УДК 531.383
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-06

ІДЕНТИФІКОВАНІСТЬ ЗА СТАНОМ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ ПРИ ДІЇ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ ТА СИЛ РАДІАЛЬНОЇ КОРЕКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ПЕВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЗМІШАНОГО ВИДУ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

Леонтьєва В. В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики і механіки
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-9863-9712
vleonteva15@gmail.com

Кондрат’єва Н. О.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри прикладної математики і механіки
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-6994-2536
nkondr100@gmail.com

Єлховська Я. А.
аспірант кафедри прикладної математики і механіки
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0003-1066-1577
yana.elka28@gmail.com

Ключові слова: *динамічна система, гіроскопічна система, зовнішні збурення, модель у змінних стану, параметрична ідентифікованість систем, матриця ідентифікованості.*

Якщо в процесі вивчення динамічних систем різної фізичної природи, розв’язання задач керування й регулювання динамічними системами, які використовують для опису свого руху математичні моделі, виявляється проблема зміни параметрів моделей досліджуваних систем, що своєю чергою може призводити до зміни статистичних та динамічних властивостей систем, одержання некоректних результатів їх функціонування, а отже, загальної (часткової) невідповідності систем їх призначенню або недостатньої ефективності їх роботи, виникає необхідність ідентифікувати (визначити) змінені параметри математичних моделей досліджуваних систем та зробити їх, таким чином, доступними для подальшого контролю та регулювання. У такій постановці важливим є аналіз ідентифікованості досліджуваних систем, за яким встановлюється принципова можливість безпосереднього відновлення параметрів відповідних математичних моделей.

У роботі проводиться аналіз параметричної ідентифікованості за станом динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваної за допомогою уточненої математичної моделі у просторі станів, яка подається у вигляді лініаризованих диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною та залежно від певних фізичних обмежень об’єкта має дві різні форми подання – при існуючій можливості (неможливості) об’єднання збурюючих сил, що діють на систему. За кожною з одержаних моделей проведено аналіз ідентифікованості системи, на основі якого встановлено умови повної ідентифікованості, причому на результати аналізу ідентифікованості досліджуваної системи впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць ідентифікованості, складеної для випадку можливості об’єднання збурюючих сил. Використання іншої форми подання моделі виявилось менш популярним через ускладнення матриці керованості, а отже, відповідної матриці ідентифікації, а також збігання результатів, отриманих для другої моделі.

STATE IDENTIFIABILITY OF A DYNAMICAL SYSTEM WITH A GYROSCOPIC STRUCTURE UNDER THE ACTION OF DISSIPATIVE FORCES AND FORCES OF RADIAL CORRECTION WITH A CERTAIN NONLINEAR EXTERNAL DISTURBANCES OF MIXED TYPE

Leontieva V. V.
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics and Mechanics
Zaporizhzhya National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-9863-9712
vleonteva15@gmail.com

Kondratieva N. A.
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics and Mechanics
Zaporizhzhya National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-6994-2536
nkondr100@gmail.com

Yelkhovska Ya. A.
Postgraduate Student at the Department of Applied Mathematics and Mechanics
Zaporizhzhya National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0003-1066-1577
yana.elka28@gmail.com

Key words: *dynamical system, gyroscopic system, external disturbances, state variable model, parametric identifiability of the system, identifiability matrix.*

In the study of dynamical systems of different physical nature, the solving the control problems of dynamical systems, which use mathematical models to describe their motion, it is often appeared a problem of changing the parameters of studied systems' models, which in turn can lead to changes in statistical and dynamical properties of the systems, to obtaining the incorrect results of their functioning, and, consequently, to a general (partial) inconsistency of the systems with its purpose or insufficient efficiency of its work. In such cases, it becomes necessary to correct and identify the changed parameters of mathematical models of the studied system and make it, thus, available for further control and regulation. For solving problems of identification of the systems, it is important to analyze their identifiability, according to which the fundamental possibility of direct restoration of the parameters of studied system' models is established.

This work is devoted to the study of identifiability problem of a dynamical system with a gyroscopic structure under the influence of dissipative and radial correction forces with a certain nonlinear external disturbances of mixed type described with the constructed mathematical state-space model, that is presented in the form of linearized differential equations in two different forms of presentation – with the existing possibility (impossibility) of union of disturbing forces acting on the system. For each of obtained models an analysis of the system's identifiability was carried out. As a result of the analysis the conditions for complete identifiability are satisfied. Moreover, it was determined that results of the analysis of identifiability of studied system are influenced only by the results of the study of one of the obtained identification matrices, compiled for the case of the existing possibility of combining disturbing forces. The use of another form of representation of model turned out to be less popular due to the complication of the controllability matrix, and, consequently, the corresponding identifiability matrix.

Вступ. У процесі дослідження динамічних систем (об'єктів, процесів), розв'язання задач керування й регулювання динамічних систем, які використовують для опису свого руху математичні моделі, досить часто виникає проблема змінювання (з огляду на дію окремо визначених факторів) параметрів моделей досліджуваних систем, що своєю чергою може призводити до змінювання статистичних й динамічних властивостей систем, одержання некоректних результатів їх функціонування, отже, загальній або частковій невідповідності системи своєму призначенню або недостатній ефективності її роботи. У таких випадках виникає необхідність ідентифікувати (визначити) змінені параметри математичних моделей руху досліджуваної системи та зробити, таким чином, її доступною до здійснення подальшого керування й регулювання, тобто до визначення таких певних впливів на досліджувану систему (об'єкт, процес), щоб вона отримала змогу змінитися таким чином, щоб показники, які її характеризують, відповідали певним (бажаним) вимогам. При цьому для розв'язання задач ідентифікації систем важливе значення має проведення аналізу їх ідентифікованості, за яким встановлюється принципова можливість здійснення безпосередньої ідентифікації (відновлення) параметрів математичних моделей досліджуваної системи [1–6]. Неврахування неідентифікованості систем керування й регулювання може призвести до помилкових висновків [4; 7; 8]. З огляду на це, дослідження ідентифікованості має визначальне значення в розв'язанні задач керування й регулювання [2; 5–11].

У зв'язку з технологіями в області розробки й дослідження динамічних систем з гіроскопічною структурою, що активно розвиваються [12–17], необхідне проведення якісного аналізу їх динамічних характеристик із метою визначення подальших дій, спрямованих на отримання бажаних результатів дослідження. Проведення аналізу властивостей таких систем нині виступає одним з найбільш актуальних, пріоритетних та затребуваних досліджень у зв'язку із розширенням застосування таких систем у різних областях науки й техніки, з встановленням нових вимог як до самих гіроскопічних систем, так і до окремих їх елементів із метою досягнення найкращих значень показників якості функціонування [13; 14; 17].

Необхідність вивчення питання ідентифікованості динамічних систем з гіроскопічною структурою зумовлена тим, що в процесі розв'язання задач керування часто виникають ситуації, коли математичні моделі, які описують їх поведінку, не завжди точно відображають досліджувані процеси і ставиться задача про уточнення структури та/або параметрів зазначених моделей. У цьому випадку параметрична ідентифікація моделей забезпечує принципову можливість визначення параметрів математичних моделей системи за результатами вимірювання певних вихідних величин протягом деякого інтервалу часу [2; 3; 13; 18; 19].

Ця робота присвячена дослідженню проблеми ідентифікованості динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваних за допомогою лініаризованих диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною.

Мета, об'єкт та предмет дослідження. *Метою роботи* є дослідження ідентифікованості параметрів лінійної математичної моделі динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного змішаного виду зовнішніх збурень, визначення умов, за якими система є повністю та/або частково ідентифікованою й неідентифікованою.

Об'єктом дослідження в роботі виступають математичні моделі динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, які описуються лінеаризованими неоднорідними диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами.

Предметом дослідження є властивість ідентифікованості динамічної системи з гіроскопічною структурою.

Для реалізації сформульованої мети були поставлені такі завдання:

− одержання у змінних стану (зі встановленням фазових змінних стану системи та функцій керування) лінійних моделей динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень для випадків, коли враховується об'єднання зовнішніх збурень та їх відокремленість;

− побудова матриць ідентифікованості досліджуваної системи з гіроскопічною структурою, динаміка руху якої описується за допомогою отриманих моделей у змінних стану;

− проведення поелементного аналізу матриць ідентифікованості на відповідність критерію ідентифікованості М.О. Балоніна для лінійних стаціонарних систем керування;

− за результатами проведеного аналізу матриць ідентифікованості визначення умов повної та/або часткової ідентифікованості та неідентифікованості досліджуваної системи з гіроскопічною структурою;

− формулювання загальних висновків за резуль-татами проведеного в роботі дослідження.

Виклад основного матеріалу.

1. Математичні моделі руху досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою

Вихідними математичними моделями для проведення дослідження ідентифікованості в роботі виступають лінеаризовані неперервні математичні моделі динамічної системи з гіроскопічною структурою з урахуванням дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, представлені у змінних стану в стандартній формі та описувані системами лінійних векторно-матричних диференціальних рівнянь відповідно до видів [14]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{A}\mathbf{X} + \mathbf{F_1}, \\ \mathbf{Y} = \tilde{C}\mathbf{X}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{A}\mathbf{X} + \mathbf{F_2}, \\ \mathbf{Y} = \tilde{C}\mathbf{X}, \end{cases} \tag{2}$$

де $\mathbf{X} = \left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]^T$ – вектор стану системи розмірності $n \times 1$, $\mathbf{X} \in R^n$; $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X_0} = \left[x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0\right]^T$ – вектор початкового стану системи розмірності $n \times 1$; $\mathbf{F_1} = \left[f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_4^1\right]^T$, $\mathbf{F_2} = \left[f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2\right]^T$ – вектори зовнішніх збурень розмірностей $n \times 1$; $\mathbf{Y} = \left[y_1, y_2\right]^T$ – вектор виходу системи розмірності $r \times 1$; $\tilde{A} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n \times n}$, $\tilde{C} = \left[\tilde{c}_{ij}\right]_{r \times n}$ – матриці стану та виходу системи відповідно:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{A} & -\frac{b}{A} & \frac{H}{A} \\ -\frac{k}{A} & 0 & -\frac{H}{A} & -\frac{b}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти матриці $\tilde{A}$ систем (1) та (2) мають таке тлумачення [12; 14; 15]: A – екваторіальний момент інерції гіроскопічної системи; b – коефіцієнт сил опору; H – власний кінетичний момент гіроскопічної системи; k – крутизна характеристики моментних датчиків.

Вектор-функції $\mathbf{F_1} = \left[f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_4^1\right]^T$, $\mathbf{F_2} = \left[f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2\right]^T$ часу t, які виступають у ролі зовнішніх збурень у системах (1) та (2), вибираються таким чином [14]. Якщо на фізичному рівні не є можливим об'єднання збурюючих сил $f_i^j(t)$ $\left(i = \overline{1,4},\ j = 1,2\right)$, що виступають як керування, в моделі у змінних стану використовується вектор-функція $\mathbf{F_1} = \left[f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_4^1\right]^T$, яка подається у вигляді

$$\mathbf{F_1} = \tilde{B}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{\sin\beta_{сер}}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A}\left(u_1(t) - u_2(t)\sin\beta_{сер}\right) \\ \frac{1}{A}u_3(t) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

у протилежному випадку, коли зазначене об'єднання збурюючих сил є можливим, у моделі у змінних стану вибирається вектор-функція $\mathbf{F_2} = \left[f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2\right]^T$ у вигляді

$$\mathbf{F}_2 = \tilde{\tilde{B}}\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A}\tilde{u}_1(t) \\ \frac{1}{A}u_3(t) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

У співвідношеннях (3), (4) прийнято: $\beta_{сер} = const$ – усереднене відносне значення кута повороту β за термін розглядання руху гіроскопічної системи, отримуване в процесі здійснення лінеаризації вихідних рівнянь системи за умови припущення про його мале змінювання в часі у тригонометричних виразах моделі; $\mathbf{U} = \left[u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right]^T$ – вектор керування розмірності $m \times 1$, $\mathbf{U} \in R^m$; $u_i(t) = g_i^0 + g_i^1 t + g_i^2 t^2 + g_i^3 \sin(\omega_i t + \varepsilon_i)$, $i = \overline{1,3}$; g_i^j, ω_i, ε_i $\left(i = \overline{1,3},\ j = \overline{0,3}\right)$ – відомі сталі; $\tilde{\mathbf{U}} = \left[\tilde{u}_1(t), u_3(t)\right]^T$ – вектор керування розмірності $\tilde{m} \times 1$, $\tilde{\mathbf{U}} \in R^{\tilde{m}}$;
$\tilde{u}_1(t) = \tilde{g}_1^0 + \tilde{g}_1^1 t + \tilde{g}_1^2 t^2 + g_1^3 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \tilde{g}_2^3 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2)$; $\tilde{g}_1^j = g_1^j - g_2^j \sin\beta_{сер}$, $j = \overline{0,2}$; $\tilde{g}_2^3 = -g_2^3 \sin\beta_{сер}$; $\tilde{B} = \left[\tilde{b}_{ij}\right]_{n \times m}$, $\tilde{\tilde{B}} = \left[\tilde{\tilde{b}}_{ij}\right]_{n \times \tilde{m}}$ – матриці керуючих впливів системи:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{\sin\beta_{сер}}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}.$$

Зауважимо, що представлена системами векторно-матричних рівнянь (1) та (2) досліджувана гіроскопічна система розглядається як система автоматичного керування, в якій вхідними сигналами (входами) виступають моменти сил $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ (для системи (1)) та $\tilde{u}_1(t), u_3(t)$ (для системи (2)), а вихідними сигналами (виходами) – кути повороту α та β гіроскопічної системи навколо відповідної зовнішньої і внутрішньої осей. Для такої форми представлення моделі досліджуваної системи є можливим проведення аналізу основних властивостей систем керування, до яких належить і параметрична ідентифікованість моделей, аналіз якої виступає предметом дослідження роботи. При цьому будемо вважати, що досліджувана динамічна система функціонує в умовах наявності повної інформації про вектор стану об'єкта дослідження. У протилежному випадку необхідне розв'язання додаткової задачі теорії автоматичного керування – задачі спостереження, що дає змогу відновити значення вектора стану та використовувати його для подальших досліджень в області керування й автоматичного регулювання.

2. Дослідження ідентифікованості гіроскопічної системи

У цьому розділі проведемо аналіз параметричної ідентифікованості лінійної модельної структури досліджуваної гіроскопічної системи, представленої в просторі станів системами лінеаризованих диференціальних векторно-матричних рівнянь (1) (якщо на фізичному рівні неможливо об'єднувати збурюючі сили) та (2) (якщо можливе вказане об'єднання). Проведення зазначеного аналізу дасть змогу визначити, чи є принципова можливість відновлення (ідентифікації) невідомих або змінених у результаті дії зовнішніх факторів параметрів моделей, що своєю чергою дасть змогу визначити існування реальної можливості в заданих умовах отримання адекватних моделей досліджуваної системи, придатних до подальшого використання, або в разі часткової ідентифікованості параметрів моделей визначити додаткові умови, за якими буде встановлена можливість зведення досліджуваних моделей системи до параметрично повністю ідентифікованих.

Перш за все визначимось з основними поняттями та застосовуваними в процесі аналізу критеріями параметричної ідентифікованості.

Спираючись на фундаментальні постулати теорії автоматичного керування [1–6; 9; 10; 18], можна зазначити, що ідентифікованість моделі динамічної системи встановлює, що є можливість визначення параметрів математичної моделі досліджуваної системи за результатами вимірювання певних вхідних та вихідних величин впродовж деякого інтервалу часу, та, крім того, залежить від самих рівнянь моделі, вхідних та вихідних функцій, початкових умов, обмежень, а також часто невідомих істинних значень параметрів моделей.

Нині є багато критеріїв визначення ступеня параметричної ідентифікованості динамічних систем [1–6; 9–11; 19], які в кожній конкретній задачі відповідають на аналізоване питання. У цій роботі питання ідентифікованості параметрів математичних моделей досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою, описуваних системами векторно-матричних рівнянь (1) або (2), розглядається з позиції розкриття принципової можливості здійснення процедури параметричної ідентифікації, тобто з позиції визначення ідентифікованості за станом лінійних стаціонарних динамічних систем, описуваних у загальному випадку системами векторно-матричних рівнянь виду

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = F\mathbf{X} + G\mathbf{U}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{X_0}, \\ \mathbf{Y} = P\mathbf{X} + S\mathbf{U}. \end{cases} \tag{5}$$

де $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]^T$ – вектор стану;

$\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_m]^T$ – вектор керування (входу);

$\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_r]^T$ – вектор виходу; $F = \left[f_{ij}\right]_{n\times n}$,

$G = \left[g_{ij}\right]_{n\times m}$, $P = \left[p_{ij}\right]_{r\times n}$, $S = \left[s_{ij}\right]_{r\times m}$ – відомі стаціонарні матриці. Для системи (5) передбачається, що всі рівняння моделей (структурно) є заздалегідь відомими, а про вектори стану та керування є повна інформація, тобто вектори стану та керування є повністю доступними для вимірювання.

Для системи виду (5), а отже, до систем (1) та (2), в роботі ставиться наступна задача встановлення ідентифікованості параметрів за станом досліджуваної системи: необхідно визначити умови, за якими задача визначення матриць F, G (у системі (5)), матриць $\tilde{A}, \tilde{B}$ (у системі (1)) або матриць $\tilde{A}, \tilde{\tilde{B}}$ (у системі (2)) за спостереженнями стану $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ та входу $\mathbf{U}(\mathbf{t})$ має єдиний розв'язок, що збігається з істинними параметрами відповідних моделей, описуваних системами (5), (1) та (2).

У такій постановці розглядуваної задачі будемо спиратися на таке тлумачення ідентифікованості системи [9; 10]: лінійна стаціонарна система (1), (2) або (5) є повністю ідентифікованою, якщо є таке керування $\mathbf{U}(\mathbf{t})$, що при заданому початковому стані системи $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{X_0}$ відповідні визначувані стаціонарні матриці $\tilde{A}, \tilde{B}$ (у системі (1)), матриці $\tilde{A}, \tilde{\tilde{B}}$ (у системі (2)) або F, G (у системі (5)) можуть бути єдиним чином відновлені за спостереженнями процесу на вході та стану $\mathbf{U}(\mathbf{t})$ та $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ на певному кінцевому інтервалі часу ідентифікації. Якщо не всі зазначені матриці можуть бути відновлено за спостереженнями $\mathbf{X}(\mathbf{t})$, $\mathbf{U}(\mathbf{t})$ або жодної з них не може бути визначено в зазначеному смислі, досліджувана система є, відповідно, частково ідентифікованою або неідентифікованою.

Для перевірки ідентифікованості систем у такій постановці М.О. Балоніним розроблено алгебраїчний критерій ідентифікованості [10], за яким лінійна стаціонарна система (5) є повністю ідентифікованою (пара $((F, G), \mathbf{X_0})$ є повністю ідентифікованою) за вектором стану тоді і тільки тоді, коли виконується рангова умова для відповідної матриці ідентифікованості

$$rank\left[W_{id_s}\right]_{n\times(n+nm)} = rank\left[W_o \ \vdots \ W_{kep}\right]_{n\times(n+nm)} = n, \tag{6}$$

де

$$W_o = \left[\ \mathbf{X_0} \ \vdots \ F\mathbf{X_0} \ \vdots \ F^2\mathbf{X_0} \ \vdots \ \dots \ \vdots \ F^{n-1}\mathbf{X_0}\right]_{n\times n} -$$

матриця ідентифікованості однорідної системи $\dot{\mathbf{X}} = F\mathbf{X}$;

$$W_{kep} = \left[G \ \vdots \ FG \ \vdots \ F^2G \ \vdots \ \dots \ \vdots \ F^{n-1}G\right]_{n\times nm} -$$

матриця керованості; n – розмірність простору стану системи (5).

Використовуючи представлений критерій ідентифікованості до досліджуваної динамічної системи, описуваної рівняннями у змінних стану (1) та (2), отримано такі матриці ідентифікованості за станом:

$$\tilde{W}_{id_s} = \left[\mathbf{X_0} \vdots \tilde{A}\mathbf{X_0} \vdots \tilde{A}^2\mathbf{X_0} \vdots \tilde{A}^3\mathbf{X_0} \vdots \tilde{B} \vdots \tilde{A}\tilde{B} \vdots \tilde{A}^2\tilde{B} \vdots \tilde{A}^3\tilde{B} \right] = \\ = [V_1 \;\; V_2 \;\; V_3 \;\; V_4 \;\; W_1 \;\; W_2 \;\; W_3 \;\; W_4 \;\; W_5 \;\; W_6 \;\; W_7 \;\; W_8 \;\; W_9 \;\; W_{10} \;\; W_{11} \;\; W_{12}], \tag{7}$$

$$\tilde{\tilde{W}}_{id_s} = \left[\mathbf{X_0} \vdots \tilde{A}\mathbf{X_0} \vdots \tilde{A}^2\mathbf{X_0} \vdots \tilde{A}^3\mathbf{X_0} \vdots \tilde{\tilde{B}} \vdots \tilde{A}\tilde{\tilde{B}} \vdots \tilde{A}^2\tilde{\tilde{B}} \vdots \tilde{A}^3\tilde{\tilde{B}} \right] = \\ = [V_1 \;\; V_2 \;\; V_3 \;\; V_4 \;\; W_1 \;\; W_3 \;\; W_4 \;\; W_6 \;\; W_7 \;\; W_9 \;\; W_{10} \;\; W_{12}], \tag{8}$$

де $V_i \; \left(i = \overline{1,4}\right)$ – стовпці матриці ідентифікованості W_o однорідної системи $\dot{\mathbf{X}} = \tilde{A}\mathbf{X}$, яка є однаковою для обох систем (1) та (2):

$$V_1 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{bmatrix}; \; V_2 = \begin{bmatrix} x_3^0 \\ x_4^0 \\ \frac{k}{A}x_2^0 - \frac{b}{A}x_3^0 + \frac{H}{A}x_4^0 \\ -\frac{k}{A}x_1^0 - \frac{H}{A}x_3^0 - \frac{b}{A}x_4^0 \end{bmatrix};$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} \frac{k}{A}x_2^0 - \frac{b}{A}x_3^0 + \frac{H}{A}x_4^0 \\ -\frac{k}{A}x_1^0 - \frac{H}{A}x_3^0 - \frac{b}{A}x_4^0 \\ -\frac{Hk}{A^2}x_1^0 - \frac{bk}{A^2}x_2^0 + \frac{b^2 - H^2}{A^2}x_3^0 - \frac{2bH - Ak}{A^2}x_4^0 \\ \frac{bk}{A^2}x_1^0 - \frac{Hk}{A^2}x_2^0 + \frac{2bH - Ak}{A^2}x_3^0 + \frac{b^2 - H^2}{A^2}x_4^0 \end{bmatrix};$$

$$V_4 = \begin{bmatrix} -\frac{Hk}{A^2}x_1^0 - \frac{bk}{A^2}x_2^0 + \frac{b^2 - H^2}{A^2}x_3^0 - \frac{2bH - Ak}{A^2}x_4^0 \\ \frac{bk}{A^2}x_1^0 - \frac{Hk}{A^2}x_2^0 + \frac{2bH - Ak}{A^2}x_3^0 + \frac{b^2 - H^2}{A^2}x_4^0 \\ \frac{k(2bH - Ak)}{A^3}x_1^0 + \frac{k(b^2 - H^2)}{A^3}x_2^0 + \frac{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk}{A^3}x_3^0 - \frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^3}x_4^0 \\ -\frac{k(b^2 - H^2)}{A^3}x_1^0 + \frac{k(2bH - Ak)}{A^3}x_2^0 + \frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^3}x_3^0 + \frac{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk}{A^3}x_4^0 \end{bmatrix}$$

$W_i \; \left(i = \overline{1,12}\right)$ – стовпці матриць керованості $\tilde{W}_{kep} = \left[\tilde{B} \vdots \tilde{A}\tilde{B} \vdots \tilde{A}^2\tilde{B} \vdots \tilde{A}^3\tilde{B} \right]$ та

$$\tilde{\tilde{W}}_{kep} = \left[\tilde{\tilde{B}} \vdots \tilde{A}\tilde{\tilde{B}} \vdots \tilde{A}^2\tilde{\tilde{B}} \vdots \tilde{A}^3\tilde{\tilde{B}} \right]:$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix}; \; W_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sin\beta_{cep}}{A} \\ 0 \end{bmatrix}; \; W_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A} \end{bmatrix}; \; W_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \\ -\frac{b}{A^2} \\ -\frac{H}{A^2} \end{bmatrix};$$

$$W_5 = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\beta_{cep}}{A} \\ 0 \\ \frac{b\sin\beta_{cep}}{A^2} \\ \frac{H\sin\beta_{cep}}{A^2} \end{bmatrix};$$

$$W_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{A} \\ \frac{H}{A^2} \\ -\frac{b}{A^2} \end{bmatrix}; \; W_7 = \begin{bmatrix} -\frac{b}{A^2} \\ -\frac{H}{A^2} \\ -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ \frac{2bH - Ak}{A^3} \end{bmatrix};$$

$$W_8 = \begin{bmatrix} \frac{b\sin\beta_{cep}}{A^2} \\ \frac{H\sin\beta_{cep}}{A^2} \\ \frac{\left(H^2 - b^2\right)\sin\beta_{cep}}{A^3} \\ -\frac{\left(2bH - Ak\right)\sin\beta_{cep}}{A^3} \end{bmatrix}; \; W_9 = \begin{bmatrix} \frac{H}{A^2} \\ -\frac{b}{A^2} \\ -\frac{\left(2bH - Ak\right)}{A^3} \\ -\frac{\left(H^2 - b^2\right)}{A^3} \end{bmatrix};$$

$$W_{10} = \begin{bmatrix} -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ \frac{2bH - Ak}{A^3} \\ \frac{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk}{A^4} \\ \frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^4} \end{bmatrix};$$

$$W_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\left(H^2 - b^2\right)\sin\beta_{cep}}{A^3} \\ -\frac{\left(2bH - Ak\right)\sin\beta_{cep}}{A^3} \\ -\frac{\left(-b^3 + 3bH^2 - 2AHk\right)\sin\beta_{cep}}{A^4} \\ -\frac{\left(H^3 - 3b^2H + 2Abk\right)\sin\beta_{cep}}{A^4} \end{bmatrix};$$

$$W_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{2bH - Ak}{A^3} \\ -\frac{H^2 - b^2}{A^3} \\ -\frac{H^3 - 3b^2H + 2Abk}{A^4} \\ \frac{-b^3 + 3bH^2 - 2AHk}{A^4} \end{bmatrix}.$$

Проаналізуємо побудовані в (7) та (8) матриці ідентифікованості $\tilde{W}_{id_s}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{id_s}$ систем, описуваних рівняннями (1) та (2) відповідно. Оскільки умови

$$rank\left[\tilde{W}_{id_s}\right] = rank\left[W_o \;\vdots\; \tilde{W}_{kep}\right] = n$$

та

$$rank\left[\tilde{\tilde{W}}_{id_s}\right] = rank\left[W_o \;\vdots\; \tilde{\tilde{W}}_{kep}\right] = n$$

означають, що в блокових матрицях $\tilde{W}_{id_s}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{id_s}$ є n лінійно незалежних векторів-стовпців або векторів-рядків (кількість таких стовпців (рядків) збігається з розмірністю простору стану n систем (1) та (2)), зазначений аналіз буде проводитися саме із цієї позиції.

Розглянемо перші блоки матриць $\tilde{W}_{id_s}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{id_s}$, тобто матрицю $W_o = [V_1 \;\; V_2 \;\; V_3 \;\; V_4]$. У зв'язку з однаковістю однорідної системи $\dot{\mathbf{X}} = \tilde{A}\mathbf{X}$ для обох систем (1) та (2) перші чотири стовпці $V_i \;\left(i = \overline{1,4}\right)$ в матрицях (7), (8) також є однаковими та за умови, що початкові стани $x_i^0 \neq 0 \;\left(i = \overline{1,4}\right)$, є лінійно незалежними, в протилежному випадку (при $x_i^0 = 0$ $\left(i = \overline{1,4}\right)$) спостерігається лінійна залежність всіх стовпців $V_i \;\left(i = \overline{1,4}\right)$, а отже, й виродженість матриці ідентифікованості W_o однорідної системи. Якщо хоча б одне з початкових станів системи є ненульовим, спостерігається також лінійна незалежність стовпців матриці W_o, але за певних умов, які у постановці розглядуваних математичних моделей досліджуваної системи є цілком виправданими. Так, наприклад, при $x_1^0 \neq 0$, $x_i^0 = 0 \;\left(i = \overline{2,4}\right)$ матриця W_o приймає вигляд

$$W_o = \begin{bmatrix} x_1^0 & 0 & 0 & -\dfrac{Hk}{A^2}x_1^0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{k}{A}x_1^0 & \dfrac{bk}{A^2}x_1^0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{Hk}{A^2}x_1^0 & \dfrac{k\left(2bH - Ak\right)}{A^3}x_1^0 \\ 0 & -\dfrac{k}{A}x_1^0 & \dfrac{bk}{A^2}x_1^0 & -\dfrac{k(b^2 - H^2)}{A^3}x_1^0 \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

Якщо привести матрицю (9) за допомогою елементарних перетворень над рядками до ступінчастої матриці виду

$$Q = \begin{bmatrix} x_1^0 & 0 & 0 & -\dfrac{Hk}{A^2}x_1^0 \\ 0 & -\dfrac{k}{A}x_1^0 & \dfrac{bk}{A^2}x_1^0 & -\dfrac{k(b^2 - H^2)}{A^3}x_1^0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{k}{A}x_1^0 & \dfrac{bk}{A^2}x_1^0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{k\left(bH - Ak\right)}{A^3}x_1^0 \end{bmatrix} =,$$

$$\frac{k^3\left(bH - Ak\right)}{A^5}\left(x_1^0\right)^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{AH}{bH - Ak} \\ 0 & 1 & -\dfrac{b}{A} & -\dfrac{(b^2 - H^2)}{bH - Ak} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{Ab}{bH - Ak} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

можна побачити, що для неї

$$\det(Q) = \frac{k^3\left(bH - Ak\right)}{A^5}\left(x_1^0\right)^4 \neq 0$$

(при $A \neq 0$, $k \neq 0$ та довільних значеннях сталих H та b), а отже, вказані стовпці тільки за наведених умов є лінійно незалежними і тільки в такому випадку ранг матриці W_o дорівнює числу ненульових строк отриманої ступінчастої матриці Q. При цьому за інших варіацій початкових станів системи лінійна залежність стовпців (рядків) матриці W_o може також спостерігатися за певних значень A, H, b, k. Це означає, що рангова умова

$$rank\left[\tilde{W}_{id_s}\right] = rank\left[\tilde{\tilde{W}}_{id_s}\right] = rank\left[W_o\right]_{n\times n} = n$$

виконується тільки для тих випадків, коли сталі A, H, b, k та хоча б один із початкових станів системи є ненульовими. Тобто розгляд тільки перших чотирьох стовпців матриць $\tilde{W}_{id_s}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{id_s}$ не дає загального висновку.

Поряд із цим при $A \neq 0$ та довільних значеннях сталих H, b, k та початкових станів $x_i^0 \;\left(i = \overline{1,4}\right)$, згідно з результатами проведених у роботі [14] досліджень властивості керованості в досліджуваній динамічній системі з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, встановлено, що для неї виконується умова повної керованості, тобто матриці керованості $\tilde{W}_{kep}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$, що становлять другий блок у відповідних матрицях ідентифікованості $\tilde{W}_{id_s}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{id_s}$, є матрицями повного рангу n, тобто рангові умови (6) для матриць $\tilde{W}_{id_s}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{id_s}$ виконуються повністю. А оскільки при цьому в роботі визначено, що для досліджуваної динамічної системи не існує випадків, коли вона є не повністю (частково) керованою або некерованою, отже, спираючись на отримані результати, можна зробити висновок, що досліджувана система з гіроскопічною структурою є повністю ідентифікованою. З огляду на те, що повна ідентифікованість систем цілком залежить від їх повної керованості, отримані результати дослідження щодо врахування або неврахування об'єднання зовнішніх сил у математичних моделях досліджуваної системи цілком поширюються і на результати, отримані в цій роботі: на результати аналізу ідентифікованості досліджуваної системи впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць ідентифікованості, складеної для випадку існуючої можливості об'єднання збурюючих сил.

Висновки. У роботі проведено дослідження властивості параметричної ідентифікованості за станом динамічної системи з гіроскопічною структурою з урахуванням дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується за допомогою побудованої уточненої лініаризованої неперервної математичної моделі у змінних стану, що являє собою систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі складеною нелінійною правою частиною. Залежно від можливості об'єднання діючих на досліджувану систему зовнішніх збурень отримана в роботі модель динамічної системи представлена у двох можливих її варіантах подання, за кожною з яких своєю чергою проведено аналіз параметричної ідентифікованості за станом досліджуваної системи керування.

За результатами проведеного дослідження в роботі визначено, що аналізовувана динамічна система за будь-яких значень власного кінетичного моменту, коефіцієнтів сил дисипації та коефіцієнтів крутизни характеристики моментних датчиків є повністю ідентифікованою за станом, а отже, встановлено принципову можливість відновлення (ідентифікації) невідомих або змінених у результаті дії зовнішніх факторів зазначених параметрів моделей, що своєю чергою визначає існування реальної можливості в заданих умовах отримання адекватних моделей досліджуваної системи, придатних до подальшого використання. Крім того, в роботі встановлено, що на результати аналізу ідентифікованості досліджуваної системи істотним чином впливають результати дослідження властивості повної її керованості, причому суттєвий вплив на одержувані висновки в цьому випадку справляє аналіз тільки тієї матриці ідентифікованості, яка складається для системи з моделлю, отриманою в умовах, коли є можливим об'єднання збурюючих нелінійних сил, що діють на досліджувану систему. Неврахування об'єднання зовнішніх сил в математичних моделях досліджуваної системи значно ускладнює матрицю керованості, а отже, відповідну матрицю ідентифікованості, складених для випадку, коли об'єднання зовнішніх сил не видається можливим.

Крім того, зауважимо, що отримані в роботі результати можуть бути використані в процесі здійснення подальшого аналізу фундаментальних властивостей динамічних систем та з метою розширення використання досліджуваних математичних моделей у застосуванні різних видів автоматичного керування й регулювання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. Москва : Мир, 1975. 680 с.
2. Hengl S., Kreutz C., Timmer J., Maiwald T. Data-based identifiability analysis of non-linear dynamical models. *Bioinformatics*. 2007, Vol. 23, No. 19. P. 2612–2618.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем. Москва : Мир, 1979. 302 с.
4. Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. Москва : Энергия, 1979. 240 с.
5. Дилигенская А.Н. Идентификация объектов управления : учебное пособие. Самара : Самар. гос. техн. ун-т., 2009. 136 с.
6. Семенов А.Д., Артамонов Д.В., Брюхачев А.В. Идентификация объектов управления : учебное пособие. Пенза : Пенз. гос. ун-т, 2003. 215 с.
7. Новиков С.И. Практическая идентификация динамических характеристик объектов управления теплоэнергетического оборудования : учеб. пособие. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. 64 с.
8. Шэнь К., Неусыпин К.А. Исследование критериев степеней наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости линейных динамических систем. *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. № 17 (11). С. 723–731.
9. Балонин Н.А. Теоремы идентифицируемости. Санкт-Петербург : Политехника, 2010. 48 с.
10. Балонин Н.А. Новый курс теории управления движением. Санкт-Петербург : Изд-во СПб ун-та, 2000. 160 с.
11. Шумихин А.Г., Бояршинова А.С. Идентификация сложного объекта управления по частотным характеристикам, полученным экспериментально на его нейросетевой динамической модели. *Автоматика и телемеханика*. 2015. № 4. С. 125–134.
12. Лазарэв Ю.Ф., Бондар П.М. Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації. Київ : Політех, 2010. 625 с.
13. Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А. Вопросы методологии анализа, управления, регулирования, идентификации и наблюдения гироскопических систем. *Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 157–169.
14. Леонтьева В.В., Кондратьева Н.А. Керованість динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень. *Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2019. № 2. С. 90–100.
15. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. Москва : Наука, 1974. 344 с.
16. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва : Наука, 1971. 312 с.
17. Новицкий В.В. Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки. *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування*. Київ : Інститут математики НАН України. 2008. Т. 78. 124 с.

18. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. Москва : Наука, 1987. 712 с.
19. Клейман Е.Г. Идентификации нестационарных объектов. *Автоматика и телемеханика*. 1999. № 10. С. 3–45.

REFERENCES

1. Eikkhoff P. (1975) Osnovy identifikatsii sistem upravleniya. Otsenivaniye parametrov i sostoyaniya [Control system identification basics. Parameters and state estimation]. Moscow: Mir. (in Russian).
2. Hengl S., Kreutz C., Timmer, J., Maiwald, T. (2007) Data-based identifiability analysis of non-linear dynamical models. *Bioinformatics*, vol. 23, no. 19, pp. 2612–2618.
3. Grope D. (1979) Metody identifikatsii sistem [Methods of identification systems]. Moscow: Mir. (in Russian).
4. Deitch A. M. (1979) Metody identifikatsii dinamicheskikh obyektov [Methods for the identification of dynamic objects]. Moscow, Energiya. (in Russian).
5. Diligenskaya A. N. (2009) Identifikatsiya obyektov upravleniya [Identification of the objects of control]. Samara: Samara State Technical University. (in Russian).
6. Semenov A. D., Artamonov D. V., Bryukhachev, A. V. (2003) Identifikatsiya obyektov upravleniya [Identification of the objects of control]. Penza: Publishing house Penza State University. (in Russian).
7. Novikov S. I. (2004) Prakticheskaya identifikatsiya dinamicheskikh kharakteristik obyektov upravleniya teploenergeticheskogo oborudovaniya [Practical identification of dynamic characteristics of heat power equipment control objects]. Novosibirsk: Publ. NGTU. (in Russian).
8. Shen K., Neusypin K. A. (2016) Issledovaniye kriteriyev stepeney nablyudayemosti, upravlyayemosti i identifitsiruyemosti lineynykh dinamicheskikh sistem [Study of the Criteria for the Degrees of Observability, Controllability and Identifiability of the Linear Dynamical Systems]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie* [Mechatronics, automation, control], no. 17 (11), pp. 723–731. (in Russian).
9. Balonin N. A. (2010) Teoremy identifitsiruyemosti [Theorems of Identifiability]. Saint Petersburg: Politekhnika. (in Russian).
10. Balonin N. A. (2000) Novyy kurs teorii upravleniya dvizheniyem [New Course on the Theory of Motion Control]. Saint Petersburg : Saint Petersburg State University. (in Russian).
11. Shumikhin A. G., Boiarshinova A. S. (2015) Identifikatsiya slozhnogo obyekta upravleniya po chastotnym kharakteristikam, poluchennym eksperimental'no na yego neyrosetevoy dinamicheskoy modeli [Application of neural network models for automated management of complex chemicalengineering system]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], no. 4, pp. 125–134. (in Russian).
12. Lazarev Yu. F., Bondar P. M. (2010) Osnovy teoriyi chutlyvykh elementiv system oriyentatsiyi [Fundamentals of the theory of sensitive elements of orientation systems]. Kiev: Polytech. (in Ukrainian).
13. Leontieva V. V., Kondratieva N. A. (2017) Voprosy metodologii analiza, upravleniya, regulirovaniya, identifikatsii i nablyudeniya giroskopicheskikh sistem [Questions about methodology of analysis, control, regulation, identification and observation of gyroscopic systems]. *Visnyk zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fizyko-matematychni nauky.* Zaporizhzhya: ZNU, no. 2, pp. 157–169. (in Russian).
14. Leontieva V. V., Kondratieva N. A. (2019) Kerovanistʹ dynamichnoyi systemy z hiroskopichnoyu strukturoyu pry diyi dysypatyvnykh syl ta syl radialʹnoyi korektsiyi z urakhuvannyam pevnoho neliniynoho zmishanoho vydu zovnishnikh zburenʹ [Controllability of a dynamical system with a gyroscopic structure under the action of dissipative forces and forces of radial correction with a certain nonlinear external disturbances of mixed type]. *Visnyk zaporiz'koho natsional'noho universytetu: zb. nauk. statey. Fizyko-matematychni nauky.* Zaporizhzhya: ZNU. no. 2, pp. 90–100. (in Ukrainian).
15. Merkin D. R. (1974) Giroskopicheskiye sistemy [Gyroscopic systems]. Moscow: Nauka. (in Russian).
16. Merkin D. R. (1971) Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti dvizheniya [Introduction to Motion Stability Theory]. Moscow: Nauka. (in Russian).
17. Novitsky V. V. (2008) Keruvannya hiroskopichnymy systemamy ta inshi zadachi analitychnoyi mekhaniky [Control of gyroscopic systems and other problems of analytical mechanics]. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.* Matematyka ta yiyi zastosuvannya. Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, vol. 78. (in Ukrainian).
18. Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya [A handbook on the theory of automatic control] (1987) / Ed. A.A. Krasovsky. Moscow: Nauka. (in Russian).
19. Kleiman E. G. (1999) Identifikatsii nestatsionarnykh obyektov [Identification of non-stationary objects]. *Avtomatika i telemehanika* [Automation and telemechanics], no. 10, pp. 3–45 (in Russian).