УДК 531.383
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-07

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО И ВОЗМУЩАЮЩЕГО МОМЕНТОВ СИЛ

Лещенко Д. Д.
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, Украина
orcid.org/0000-0003-2436-221X
leshchenko_d@ukr.net

Козаченко Т. А.
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры теоретической механики
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, Украина
orcid.org/0000-0001-9034-3776
kushpil.t.a@gmail.com

Ключевые слова: *случай Лагранжа, метод усреднения, сопротивление среды.*

Анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач космонавтики, входа летательных аппаратов в атмосферу, движения вращающегося снаряда, гироскопии. При этом во многих случаях в качестве порождающего движения твердого тела, учитывающего основные моменты сил, действующих на тело, может рассматриваться движение Лагранжа. Напомним, что в этом случае тело предполагается имеющим неподвижную точку и находящимся в поле силы тяжести, причем центр масс тела и неподвижная точка лежат на оси динамической симметрии тела. В работе исследуются возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием восстанавливающего и возмущающего моментов сил, зависящих от медленного времени. Кроме того, величина восстанавливающего момента зависит от малого угла нутации. Рассматривается асимптотическое поведение решений системы уравнений движения при значениях малого параметра, отличных от нуля, на достаточно большом интервале времени. Для анализа нелинейной системы уравнений движения применяется метод усреднения. В отличие от процедуры усреднения по движению Эйлера-Пуансо, усреднение по движению Лагранжа позволяет нам рассматривать движение с немалыми по абсолютной величине моментами внешних сил как порождающее движение. Выделяются медленно и быстро меняющиеся переменные. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по фазе угла нутации и описана процедура усреднения для медленных переменных возмущенного движения твердого тела в первом приближении. С помощью метода усреднения уменьшается порядок системы с шести до трех, делая систему автономной и содержащей только медленно меняющиеся переменные. В качестве примера развитой методики рассматривается возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа, с учетом моментов сил, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Усредненная система интегрируется численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Исследован новый класс вращательных движений динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с учетом возмущающего и восстанавливающего моментов сил.

ЕВОЛЮЦІЯ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВІДНОВЛЮЮЧОГО ТА ЗБУРЮЮЧОГО МОМЕНТІВ СИЛ

Лещенко Д. Д.
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри теоретичної механіки
Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна
orcid.org/0000-0003-2436-221X
leshchenko_d@ukr.net

Козаченко Т. О.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри теоретичної механіки
Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна
orcid.org/0000-0001-9034-3776
kushpil.t.a@gmail.com

Ключові слова: *випадок Лагранжа, метод усереднення, опір середовища.*

Аналіз обертальних рухів тіл навколо нерухомої точки важливий для розв'язування задач космонавтики, входу літальних апаратів в атмосферу, руху снаряда, що обертається, та гіроскопії. У багатьох випадках як породжувальний рух твердого тіла, що враховує основні моменти сил, які діють на тіло, може розглядатися рух у випадку Лагранжа. Нагадаємо, що в цьому випадку тіло має нерухому точку і знаходиться в полі сили ваги, причому центр мас тіла та нерухома точка розташовані на осі динамічної симетрії. У роботі досліджується рух динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки під дією відновлюючого і збурюючого моментів сил, які повільно змінюються з часом. Крім того, величина відновлюючого моменту залежить від малого кута нутації. Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи рівнянь руху твердого тіла при значеннях малого параметра, відмінних від нуля, на досить великому проміжку часу. Для аналізу нелінійної системи рівнянь руху застосовується метод усереднення. На відміну від процедури усереднення по руху Ейлера-Пуансо, усереднення по руху Лагранжа дає нам змогу розглядати рух із немалими за абсолютною величиною моментами зовнішніх сил як породжувальний рух. Використовуючи низку перетворень, розділяємо змінні на повільні та швидкі. Наведені умови можливості усереднення рівнянь руху за фазою кута нутації. Одержана усереднена система рівнянь першого наближення для повільних змінних. За допомогою метода усереднення порядок системи зменшується з шести до трьох, що робить систему автономною та полегшує розв'язання задачі. Як приклад запропонованої методики розглянуто збурений рух, близький до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища. Усереднена система проінтегрована чисельно при різних початкових умовах і параметрах задачі. Під дією дисипативного моменту тіло прагне до стійкого нижнього положення рівноваги. Досліджено новий клас обертальних рухів динамічно симетричного твердого тіла з урахуванням відновлюючого і збурюючого моментів сил.

EVOLUTION OF MOTIONS OF A RIGID BODY UNDER THE ACTION OF UNSTEADY RESTORING AND PERTURBATION TORQUES OF FORCES

Leshchenko D. D.
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Head of the Department of Theoretical Mechanics
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Didrikhsona str., 4, Odessa, Ukraine
orcid.org/0000-0003-2436-221X
leshchenko_d@ukr.net

Kozachenko T. A.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Theoretical Mechanics
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Didrikhsona str., 4, Odessa, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9034-3776
kushpil.t.a@gmail.com

Key words: *Lagrange's case, averaging method, resisting mediumi.*

The analysis of rotational motions of the bodies about a fixed point is important for solving the problems of astronautics, the problems of the entry of flying vehicles into the atmosphere, and the motion of a rotating projectile and gyroscopy. Moreover, in many cases, the motion in Lagrange case can be regarded as a generating motion of a rigid body, which takes into account the main torques acting on the body. Perturbed motion of a rigid body, close to the Lagrange case, under the action of restoring and perturbation torques that of forces are slowly varying in time is investigated in the work. Recall that in this case the body is assumed to have a fixed point and to be in the gravitational field, with the center of mass of the body lying on the dynamic symmetry axis of the body. The value of the restoring torques also depends on the small nutation angle. The problem is formulated of studying the behavior of the solution of system of equations of motion for the values of small parameter different from zero on a sufficiently large interval of time. To analyze a nonlinear system of equations of motion, the averaging method is used. In contrast to the procedure of averaging with respect to the Euler-Poinsot motion, averaging with respect to Lagrange motion permits us to examine the motion with external force torques, large in absolute value, as a generating motion. The problem can be decomposed into slowly and quickly changing variables. Conditions for the possibility of averaging the equations of motion with respect to the nutation phase angle are presented and averaging procedure for slow variables of a perturbed motion of a rigid body in the first approximation is described. The averaging technique reduces the system order from six to three, making the system autonomous, and contains only slowly changing variables. As an example of the developed procedure, we investigate a perturbed motion, close to Lagrange case, taking into account the torques acting on a rigid body from the external medium. The averaged system is integrated numerically for various initial conditions and parameters of the problem. A new class of rotational motions of a dynamically symmetric rigid body about a fixed point has been investigated with restoring and perturbation torques of forces being taken into account.

Введение. В теоретическом аспекте исследование эволюции движений твердого тела относительно неподвижной точки представляет интерес для специалистов в области теоретической механики. Они могут быть строго сформулированы в рамках динамических моделей твердого тела в случае Лагранжа, который является порождающим. Исследованию движения волчка Лагранжа с неподвижной точкой посвящен ряд работ [1; 2]. Уточнение исследуемых моделей проводится путем учета возмущающих факторов различной физической природы, как внутренних, так и внешних, а также соответствующих предположений относительно порождающего решения. Восстанавливающий момент сил, аналогичный моменту силы тяжести, создается также аэродинамическими силами, которые действуют на тело в потоке газа. Поэтому движения, близкие к случаю Лагранжа, рассматривались в работах по динамике неуправляемого тела в атмосфере, где учитывались восстанавливающий и возмущающие моменты различной природы [3]. Исследовалось движение вращающегося твердого тела в атмосфере под действием синусоидального или бигармонического аэродинамического момента, зависящего от времени, и малых возмущающих моментов [4].

Анализ состояния проблемы. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследованы в ряде работ [2; 5–18]. Обзор результатов по проблеме эволюции вращательных движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, дается в некоторых трудах [2; 5–10]. В работах [2; 5–9] приведены условия возможности усреднения уравнений движения тела, близких к случаю Лагранжа, по фазе угла нутации, получена усредненная система уравнений и рассмотрено движение тела в среде с линейной диссипацией. Исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием момента сил, медленно изменяющегося во времени. Рассмотрены возмущенные вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, при разных порядках малости проекций вектора возмущающего момента сил. Исследована эволюция вращений тела, близких к регулярной прецессии, под действием нестационарного возмущающего момента и восстанавливающего момента, медленно изменяющегося во времени и зависящего от угла нутации.

Рассматривалось движение симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки под действием сил трения, обусловленных внешней диссипативной средой [11]. Статья Б.П. Иващенко [12] посвящена исследованию движения симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в поле сил тяжести, когда ось волчка отклонена от вертикали. Изучалось асимптотическое поведение движений волчка Лагранжа, близких к регулярным прецессиям, под действием малого возмущающего момента [13; 14].

В работе [15] была предпринята попытка применить предложенную в [2; 5] процедуру усреднения по движению Лагранжа для исследования движения динамически симметричного твердого тела под действием возмущающих моментов, гиростатического момента и ньютоновского силового поля.

Рассматривалось пространственное движение динамически симметричных спутников-гиростатов под действием внешнего магнитного момента сил, являющегося восстанавливающим (опрокидывающим) [16]. В этом смысле задача близка к случаю Лагранжа. В работе В.Г. Демина и Л.И. Конкиной [17] введены канонические переменные «действие-угол» для волчка Лагранжа. Исследованы периодические движения волчка Лагранжа при малом смещении его центра тяжести или при малом нарушении его осевой динамической симметрии. В работе Ю.М. Заболотнова [18] рассматриваются резонансы низших порядков при движении волчка Лагранжа с малой массовой асимметрией.

Цель и задачи исследования. Исследуется новый, по мнению авторов, класс задач, для которых возмущенное движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела происходит под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$, изменяющегося на ограниченном (при $\varepsilon \to 0$) интервале времени, и малого угла нутации $\lambda = \varepsilon\theta$, а также возмущающего момента, зависящего от медленного времени. Здесь t – время, θ – угол нутации, ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{gathered}
A\dot{p} + (C - A)\, qr = \mu(\tau,\lambda)\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1,\\
A\dot{q} + (A - C)\, pr = -\mu(\tau,\lambda)\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2,\\
C\dot{r} = \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p,\ q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi,\ \tau), \quad i = 1, 2, 3,\\
\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \lambda = \varepsilon\theta,\\
\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \qquad \dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $p,\ q,\ r$ – проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела, проходящие через неподвижную точку. Величины $\varepsilon M_i\ (i = 1, 2, 3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon \ll 1$; $\psi,\ \theta,\ \varphi$ – углы Эйлера; A – экваториальный, а C – осевой моменты инерции относительно неподвижной точки, $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $\mu(\tau,\lambda)$, зависящий от двух медленных переменных: медленного времени τ

и переменной $\lambda = \varepsilon\theta$ (соответствующей малому углу нутации). Восстанавливающий момент является дифференцируемой функцией от двух переменных. При $\varepsilon = 0$ восстанавливающий момент не зависит от τ и λ, тогда $\mu_0 = \mu(0,0) = mgl$ (случай тяжелого волчка) и система (1) описывает движение в случае Лагранжа. Здесь m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки до центра тяжести тела.

Ставится задача исследовать асимптотическое поведение решений системы (1) при значениях малого параметра ε, отличных от нуля, на достаточно большом интервале времени порядка ε^{-1} с помощью метода усреднения [19]. В работе Л.Д. Акуленко, Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко [9] система уравнений (1) исследована для частного случая возмущенного движения быстро закрученного тела, близкого к волчку Лагранжа, когда две проекции вектора возмущающего момента малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Процедура усреднения. В дальнейшем применяется модифицированная процедура усреднения [2; 5]. Она используется для усреднения системы (1) по фазе угла нутации θ вдоль траекторий изменения $\theta(t)$ при движении тела под действием восстанавливающего и возмущающего моментов. Первыми интегралами для невозмущенной системы (1) при $\varepsilon = 0$ являются величины [1; 2]

$$G_z = A\sin\theta\left(p\sin\varphi + q\cos\varphi\right) + Cr\cos\theta = c_1,$$
$$H = \frac{1}{2}\left[A\left(p^2+q^2\right) + Cr^2\right] + \mu\cos\theta = c_2, \qquad r = c_3. \quad (2)$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz, H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, $\mu = \mu_0 = \text{const}$, c_i, $i = 1,2,3$ – произвольные постоянные, причем $c_2 \ge -\mu$.

Используя соотношения (2) как формулы преобразования от переменных $(p,\ q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi)$ к переменным $(G_z,\ H,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi)$, приведем первые три уравнения (1) к виду:

$$\begin{gathered}
\dot G_z = \varepsilon\left[\left(M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi\right)\sin\theta + M_3\cos\theta\right],\\
\dot r = \varepsilon C^{-1}M_3,\\
\dot H = \varepsilon\left[\left(M_1 p + M_2 q + M_3 r\right) + \mu'\cos\theta\right],\\
M_i = M_i\left(p,q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau\right),\ i = 1,2,3,\\
\frac{d\mu(\tau,\lambda)}{dt} = \varepsilon\frac{\partial\mu(\tau,\lambda)}{\partial\tau} + \varepsilon\dot\theta\cdot\frac{\partial\mu(\tau,\lambda)}{\partial\lambda},\\
\mu' = \frac{\partial\mu}{\partial\tau} + \dot\theta\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}.
\end{gathered} \quad (3)$$

Здесь и в трёх последних кинематических уравнениях (1) подразумевается, что переменные $p,\ q,\ r$ при помощи (2) выражены как функции G_z, H, r, ψ, θ, φ, τ и подставлены в (1), (3).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений [19] $\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon\mathbf{X}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)$, $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\varepsilon)$. Здесь $\mathbf{x},\ \mathbf{X}$ – n-мерные, а $\mathbf{y},\ \mathbf{Y}$ – m-мерные векторные функции, ε – малый положительный параметр. Переменные $\mathbf{x}$ – медленные, так как $\dot{\mathbf{x}} \sim \varepsilon$, а переменные $\mathbf{y}$ – быстрые (относительно $\mathbf{x}$), поскольку $\dot{\mathbf{y}} \sim 1$.

Правые части уравнений (3) содержат три быстрые переменные – углы собственного вращения φ, нутации θ и прецессии ψ, периодические по t. Это затрудняет применение метода усреднения (проблема резонанса). Для исключения этой трудности потребуем, чтобы выражения в правых частях уравнений (3) могли быть представлены как функции медленных переменных G_z, H, r и угла нутации θ, периодические по фазе угла θ с периодом 2π, и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил (см. соотношения для первых интегралов (2)):

$$\begin{gathered}
M_1^* = M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi,\quad M_2^* = M_1 p + M_2 q,\quad M_3^* = M_3,\\
M_i^* = M_i^*(G_z,H,r,\tau,\theta),\ i = 1,2,3,\\
M_1 = pf,\quad M_1 = qf,\quad M_3 = M_3^*,\ f = f(G_z,H,r,\theta,\tau).
\end{gathered} \quad (4)$$

Система (3) уравнений возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
\dot G_z &= \varepsilon F_1\left(G_z,H,r,\tau,\theta\right), & F_1 &= M_1^*\sin\theta + M_3^*\cos\theta,\\
\dot H &= \varepsilon F_2\left(G_z,H,r,\tau,\theta\right), & F_2 &= M_2^* + M_3^* r + \mu'\cos\theta,\\
\dot r &= \varepsilon F_3\left(G_z,H,r,\tau,\theta\right), & F_3 &= C^{-1}M_3^*.
\end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $F_i = F_i\left(G_z,H,r,\tau,\theta\right)$ $(i = 1,2,3)$ -2π-периодические функции фазы угла θ.

Известно выражение для угла нутации θ в невозмущённом движении Лагранжа как функции времени t, интегралов движения (2) и произвольной фазовой постоянной β [1; 2]:

$$\begin{gathered}
u = \cos\theta = u_1 + (u_2 - u_1)\,\mathrm{sn}^2\left(\alpha t + \beta\right),\\
\dot\theta = -\frac{\dot u}{\sqrt{1-u^2}},\quad \alpha = \left[\frac{\mu\left(u_3 - u_1\right)}{2A}\right]^{1/2},\\
\mathrm{sn}\left(\alpha t + \beta\right) = \sin\mathrm{am}\left(\alpha t + \beta, k\right),\ k^2 = \left(u_2 - u_1\right)\left(u_3 - u_1\right)^{-1},\quad 0 \le k^2 \le 1.
\end{gathered} \quad (6)$$

Здесь $\mu = \mu_0$, u – периодическая функция t с периодом $K(k)/\alpha$, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода; sn и am – эллиптические синус и амплитуда [20], k – модуль эллиптических функций, $u_1,\ u_2,\ u_3$ – вещественные корни кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1-u^2)A - (G_z - Cru)^2]. \quad (7)$$

Соотношения между его корнями и первыми интегралами (2) записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2r^2}{2A\mu},\quad u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{G_zCr}{A\mu} - 1,\\
u_1u_2u_3 = -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu},\qquad -1 \le u_1 \le u_2 \le 1 < u_3 < +\infty.
\end{gathered} \quad (8)$$

Предполагается проводить исследование возмущенного движения в медленных переменных $u_i,\ i=1,2,3$. Медленные переменные $G_z,\ H,\ r$ удается выразить через u_i из (8) следующим образом:

$$
\begin{gathered}
G_z = \delta_1 (\Omega + \delta_2 R)^{1/2}\,\delta_3, \qquad r = \delta_1 C^{-1} (\Omega - \delta_2 R)^{1/2}, \\
H = \frac{1}{2}\mu_0 \left[(u_1+u_2+u_3)\left(1+AC^{-1}\right) + (\delta_2 R - u_1u_2u_3)\left(1-AC^{-1}\right) \right], \\
R = \left[\left(1-u_1^2\right)\left(1-u_2^2\right)\left(u_3^2-1\right) \right]^{1/2}, \quad \Omega = u_1+u_2+u_3+u_1u_2u_3, \ \ 0 \le \{R, \Omega\}, \\
\delta_1 = (A\mu_0)^{1/2}\operatorname{sign} r, \qquad \delta_2 = \operatorname{sign}\left(G_z^2 - C^2 r^2\right), \\
\delta_3 = \operatorname{sign}(1 + u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3).
\end{gathered} \tag{9}
$$

Величины δ_1 и δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z и r. Если в процессе движения одна или обе величины $G_z^2 - C^2r^2$ и r проходят через нуль, то возможна смена знаков δ_1 и δ_2, для определения которых можно воспользоваться исходной системой (5). После ряда преобразований искомая система уравнений для медленных переменных $u_i,\ i=1,2,3$ принимает вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{du_i}{dt} = \varepsilon V_i(u_1,u_2,u_3,\tau,\lambda,\theta), \quad u_i(0)=u_i^0, \quad i=1,2,3, \\
V_i = V_{i1}F_1^* + V_{i2}F_2^* + V_{i3}F_3^* + V_{i4}\,\mu', \\
V_{ij} = V_{ij}(u_1,u_2,u_3,\tau,\lambda), \quad j=1,2,3,4,
\end{gathered} \tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
V_{11} = \frac{G_z - Cru_1}{A\Delta}; \qquad \mu = \mu(\tau,\lambda), \qquad \mu' = \frac{\partial\mu}{\partial\tau} + \dot\theta\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}; \\
V_{12} = \frac{u_1^2-1}{\Delta}; \quad V_{13} = \frac{C}{A\Delta}\left[Ar(1-u_1^2) - u_1(G_z - Cru_1) \right]; \\
V_{14} = \frac{\left[A(u_1^2-1)\left(Cr^2-2H\right) - (G_z-Cru_1)^2 \right]}{2A\mu\Delta}; \\
\Delta = \mu(u_1-u_2)(u_1-u_3), \qquad \Delta \ne 0.
\end{gathered}
$$

Здесь функции $V_{2j},\ V_{3j},\ j=1,2,3,4$ получаются из соответствующих выражений (10) для V_{ij} при $i=1$ путем циклической перестановки индекса i в величинах u_i. Функции F_i^* получаются подстановкой в F_i из (5) выражений (9). Начальные значения для переменных u_i вычисляются по начальным данным $G_z^0,\ H^0,\ r^0$ при помощи соотношений (9).

Далее в правые части системы (10) подставим быструю переменную θ и ее производную $\dot\theta$ из выражения (6) для невозмущенного движения. Тогда правые части системы (10) будут периодическими функциями t с периодом $2K(k)/\alpha$, где величины k и α определены соотношениями (6) и являются медленными переменными. Усредняя правые части полученной системы по фазе угла нутации, получим в медленном времени $\tau=\varepsilon t$ усредненную систему первого приближения:

$$
\begin{gathered}
\frac{du_i}{d\tau} = U_i(u_1,u_2,u_3,\tau,\lambda), \quad u_i(0)=u_i^0, \ \ i=1,2,3, \\
U_i(u_1,u_2,u_3,\tau,\lambda) = \frac{\alpha}{2K(k)} \int_0^{2K/\alpha} V_i(u_1,u_2,u_3,\tau,\lambda,\theta(t))\,dt.
\end{gathered} \tag{11}
$$

После исследования и решения системы (11) для u_i медленные переменные $G_z,\ H,\ r$ восстанавливаются по формулам (9).

Результаты исследований. В качестве примера развитой методики рассмотрим возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа, под действием внешней среды. Возмущающие моменты $\varepsilon M_i,\ i=1,2,3$ имеют вид [21]:

$$
\begin{gathered}
M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \\
M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau),\ b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Здесь $a(\tau),\ b(\tau)$ – интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела. Моменты (12) удовлетворяют условиям (4) возможности усреднения по фазе угла нутации θ. Система (3) при данных возмущениях записывается следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\dot G_z = -\varepsilon\left[a(\tau)\left(p\sin\varphi + q\cos\varphi\right)\sin\theta + b(\tau)r\cos\theta \right], \\
\dot H = -\varepsilon\left[a(\tau)\left(p^2+q^2\right) + b(\tau)r^2 + \mu'\cos\theta \right], \\
\dot r = -\varepsilon C^{-1} b(\tau) r.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Проинтегрировав третье уравнение (13), получим (r^0 – произвольное начальное значение осевой скорости вращения):

$$
r = r^0 \exp\left(-\varepsilon C^{-1}\int_0^t b(\varepsilon t)\,dt\right). \tag{14}
$$

Согласно процедуре п. 4 переходим к новым медленным переменным и получим усредненную систему (11) с учетом возмущающих моментов (12) вида:

$$
\begin{gathered}
\frac{du_1}{d\tau} = \frac{-1}{\Delta}\Big\{ a(\tau)A^{-1}\Big[A^{-1}(G_z - Cru_1)(G_z - Crv) + \qquad (123) \\
+ (u_1^2-1)(2H - Cr^2 - 2\mu_0 v)\Big] + A^{-1}b(\tau)r(G_z - Cru_1)(v - u_1) - \\
- \frac{\partial\mu(\tau,\lambda)}{\partial\tau}\left[(u_1^2-1)\left(v + \frac{1}{2\mu}\left(Cr^2 - 2H\right)\right) - \frac{1}{2A\mu}(G_z - Cru_1)^2 \right]\Big\} \\
v = u_3 - (u_3 - u_1)E(k)/K(k).
\end{gathered}, \tag{15}
$$

Символ (123) означает, что уравнения для $u_2,\ u_3$ получаются из уравнения (15) для u_1 циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Однако при этой перестановке выражения для v, где $K(k),\ E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода [20], следует оставить неизменными во всех трех уравнениях. Вместо $G_z,\ H,\ r,\ k$ подставляются их выражения из (6), (9).

Рассмотрим случай, когда функции $a(\tau),\ b(\tau),\ \mu(\tau,\lambda)$ имеют удобный для анализа вид:

$$
\begin{gathered}
a(\tau) = a_0 + a_1\tau, \qquad b(\tau) = b_0 + b_1\tau, \\
\mu = \mu(\tau,\lambda) = \mu_0 + \mu_1(\tau + 2A\cos\lambda), \\
\{a_0,\ a_1,\ b_0,\ b_1,\ \mu_0,\ \mu_1\} = \text{const}, \\
a_0 > 0,\ b_0 > 0,\ \mu_0 > 0,\ a_1 \ge 0,\ b_1 \ge 0,\ \mu_1 \ge 0
\end{gathered} \tag{16}
$$

Усреднённая система (15) с учетом (16) проинтегрирована численно для $\tau \ge 0$ при различных начальных условиях и параметрах задачи. Предполагается, что в начальный момент времени

$t = 0$ волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения вокруг оси динамической симметрии, равную r^0 и отклонение на угол θ^0 от вертикали. Принимаем, кроме того, $A = 1.8$, $C = 1$, $\mu_0 = 0.8$, $\mu_1 = 0.01$, $a_0 = 0.125$, $b_0 = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, $a_1 = b_1 = 1$, $u_2^0 = \cos\theta^0$.

Рассмотрим два случая, соответствующие начальным данным (табл. 1).

Таблица 1

Начальные значения u_1, u_2, u_3, θ, r

Случай	u_1^0	u_2^0	u_3^0	θ^0	r^0
1	–0.089	0.866	1.13	30º	1.73
2	–0.485	0.819	1.07	35º	1.3

Величины G_z, H, r находим по формулам (9) используя значения u_i, найденные в результате численного интегрирования.

Обсуждение результатов. На рис. 1–4 изображены графики функций G_z, H, r, u_i $(i = 1, 2, 3)$ для рассмотренных случаев. Полная энергия тела H, проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_z и угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии r убывают. Величина u_3 достаточно быстро асимптотически стремится к единице. Переменные u_1 и u_2 монотонно убывают и стремятся к -1. При этом, как следует из первого равенства (3), имеем $\cos\theta \to -1$ при $\theta \to \pi$. Полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = -0.8$.

Выводы. При сравнении полученных результатов с результатами [2; 5], где μ и M_i не зависят от медленного времени τ и [6], где M_i медленно изменяется во времени, можно отметить их ясное механическое содержание. Зависимость восстанавливающего момента от медленного времени и малого угла нутации и возмущающего момента от времени τ приводит к появлению в усредненной системе уравнений для медленных переменных функций $a(\tau)$, $b(\tau)$ и $\mu(\tau, \lambda)$, зависящих от медленного времени и малого угла нутации, которые при численном интегрировании сглаживают поведение u_i $(i = 1, 2, 3)$, G_z, H. Под действием диссипативного момента (12) тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия быстрее, чем в рассмотренных случаях [2; 5; 6], что следует из задания коэффициентов (16).

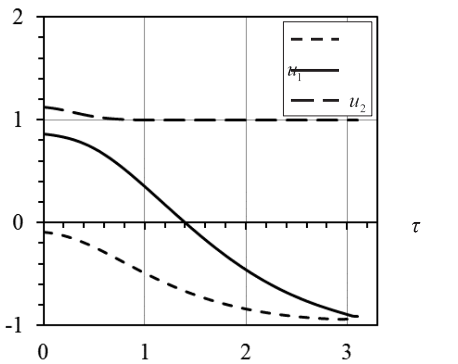

Рис. 1. Графики u_1, u_2, u_3 **(случай 1)**

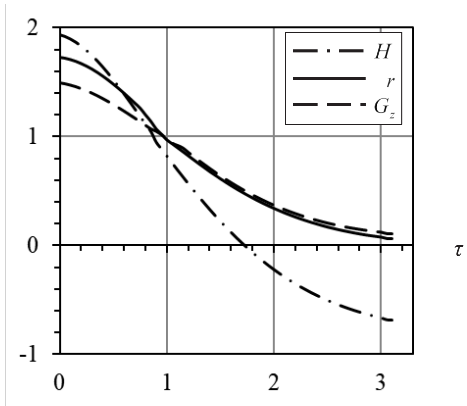

Рис. 2. Графики $\grave{u}$, , $_z$ **(случай 1)**

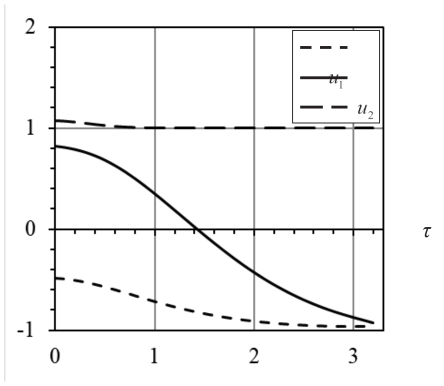

Рис. 3. Графики $\grave{u}_{\text{ù}}$, , **(случай 2)**

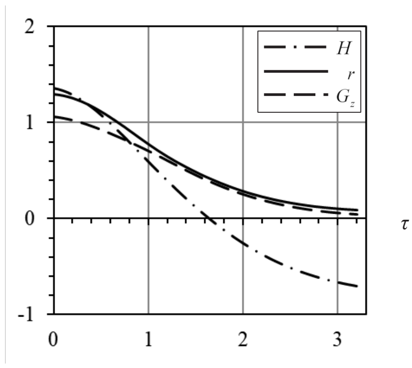

Рис. 4. Графики H, r, G_z **(случай 2)**

Корректность счета подтверждается тем, что полученные по численным данным и формулам (9) значения r практически совпадают с точным решением (14).

Таким образом, решена конкретная задача динамики твердого тела, имеющая значение для приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. Москва; Ленинград : Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham : Springer, 2017. 241 p.
3. Кузмак Г.Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. Москва : Наука, 1970. 348 с.
4. Aslanov V.S. Rigid Body Dynamics for Space Applications. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2017. 400 p.
5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. *Прикладная математика и механика*. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771–778.
6. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Эволюция движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, под действием нестационарного момента сил. *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 115–122.
7. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1986. № 5. С. 3–10.
8. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics.* 2001. Vol. 6, No. 1. P. 3–16.
9. Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений твердого тела под действием восстанавливающего и управляющего моментов. *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2002. № 6. С. 32–38.
10. Ershkov S.V., Leshchenko D.D. On a new type of solving procedure for Euler-Poisson equations (rigid body rotation over a fixed point). *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230, No. 3. P. 871–883.
11. Simpson H.C., Gunzburger M.D. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*. 1986. Vol. 37. No. 6. P. 867–894.
12. Иващенко Б.П. О движении симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1976. № 9. С. 794–797.
13. Сазонов В.В., Сидоренко В.В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа. *Прикладная математика и механика.* 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 951–957.
14. Sidorenko V.V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *Journal of Nonlinear Science*. 1994. Vol. 4. P. 35–57.
15. Amer W. S. The dynamical motion of a gyroscope subjected to applied moments. *Results in Physics*. 2019. Vol. 12. P. 1429-1435.
16. Doroshin A.V. Analytical solutions for dynamics of dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites under magnetic attitude control in omega-regimes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 96. P. 64–74.
17. Демин В.Г., Конкина Л.И. Новые методы в динамике твердого тела. Фрунзе: Илим, 1989. 182с.
18. Заболотнов Ю.М. Резонансные движения статически устойчивого волчка Лагранжа. *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 615–635.
19. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Москва : Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Наука, 1971. 1108 с.
21. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: аналитические методы. Москва : Наука, 1985. 288 с.

REFERENCES

1. Suslov G. K. (1946). *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat.
2. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer.
3. Kuzmak G. E. (1970). *Dinamika neupravlyaemogo dvizheniya letatel'nykh apparatov pri vkhode v atmosferu* [The Dynamics of the Uncontrolled Motion of a Vehicle during Atmospheric Re-Entry]. Moscow: Nauka. (in Russian).

4. Aslanov V. S. (2017). Rigid Body Dynamics for Space Applications. Oxford: Butterworth-Heinemann.
5. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernousko, F. L. (1979). Vozmushchennye dvizheniya tverdogo tela, blizkie k sluchayu Lagranzha [Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 43, no. 5, pp. 829–837.
6. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachenko, T. A. & Leshchenko, D. D. (2017). The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 82, no. 2, pp. 79–84.
7. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernousko, F. L. (1986). Perturbed motion of a rigid body, that are close to regular precession. *Mechanics of Solids*, vol. 21, no. 5, pp. 1–8.
8. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko, I. (2001). Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics*, vol. 6, no. 1, pp. 3–16.
9. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. (2002). Evolution of rotations of a rigid body under the action of restoring and control moments. *Journal of Computer and System Sciences International*, vol. 41, no. 5, pp. 868–874.
10. Ershkov S. V., Leshchenko D. (2019). On a new type of solving procedure for Euler-Poisson equations (rigid body rotation over a fixed point). *Acta Mechanica*, vol. 230, no. 3, pp. 871–883.
11. Simpson H. C., Gunzburger M. D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, vol. 37, no. 6, pp. 867–894.
12. Ivashchenko B. P. (1976). *O dvizhenii simmetrichnogo volchka s polost'yu, zapolnennoy vyazkoy zhidkost'yu* [On the motion of a symmetric gyroscope with a cavity filled with viscous fluid]. Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. Ser. A, no. 9, pp. 794–797 (in Russian).
13. Sazonov V. V., Sidorenko V. V. (1990). The perturbed motions of a solid close to regular Lagrangian precessions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 54, no. 6, pp. 781–787.
14. Sidorenko V. V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *Journal of Nonlinear Science*, vol. 4, pp. 35–57.
15. Amer W. S. (2019). The dynamical motion of a gyroscope subjected to applied moments. *Results in Physics*, vol. 12, pp. 1429–1435.
16. Doroshin A. V. (2017). Analytical solutions for dynamics of dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites under magnetic attitude control in omega-regimes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 96, pp. 64–74.
17. Demin V. G., Konkina L. I. (1989). *Novye metody v dinamike tverdogo tela* [New Methods in Dynamics of a Rigid Body]. Frunze: Ilim (in Russian).
18. Zabolotnov Yu. M. (2019). Resonant motions of the statically stable Lagrange spinning top. *Mechanics of Solids*, vol. 54, no.5, pp. 652–658.
19. Volosov V. M., Morgunov B. I. (1971). *Metod osredneniya v teorii nelineynykh kolebatel'nykh sistem* [Method of Averaging in the Theory of Non-linear Oscillatory Systems]. Moscow: Moscow State Univer. (in Russian).
20. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. (2000). *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*, Academic Press, San Diego, CA.
21. Koshlyakov V. N. (1985). *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoy teorii giroskopov: Analiticheskie metody* [Problems in Rigid Body Dynamics and the Applied Theory of Gyroscopes: Analytical Methods]. Moscow: Nauka (in Russian).