \in J_n$, і стратегій $j \in J_n$. Це можна робити процедурою типу методу Брауна-Робінсон.

Зауваження. Якщо за економічної доцільності виробник (перший) вимагає розвезення в i -му населеному пункті продукції так, щоб більша частка доставалася більшому продавцю (чи за якогось іншого ранжування), то з'являється умова вигляду:

$$x_{m_i+1} \ge x_{m_i+2} \ge ... \ge x_{m_i+j} \ge ... \ge x_{m_i+k_i} . \qquad (12)$$

Умова (12) з умовою (2) означає, що допустимий вектор є елементом евклідової множини сполучень [7], а виконання умов (12) і (3) означає, що допустимим є евклідове поліспоручення.

2. Розв'язування комбінаторної ігрової задачі на полірозміщеннях

У роботі запропоновано ітераційний метод типу Брауна-Робінсон (ІМТБР) для ігрової задачі, у який один гравець має комбінаторні обмеження. Їх сенс у тому, що стратегія є полірозміщенням, у якому кожне розміщення є набором імовірностей із нової групи подій, а ймовірності належать заданій мультимножині. Другий гравець має стратегії, як у звичайній матричній грі.

ІМТБР для цієї задачі ґрунтується на поетапному розігруванні гри, у якій гравці при виборі стратегії роблять ходи, уважаючи, що «майбутнє схоже на минуле», і враховуючи всю інформацію про платежі, що накопичилася. Тобто розігрується гра, у якій обидва гравці застосовують один за одним свої стратегії. Утворюється певна послідовність ходів. Початок – вибір одного з гравців довільної стратегії на першому ході. Інший відповідає своєю стратегією, оптимізуючи свій виграш (програш). Хід переходить до першого, який його робить, вибираючи стратегію з тих же принципів. Інформація про платежі накопичується й використовується на кожному кроці для вибору найкращого з погляду цієї інформації ходу (стратегії).

Зробивши зупинку за вибраним критерієм (які розглянемо далі), підраховують частоти застосування стратегій, одержавши наближення до ймовірностей їх застосування. Підраховується наближене значення ціни гри.

Розглянемо формалізований алгоритм методу, використовуючи також його табличне представлення для наочності, яке будемо викладати курсивом.

У перший стовпець, назвемо його N, заноситься номер поточного етапу розіграшу гри. На ньому кожен із двох гравців по черзі один за одним здійснюють вибір стратегій.

Крок 0. Початковий номер N ітерацій установлюється одиниця ($N := 1$).

Крок 1. Першу стратегію перший гравець (який має стратегії-полірозміщення) вибирає випадковим чином, тобто вибирає полірозміщення $X \in E_{\eta\nu}^{ks}(G, H)$, причому в кожному розміщенні сума координат має дорівнювати одиниці.

Записується полірозміщення X у стовпець, який також назвемо X.

Крок 2. Визначаються скалярні добутки векторів-стовпців платежів, що відповідають стратегіям другого гравця та вектора X – поточної стратегії першого гравця.

У табличному представленні вводяться стовпці B_1, …, B_j, …, B_n *– вектори платежів, що відповідають стратегії* j *другого гравця,* $j = 1, 2, ..., n$. *Уводять також стовпці* B_jX *– вектор-стовпець, елементів, які є поелементними добутками векторів* X *і* B_j, $j = 1, 2, ..., n$. *Усі вектори (* X, B_j, B_jX k*-елементні). Наступний рядок позначимо sum_l, де в стовпцях* B_jX *записуємо результати скалярних добутків векторів* B_j *та* X. *(Це суми елементів у кожному стовпці* B_jX *).*

Крок 3. Обчислюється *SUM_L* – накопичені суми скалярних добутків B_1X, …, B_nX (*у лівій частині таблиці*).

У наступному рядку SUM_L лівої частини таблиці обчислюється сума елементів рядка sum_l та елементів рядка SUM_L із попереднього (тобто ($N-1$*)-го) етапу. При* $N = 1$ *рядок SUM_L повторює рядок sum_l, оскільки це перші платежі.*

Крок 4. Визначається стратегія другого гравця $j_{\max}$ за критерієм отримання максимального платежу:

$$j^*_{\max} = \arg\max_{1\le j\le n} B_jX ,$$

тобто знаходиться $N\bar{\nu} = B_jX$, а також діленням $N\bar{\nu}$ на N знаходиться $\bar{\nu}$.

У таблиці цей крок означає вибір максимального числа в рядку SUM_L, яке переноситься в клітинку стовпця $N\bar{\nu}$ *цього ж рядка. У клітину стовпця* $\bar{\nu}$ *цього ж рядка записують результат ділення* $N\bar{\nu}$ *на* $\bar{\nu}$. *Стратегія* $j^*_{\max}$ *є стратегією другого гравця при наступному ході. У стовпець* j *таблиці заносять* $j^*_{\max}$. *Стовпець* $B_{j_{\max}}$ *із лівої частини таблиці (чи з матриці* A *) покоординатно заноситься в рядок стратегії* $j^*_{\max}$ *у відповідні стовпці* A_i.

На ітерації з $N = 1$ *рядок SUM_R правої частини таблиці повторює рядок платежів (числа рядка стратегії) другого гравця – числа стовпців* A_i *оскільки попередніх платежів ще не було. На наступних (* $N > 1$ *) ітераціях у рядок SUM_R записується сума елементів рядка SUM_R із попередньої ((* $N-1$*)-ої) ітерації та рядка платежів для поточної стратегії другого гравця (попередній перед рядком SUM_R рядок правої частини таблиці).*

Крок 5. Визначається наступна стратегія-полірозміщення *NEXT_X* першого гравця з умови мінімального сумарного (за N ітерацій) платежу (програшу). На кожній ітерації розв’язується умовна лінійна задача на полірозміщеннях:

$$x^* = \arg\min_{x\in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \ ; \ c^* = \min_{x\in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \ ; \qquad (13)$$

за комбінаторної умови (3) та додаткових умов (4) $\forall i \in J_s$, де $c_1, ..., c_k$ – вектор *SUM_R*. Тут вектор x^* з (13) і є *NEXT_X*, а величина c^* (теж знайдена при розв’язуванні задачі (13)) – це $N\underline{\nu}$.

Для розв’язування задачі (13) за умов (3) та (4) $\forall i \in J_s$ можна застосувати алгоритм методу гілок і меж.

Знайдений вектор NEXT_X заносять у новий рядок правої частини таблиці (який так і називають NEXT_X). Значення $N\underline{\nu}$ *можна обчислити як скалярний добуток елементів вектора SUM_R накопичених платежів та обраної стратегії NEXT_X. Величина* $N\underline{\nu}$ *– мінімальний (на ітерації* N *) накопичений програш заносять у стовпець із тією ж назвою* $N\underline{\nu}$. $N\underline{\nu}$ *– це сума елементів, що є попарними добутками відповідних координат векторів SUM_R і NEXT_X (у таблиці – це вектор-рядок sigma, а отже,* $N\underline{\nu}$ *– сума елементів цього вектора). Діленням* $N\underline{\nu}$ *на* N *знаходять* $\underline{\nu}$ *, яке записують у стовпець з такою ж назвою.*

Крок 6. Обчислюється $\nu^* = 0,5(\bar{\nu} + \underline{\nu})$. Це число заносять у стовпець ν^*.

Крок 7. Перевіряється критерій зупинки алгоритму. Ним може бути виконання однієї з таких умов:

1) $\min_{1\le i\le N} \bar{\nu}_i = \max_{1\le i\le N} \underline{\nu}_i$, де $\bar{\nu}_i = \bar{\nu}$; $\underline{\nu}_i = \underline{\nu}$ на ітерації i;

2) N досягло заданої (достатньо великої) величини;

3) досягнута задана точність за ціною гри, що може бути визначене так:

$$\Delta = \left| \min_{1\le i\le N} \bar{\nu}_i - \max_{1\le i\le N} \underline{\nu}_i \right| \le \varepsilon ,$$

або так:

$$\delta = \frac{\Delta}{0,5\left| \min_{1\le i\le N} \bar{\nu}_i + \max_{1\le i\le N} \underline{\nu}_i \right|} \le \varepsilon ,$$

де $\varepsilon > 0$ задана точність (при обчисленні Δ – в абсолютних величинах, при обчисленні δ – у відносних величинах).

Якщо критерій зупинки не виконано, то перехід на крок 2 алгоритму зі збільшенням на 1 величини N ($N := N + 1$) і вибором за стратегію вектора *NEXT_X*.

При завершенні алгоритму за розв’язок приймається: ціна гри

$$V^* = \frac{1}{2}\left(\min_{1\le i\le N} \bar{\nu}_i + \max_{1\le i\le N} \underline{\nu}_i \right),$$

а за ймовірності застосування чистих стратегій (тобто за мішані стратегії) гравців – частоти їх застосування за пройдені N ітерацій методу: для 1-го гравця – частка кількості застосування кожного полірозміщення X за N ітерацій; для гравця 2 – частка кількості застосувань кожної стратегії j, за N ітерацій $j \in J_n$.

Зауваження. Якщо в умові (3) множина полірозміщень така, що якесь k_i з умови (2) дорівнює 2 ($k_i = 2$), то в методі гілок і мед, що застосовується на кроці 5, можна визначити x_{m_i+1} і x_{m_i+2} з (4) згідно з наступним твердженням.

Нехай у (13) при x_{m_i+1} позначено c_{i1}, а при x_{m_i+2} позначено c_{i2}.

Таблиця 1

Перші шість кроків методу типу Брауна-Робінсон для ілюстративного прикладу

N	X	B_1	B_1X	B_2	B_2X	$N\bar{\nu}$	$\bar{\nu}$	j	A_1	A_2	A_3	A_4	$N\underline{\nu}$	$\underline{\nu}$	ν^*
1	0,1	7	0,7	3	2,1			2	3	5	4	2			
	0,9	1	0,9	5	4,5			SUM_R	3	5	4	2			
	0,3	3	0,9	4	3,6			NEXT_X	0,9	0,1	0,3	0,7			
	0,7	8	2,1	2	4,2			sigma	2,7	0,5	1,2	1,4	5,8	5,8	10,1
	sum_l		4,6		14,4										
	SUM_L		4,6		14,4	14,4	14,4								
2	0,9	7	6,3	3	2,7			2	3	5	4	2			
	0,1	1	0,1	5	0,5			SUM_R	6	10	8	4			
	0,3	3	0,9	4	1,2			NEXT_X	0,9	0,1	0,3	0,7			
	0,7	8	5,6	2	1,4			sigma	5,4	1,0	2,4	2,8	11,6	5,8	7,95
	sum_l		12,9		5,8										
	SUM_L		17,5		20,2	20,2	10,1								
3	0,9	7	6,3	3	2,7			1	7	1	3	8			
	0,1	1	0,1	5	0,5			SUM_R	13	11	11	12			
	0,3	3	0,9	4	1,2			NEXT_X	0,1	0,9	0,7	0,3			
	0,7	8	5,6	2	1,4			sigma	1,3	9,9	7,7	3,6	22,5	7,5	8,83
	sum_l		12,9		5,8										
	SUM_L		30,4		26,0	30,4	10,13								
4	0,1	7	0,7	3	0,3			1	7	1	3	8			
	0,9	1	0,9	5	4,5			SUM_R	20	12	14	20			
	0,7	3	2,1	4	2,8			NEXT_X	0,1	0,9	0,7	0,3			
	0,3	8	2,4	2	0,6			sigma	2,0	9,8	9,8	6,0	27,0	6,75	7,94
	sum_l		6,1		8,2										
	SUM_L		36,5		34,2	36,5	9,13								
5	0,1	7	0,7	3	0,3			1	7	1	3	8			
	0,9	1	0,9	5	4,5			SUM_R	27	13	17	28			
	0,7	3	2,1	4	2,8			NEXT_X	0,1	0,9	0,7	0,3			
	0,3	8	2,4	2	0,6			sigma	2,7	11,7	11,9	8,4	34,7	6,94	7,73
	sum_l		6,1		8,2										
	SUM_L		42,6		42,4	42,6	8,52								
6	0,1	7	0,7	3	0,3			2	3	5	4	2			
	0,9	1	0,9	5	4,5			SUM_R	30	18	21	30			
	0,7	3	2,1	4	2,8			NEXT_X	0,1	0,9	0,7	0,3			
	0,3	8	2,4	2	0,6			sigma	3,0	16,2	14,7	9,0	32,9	5,48	6,96
	sum_l		6,1		8,2										
	SUM_L		48,7		50,6	50,6	8,43								
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Теорема. Якщо в умові (2) $k_i = 2$, $i \in J_s$, то задача (13) за умови (3) та (4) має таку властивість: при $c_{i1} \geq c_{i2}$ $x^*_{m_i+1} = \min_j \{x_1^j\}$; $(x_1^j, x_2^j) \in E^2_{n_i \nu_i}(P_i^*)$; $x^*_{m_i+2} = 1 - x^*_{m_i+1}$; при $c_{i1} < c_{i2}$ $x^*_{m_i+1} = \max_j \{x_1^j\}$; $(x_1^j, x_2^j) \in E^2_{n_i \nu_i}(P_i^*)$; $x^*_{m_i+2} = 1 - x^*_{m_i+1}$, $j \in J_\tau$, $\tau = \left| E^2_{n_i \nu_i}(P_i^*) \right|$.

Доведення. Цей факт є наслідком теореми 3.1 [7].

3. Ілюстративний приклад

Нехай задана платіжна матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо $G = P_1^x + P_2^x$; $|G| = \eta = 10$; $n = 7$; $k = 4$, де

$$P_1^x = (0,1;\ 0,1;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,9);\ P_2^x = (0,3;\ 0,5;\ 0,5;\ 0,7;\ 0,9).$$

Таблиця 2

Інформація про мішані розв'язки, отримані в ілюстративному прикладі

Чиста стратегія	**Імовірність застосування**
(0,1; 0,9; 0,3; 0,7)	1/6≈0,17
(0,1; 0,9; 0,7; 0,3)	1/2=0,5
(0,1; 0,9; 0,5; 0,5)	0
(0,9; 0,1; 0,3; 0,7)	1/3≈0,33
(0,9; 0,1; 0,7; 0,3)	0
(0,9; 0,1; 0,5; 0,5)	0
(0,4; 0,6; 0,3; 0,7)	0
(0,4; 0,6; 0,7; 0,3)	0
(0,4; 0,6; 0,5; 0,5)	0
(0,6; 0,4; 0,3; 0,7)	0
(0,6; 0,4; 0,7; 0,3)	0
(0,6; 0,4; 0,5; 0,5)	0

Отже,

$$G = (0,1;\ 0,1;\ 0,3;\ 0,4;\ 0,5;\ 0,5;\ 0,6;\ 0,7;\ 0,9;\ 0,9).$$

Нехай $s = 2$; $k_1 = 2$; $k_2 = 2$; тобто $E^{ks}_{\eta n}(G, H) = E^{4,2}_{10,7}(G, H)$. Нехай $N_1 = \{1, 2, 4, 7, 9\}$, $N_2 = \{3, 5, 6, 8, 10\}$, тоді $H = E^2_{5,4}(P_1^x) \times E^2_{5,4}(P_2^x)$, де $E^2_{5,4}(P_1^x) = \{(0,1;\ 0,9);\ (0,9;\ 0,1);\ (0,4;\ 0,6);\ (0,6;\ 0,4)\}$, $E^2_{5,4}(P_2^x) = \{(0,3;\ 0,7);\ (0,7;\ 0,3);\ (0,5;\ 0,5)\}$.

Розв'язування наведено в таблиці 1. За стратегію 1-го гравця на 1-ій ітерації обрано $X = (0,1;\ 0,9;\ 0,3;\ 0,7)$.

Якщо б алгоритм було зупинено після 6-ти ітерацій, то

$$V^* = \frac{1}{2}(8,43 + 6,96) = 7,96.$$

Мішана стратегія гравця визначається так (таблиця 2).

Мішана стратегія другого гравця: (0,5; 0,5) – тобто ймовірності застосування обох чистих стратегій – по 0,5.

Висновки. У роботі розглянута ігрова комбінаторна задача, модель якої є задачею з комбінаторним обмеженням на стратегію одного гравця. Ця стратегія має бути полірозміщенням. Виявлені умови, що перетворюють її на задачу на евклідовій комбінаторній множині поліcполучень.

Запропоновано метод розв'язування цієї задачі в рамках ітераційного підходу типу методу Брауна-Робінсон.

Доведена властивість задачі, що дає змогу спростити розв'язування підзадачі, коли якесь із полірозміщень містить 2 розміщення.

Наведено ілюстративний приклад розв'язування задачі запропонованим методом.

Результати статті розширяють клас ігрових задач і задач комбінаторної оптимізації, що можуть використовуватися на практиці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2009. Вып. 45. № 5. С. 732–741.
2. Korte B., Vygen J. Combinatorial optimization: Theory and algorithms. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 2012. 660 p.
3. Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L. (Eds.) Handbook of combinatorial optimization. New York : Springer, 2013. 3399 p.
4. Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial optimization: Algorithms and complexity. Mineola (NY) : Dover Publications, 2013. 528 p.
5. Сергиенко И.В., Шило В.П. Современные подходы к решению сложных задач дискретной оптимизации. *Проблемы управления и информатики.* 2016. Вып. 48. № 1. С. 15–24.
6. Гуляницький Л.Ф., Рясна І.І. До формалізації задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. *Теорія оптимальних рішень :* збірник наукових праць. 2017. Вип. 130. С. 239–250.
7. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
8. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Теория и методы евклидовой комбинаторной оптимизации: современное состояние и перспективы. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. Вып. 56. № 3. С. 366–379.
9. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа. *Проблемы управления и информатики.* 2006. Вып. 38 № 5. С. 34–45.

10. Емец О.А., Ольховская Е.В. Итерационный метод решения комбинаторных задач игрового типа на размещениях. *Проблемы управления и информатики.* 2011. Вып. 43. № 5. С. 52–63.
11. Морозов В.В., Шалбузов К.Д. О численном решении матричных игр специального вида. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2014. Вып. 54. № 10. С. 1499–1504.
12. Емец О.А. Решение линейной задачи евклидовой комбинаторной оптимизации на размещениях с условием постоянства сумы элементов размещения. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. Вып. 48. № 4. С. 547–557.

REFERENCES

1. Sergienko I. V., Hulianytskyi L. F., Sirenko S. I. (2009) Classification of applied methods of combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 45, no. 5, pp. 732–741.
2. Korte B., Vygen J. (2012) Combinatorial optimization: Theory and algorithms. Berlin; Heidelberg; New York: Springer.
3. Pardalos P. M., Du D-Z., Graham R. L. (2013) (Eds.) Handbook of combinatorial optimization. New York: Springer.
4. Papadimitriou C. H., Steiglitz K. (2013) Combinatorial optimization: Algorithms and complexity. Mineola (NY): Dover Publications.
5. Sergienko I. V., Shylo V. P. (2016) Modern approaches to solving complex discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 48, no. 1, pp. 15–24.
6. Hulianytskyi L., Riasna I. (2017) Formalization and classification of combinatorial optimization problems. Springer Optimization and Its Applications, vol. 130, pp. 239–250.
7. Stoyan Yu. G., Emets O. O. (1993) Theory and Methods of Euclidean Combinatorial Optimization. Kyiv: Inst. Syst. Doslidzh. Osvity. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487 (in Ukrainian).
8. Stoyan Y. G., Yakovlev S. V. (2020) Theory and Methods of Euclidian Combinatorial Optimization: Current Status and Prospects. *Cybernetics and Systems Analysis,* vol. 56, no. 3, pp. 366–379.
9. Emets O. A., Ustian N. Yu. (2006) Solving of some problems of combinatorial optimization on arrangements and permutations of game type. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 38, no. 5, pp. 34–45.
10. Iemets O. A., Olkhovskaja E. V. (2011) Iterative method for solving combinatorial optimization problems of the game-type on arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 43, no. 5, pp. 52–63.
11. Morozov V. V., Shalbuzov K. D. (2014) Numerical solution of special matrix games. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 54, no. 10, pp. 1499–1504.
12. Iemets O. O., Yemets O. O. (2012) Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements. *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 48, no. 4, pp. 547–557.