УДК 519.7: 681.5: 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-08

МЕТОД НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЇ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОГРАМНОГО УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Невлюдов І. Ш.
доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та мехатроніки
Харківський національний університет радіоелектроніки
пр. Науки, 14, Харків, Україна
orcid.org/0000-0002-9837-2309
igor.nevliudov@nure.ua

Ромашов Ю. В.
доктор технічних наук, доцент,
професор кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та мехатроніки
Харківський національний університет радіоелектроніки
пр. Науки, 14, м. Харків, Україна,
професор кафедри прикладної математики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майд. Свободи, 4, Харків, Україна
orcid.org/0000-0001-8376-3510
yu.v.romashov@gmail.com

Ключові слова: *перехідний процес, керованість, дискретизація, теплопровідність, обчислювальний розв'язок.*

У статті розглянуто використання методу напівдискретизації для оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами. Метою методу напівдискретизації (також відомого як метод прямих) у статті є не розв'язування початково-крайової задачі, що становить систему з розподіленими параметрами, а зведення цієї початково-крайової задачі до початкової задачі, що становить дискретну апроксимацію досліджуваної розподіленої системи, для подальшого розв'язування задачі оптимізації програмного управління відомими методами, наприклад, на основі принципу максимуму Понтрягіна. Оптимізація процесу нагрівання плоскої стінки з урахуванням обмежень міцності розглядається як приклад використання запропонованого підходу. У цьому прикладі необхідно визначити програму нагріву, яка дасть змогу збільшити температуру плоскої стінки від нижчого заданого значення до більшого заданого значення протягом мінімального часу з урахуванням обмежень міцності, щоб виключити руйнування цієї плоскої стінки через температурні напруження, що виникають у процесі нагріву внаслідок різних температур на крайових поверхнях. Розглядається випадок програми управління температурою нагрівання на одній крайній поверхні й ураховується теплова ізоляція іншої крайньої поверхні плоскої стінки. Теплопровідність розглядається як нестаціонарний розподілений уздовж товщини плоскої стінки процес, математична модель якого представлена відомим рівнянням теплопровідності, яке є диференціальним рівнянням у частинних похідних, що має розглядатися з необхідними початковими й граничними умовами. Методом напівдискретизації одержано дискретну апроксимацію рівняння теплопровідності плоскої стінки та сформульовано задачу щодо керованості відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь. Для розв'язання цієї задачі керованості введено додаткове диференціальне рівняння для управління й за результатами багаторазового інтегрування відповідних звичайних диференціальних рівнянь визначено оптимальну програму нагрівання плоскої стінки.

THE SEMI-DISCRETISATION METHOD FOR OPTIMIZING THE PROGRAM CONTROL OF DISTRIBUTED PARAMETERS SYSTEMS

Nevliudov I. Sh.
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Mechatronics
Kharkiv National University of Radio Electronics
14 Nauky Ave., Kharkiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-9837-2309
igor.nevliudov@nure.ua

Romashov Yu. V.
Doctor of Engineering Science, Docent,
Professor at the Department of Computer-Integrated Technologies, Automation and Mechatronics
Kharkiv National University of Radio Electronics
14 Nauky Ave., Kharkiv, Ukraine,
Professor at the Department of Applied Mathematics
V. N. Karazin Kharkiv National University
4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8376-3510
yu.v.romashov@gmail.com

Key words: *transition modes, controllability, discretisation, heat conduction, numerical solving.*

Using the semi-discretisation method for optimising the program control of distributed parameters systems is considered. The semi-discretisation method (also well-known as the method of lines) is used not to solve the initial-boundary-value problem representing the distributed parameters system, but to reduce this initial-boundary-value problem to the initial-value problem such that to represent the discretisation of the researched distributed parameters system and to solve the problem about optimising the program control by using the well-known methods like the Pontryagin's maximum principle for example. Optimising of heating processes of the planar wall taking into account the strength restrictions is considered as application example of using the proposed approach. This example deals with defining the heating program which will allow increasing the given smaller temperature to the given higher temperature of the planar wall during the minimum time considering with the strength restrictions due to the thermal stresses occurring under the heating process accompanying by the different temperatures of the wall's edges. The control program for the heating temperature on one edge under the heat isolation of the other edge of the planar wall is considered. The heat conduction in the planar wall is considered as the unsteady and spacial distributed process, and the mathematical model of this process is represented using the well-known heat conduction equation which is the partial differential equation must be considered with initial and boundary conditions. The discrete approximation of the heat conduction equation for the planar wall is obtained by using the semi-discretisation method, and the controllability problem for the corresponding ordinal differential equations is formulated. It is built the additional ordinary differential equation for defining the control to solve this controllability problem and the optimal control of heating the planar wall is constructed by means of many time numerical integrating of these built ordinary differential equations.

Постановка проблеми в загальному вигляді. Програмне управління використовується переважно для автоматизованої або автоматичної зміни стану в процесі експлуатації об’єктів автоматизації з урахуванням притаманних таким об’єктам обмежень. Проблема оптимізації програмного управління пов’язана з глобальними завданнями підвищення ефективності експлуатації технічних об’єктів і систем різного призначення, наприклад, за рахунок забезпечення більш високої якості продукції [1] і зменшення витрат часу або споживаної енергії [2], зменшення вичерпання ресурсу устаткування [3]. Проблема оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами є більш складною, ніж для дискретних систем, і розв’язання цієї проблеми вважається сьогодні однією з найголовніших для вдосконалення автоматизації сучасних виробничих комп’ютерно-інтегрованих систем [4; 5].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Найбільш дослідженими та розробленими сьогодні є питання щодо керованості дискретних систем [6–8], саме які і є теоретичною основою оптимізації програмного керування такими системами. Водночас питання керованості щодо систем із розподіленими параметрами сьогодні є вивченими недостатньо повно, тому інтенсивно вивчаються [9–11].

Формулювання мети дослідження. Метод напівдискретизації, відомий також як метод прямих [12], полягає у використанні методу сіток виключно щодо просторових змінних для зведення вихідних диференціальних рівнянь у частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв’язати за допомогою високоефективних методів покрокового інтегрування. Цей метод використовують зазвичай для наближеного аналізу систем із розподіленими параметрами при розв’язуванні технічних питань [13; 14], але можливе його використання для апроксимації задач керованості систем із розподіленими параметрами [15]. Метою дослідження є розроблення узагальненого підходу щодо оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами на основі поєднання методу напівдискретизації та добре розроблених методів розв’язування задач керованості дискретних систем.

Математичне формулювання задачі. Система з розподіленими параметрами в кожний момент часу $t \ge t_0$, де $t_0 \ge 0$ – заданий момент часу, розглядається як задана сукупність нескінченного кількості точок в евклідовому не більш ніж тривимірному просторі E. Положення точок системи відносно заданої точки простору визначаємо за допомогою радіус-векторів $\vec{r}$, що належать векторному простору $\vec{\mathrm{E}}$, який породжується простором E. Отже, система з розподіленими параметрами представляється у вигляді сукупності точок $\vec{r}$, які займають ділянку $\vec{\Upsilon}$ з границею υ, де $\vec{\Upsilon} \subset \vec{\mathrm{E}}$, $\upsilon \subset \vec{\Upsilon}$.

Стан досліджуваної системи з розподіленими параметрами визначаємо за допомогою вектора $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}, t)$, а програму управління цієї системи – відповідно, вектора $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\vec{r}, t)$, де $\vec{r} \in \vec{\Upsilon}$, які мають належати до певних функціональних просторові, узгоджених зі змістом задачі, що розглядається. Математичні моделі систем із розподіленими параметрами можуть бути представлені у вигляді диференціальних рівнянь із частинними похідними, початковими, а також граничними умовами, які в узагальненому вигляді можна записати так:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}),\ \ \tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}, t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in \vec{C}_{\Upsilon}\upsilon, \qquad (1)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathbf{0}},\ \ \forall \vec{r} \in \upsilon, \qquad (2)$$

де $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ – заданий закон швидкості зміни стану системи; $\tilde{\mathbf{x}}_0(\vec{r})$ – заданий стан системи в момент часу $t = t_0$; $\vec{C}_{\Upsilon}\upsilon$ – доповнення υ до $\vec{\Upsilon}$, яке становить частину ділянки $\vec{\Upsilon}$, що не належить до її границі υ; $\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ – заданий закон стану системи в граничних точках; $\tilde{\mathbf{0}}$ – нульовий елемент відповідного функціонального простору.

Позначимо множину $\tilde{U}$ програм управління $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\vec{r}, t)$ таких, що для $\forall \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{U}$ існує єдиний розв’язок $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}, t)$ задачі (1), (2), і далі розглядаємо тільки програми управління $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{U}$. Нехай $\tilde{\mathbf{x}}_1(\vec{r})$ – заданий стан системи. Уважаємо, що для цього заданого стану $\tilde{\mathbf{x}}_1(\vec{r})$ системи існує підмножина $\tilde{U}_1 \subset \tilde{U}$ програм управління $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\vec{r}, t)$, для кожного елементу якої існує відповідний йому момент часу $t_1 > t_0$, у якому розв’язок задачі (1), (2) задовольняє умові $\tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}, t_1) = \tilde{\mathbf{x}}_1(\vec{r})$. Задача оптимізації програмного управління полягає в тому, щоб для заданого стану $\tilde{\mathbf{x}}_1(\vec{r})$ системи знайти таку програму управління $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{U}_1$, щоб різниця $t_1 - t_0$ була мінімальною при виконанні додаткових обмежень:

$$\tilde{Q}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \ge 0, \qquad (3)$$

де $\tilde{Q}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ – деякий заданий функціонал.

Використання методу напівдискретизації. Відповідно до методу напівдискретизації [12], у досліджуваній ділянці $\vec{\Upsilon}$ з границею υ вводимо сітку:

$$\vec{r}_k \in \vec{\Upsilon},\ \ k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4)$$

де $\vec{r}_k$ – вузол сітки; n – кількість вузлів сітки.

Завдяки введеній сітці (4) маємо можливість, замість неперервних функцій $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}, t)$ та $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\vec{r}, t)$, розглядати вузлові значення, які визначатимуть стан системи і програму управління:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(t) = \tilde{\mathbf{x}}(\vec{r}_k, t),\ \ \tilde{\mathbf{u}}_k(t) = \tilde{\mathbf{u}}(\vec{r}_k, t),\ \ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

 ISSN 2413-6549

З використанням відомих формул обчислювального диференціювання й методу сіток (скінченних різностей), замість диференціальних рівнянь, у частинних похідних (1), (2) одержимо звичайні диференціальні рівняння з початковою умовою:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \ \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{6}$$

де

$\mathbf{x} = \left(\tilde{\mathbf{x}}_1^T \ \ \tilde{\mathbf{x}}_2^T \ \ \ldots \ \ \tilde{\mathbf{x}}_n^T\right)^T$, $\mathbf{u} = \left(\tilde{\mathbf{u}}_1^T \ \ \tilde{\mathbf{u}}_2^T \ \ \ldots \ \ \tilde{\mathbf{u}}_n^T\right)^T$ – вектори вузлових значень; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ – дискретна апроксимація заданого закону $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ швидкості зміни стану системи; $\mathbf{x}_0$ – вектор вузлових значень у момент часу $t = t_0$.

Таким же чином за допомогою техніки скінченних різностей одержимо дискретну апроксимацію умови (3):

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0, \tag{7}$$

де $Q(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ – деякий функціонал, що становить дискретну апроксимацію заданого функціоналу $\tilde{Q}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ з умови (3).

Отже, за допомогою методу напівдискретизації вихідна система з розподіленими параметрами (1), (2) представлена дискретною апроксимацією (6), що дасть змогу використовувати добре розроблені методи оптимізації програмного управління дискретними системами. Так, наприклад, без урахування додаткової умови (7) можемо використовувати відомий принцип максимуму [6]. У разі лінійного закону $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ швидкості зміни стану системи рівняння (6) набуде найпростішого вигляду:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \ \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{8}$$

де $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ – задані матриці.

Приклад використання запропонованого підходу щодо оптимізації програмного управління нагрівом пластини. Розглянемо як приклад модельну задачу оптимізації програмного управління нагрівом тонкої однорідної пластини з урахуванням обмежень щодо міцності. Уважаємо, що в пластини (рис. 1а) розмір l уздовж осі z, $0 \leq z \leq l$ набагато менший за інші розміри. Ураховуємо тільки теплові потоки уздовж осі z та такої пластини визначатимемо полем температури $T = T(z,t)$; поверхню $z = l$ пластини вважаємо теплоізольованою. Спочатку в момент часу $t = t_0$ пластина мала задану температуру $T_{(0)} = const$ і температуру пластини варто підвищити до заданого значення $T_{(1)} = const$ шляхом зміни температури $u(t)$ її поверхні $z = 0$. Необхідно знайти закон зміни в часі температури $u(t)$, який забезпечує найшвидший нагрів пластини за умови виконання обмеження її міцності:

$$u(t) - T(l,t) \leq \frac{2[\sigma]}{E\alpha}, \tag{9}$$

де $u(t) \leq T(l,t)$ за змістом задачі; $[\sigma]$, E та α – задані допустимі напруження, модуль Юнга та коефіцієнт температурного розширення матеріалу пластини.

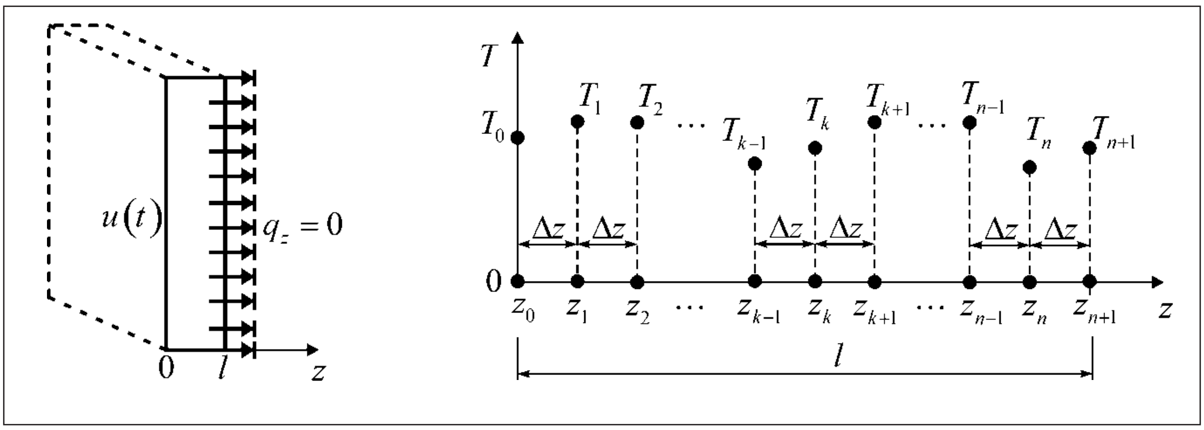
Походження обмеження міцності (9) не є темою дослідження, але зазначимо, що нерівність (9) відповідає обмеженню температурних напружень в однорідній пластині із закріпленими поверхнями $z = 0$ та $z = l$. Закон зміни $u(t)$ температури поверхні $z = 0$ розглядаємо як програму управління станом пластини, тоді температурний стан пластини, відповідний програмі управління $u(t)$, визначається так [15]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \ \ T(z,t_0) = T_{(0)}, \quad 0 < z < l, \tag{10}$$

$$T(0,t) = u(t), \quad \frac{\partial T(l,t)}{\partial z} = 0, \tag{11}$$

де a – коефіцієнт температуропровідності матеріалу пластини.

Зрозуміло, що система (10), (11) із розподіленими параметрами є окремим випадком узагальненої математичної моделі (1), (2), у якому



а) б)

Рис. 1. Пластина (а) та дискретизація її температурного поля (б)

ділянці Υ відповідає відрізок $0 \le z \le l$, а границі υ – точки $z = 0$ та $z = l$; вектори $\tilde{\mathbf{x}}$ та $\tilde{\mathbf{u}}$ при цьому зводяться до температури $T(z,t)$ в точках пластини й температури $u(t)$ її поверхні $z = 0$, а обмеження (9) є окремим випадком обмеження (3) загального вигляду. Для розв'язування сформульованої задачі (10), (11), відповідно до методу напівдискретизації, уводимо в ділянки $0 \le z \le l$ сітку з кількістю n «внутрішніх» вузлів (рис. 1б), які визначаються так:

$$z_k = k\Delta z, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \qquad (12)$$

де $\Delta z = \dfrac{l}{n+1}$ – крок сітки.

Використовуємо такі формули обчислювального диференціювання:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} \simeq \frac{T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}}{\Delta z^2}, \quad \frac{\partial T_k}{\partial z} \simeq \frac{3T_k - 4T_{k-1} + T_{k-2}}{2\Delta z}. \qquad (13)$$

Друга формула (13) разом із другою граничною умовою (11) дає змогу записати:

$$T_{n+1} = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n-1}. \qquad (14)$$

Першу формулу (13) використовуємо у «внутрішніх» вузлах $k = 1, 2, \ldots, n$, за допомогою виразу (14) виключаємо з розгляду температуру T_{n+1} у рівнянні для вузла $k = n$. У результаті одержимо дискретну апроксимацію рівнянь (10), (11) у вигляді (8), у якому:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \ldots & T_n \end{pmatrix}^T, \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} T_{(0)} & T_{(0)} & \ldots & T_{(0)} \end{pmatrix}^T, \mathbf{u} = (u),$$

$$\mathbf{A} = \frac{a}{\Delta z^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \frac{a}{\Delta z^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Для побудови програми управління диференціальні рівняння (15) будемо розглядати разом із додатковими диференціальними рівняннями:

$$\frac{du}{dt} = F(t, u, T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}), \quad u(t_0) = T_{(0)} + \frac{2\sigma_T}{E\alpha}, \qquad (16)$$

$$\frac{dT_{n+1}}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dT_n}{dt} - \frac{1}{3}\frac{dT_{n-1}}{dt}, \quad T_{n+1}(t_0) = T_{(0)}, \qquad (17)$$

де $F(t, u, T_1, T_2, \ldots, T_{n+1})$ – функція, яку варто підібрати так, щоб задовольнялася умова (9) і щоб пластина нагрівалася за найшвидший час.

Завдяки введенню диференціальних рівнянь (16), (17) розв'язування задачі оптимізації програмного управління нагрівом пластини зводиться до вибору функції $F(t, u, T_1, T_2, \ldots, T_{n+1})$. Розглянемо далі множину таких функцій:

$$F(t, u, T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}) = \begin{cases} \dfrac{dT_{n+1}}{dt}, & t \le t_m^{\text{reg}} \\ -\theta\left(u_m^{\text{reg}} - T_{(1)}\right)\mathrm{e}^{-\theta\left(t - t_m^{\text{reg}}\right)}, & t > t_m^{\text{reg}}, \end{cases} \qquad (18)$$

де t_m^{reg} та u_m^{reg} – момент часу та амплітуда стрибкоподібного зменшення температури $u(t)$, які визначаються для заданого номеру $m \in [0, n+1]$ вузла сітки (12) з умов $T\left(z_m, t_m^{\text{reg}}\right) = T_{(1)}$ та $u_m^{\text{reg}} = u\left(t_m^{\text{reg}}\right)$; $\theta = 10$ – числовий параметр, прийнятий для експоненціальної апроксимації стрибкоподібного зменшення температури $u(t)$.

У вигляді (18) маємо скінченну підмножину $n+2$ відповідних значенням параметру $m \in [0, n+1]$ програм управління $\tilde{U}_1 \subset \tilde{U}$.

Розглянемо результати розрахунків для наступних вихідних даних:

$$a = 15 \cdot 10^{-6}\ \text{м/с}, \ l = 0{,}02\ \text{м}, \ t_0 = 0, \ T_{(0)} = 290\text{K}, \ T_{(1)} = 790\text{K},$$

$$\alpha = 10 \cdot 10^{-6}\ 1/\text{K}, E = 195\,\text{ГПа}, [\sigma] = 160\,\text{МПа}. \qquad (19)$$

Для наближеного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (15)–(17) використовуємо відомий метод Рунге-Кута 4-го порядку [16]; кількість вузлів n і крок інтегрування в часі Δt обираємо так:

$$n = 31, \quad \Delta t = 0{,}01\text{с}. \qquad (20)$$

Збільшення кількості вузлів обмежено часом машинного розрахунку, який помітно збільшується при збільшеній кількості $n > 35$ через необхідність зменшення кроку інтегрування в часі; водночас результати розв'язування задачі теплопровідності для кількості вузлів $n > 35$ не мають помітних відмінностей від результатів, що відповідають значенню (20), і не містять додаткової корисної інформації щодо температурного поля в пластині.

Деякі результати розв'язування диференціальних рівнянь (15)–(18) для вихідних даних (19), (20) і значень $m = 0$, $m = n+1$, $m = 19$ представлені на рис. 2. Програми управління $u(t)$, які відповідні значенням $m = 0$ (рис. 2а) та $m = n+1$ (рис. 2б), забезпечують розігрів пластини за час $t_1 \cong 80\text{с}$; різниця між ними полягає в тому, що в разі $m = 0$ збільшення температури $u(t)$ обмежується величиною $T_{(1)}$ (рис. 2а), а у випав разі $m = n+1$ збільшення температури $u(t)$ здійснюється до повного розігріву пластини відповідно до умови $T_{n+1} = T_{(1)}$, а потім змінюється шляхом стрибкового зменшення до значення $T_{(1)}$ (рис. 2б). Програма управління $u(t)$, яка відповідна значенню $m = 19$, забезпечує розігрів пластини за найкоротший час $t_1 \cong 40\text{с}$ (рис. 2в); у цій програмі збільшення температури $u(t)$ здійснюється до прогріву приблизно 57% товщини пластини до температури $T_{(1)}$, а потім змінюється шляхом стрибкового зменшення до значення $T_{(1)}$ (рис. 2в).

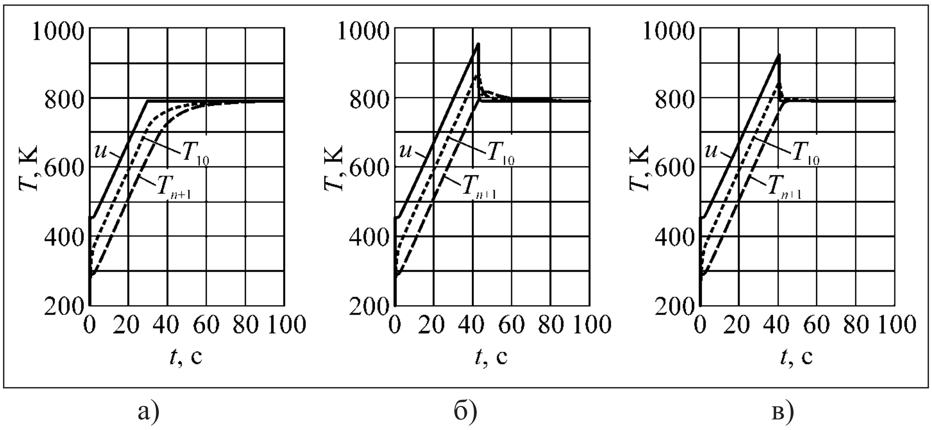


Рис. 2. Результати розрахунків для $m = 0$ (а), $m = n + 1$ (б) та $m = 19$ (в)

Висновки та перспективи подальших досліджень. Одержані результати дають змогу зробити такі висновки.

Розроблено узагальнений підхід до оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами на основі поєднання методу напівдискретизації та методів покрокового інтегрування звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами.

Показано, що використання методу напівдискретизації дає змогу звести задачу оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами до задачі оптимізації програмного управління еквівалентної дискретної системи, яка представлена звичайними диференціальними рівняннями, як це передбачається при формулюванні принципу максимуму Понтрягіна.

Розглянутий приклад задачі оптимізації управління нагрівом пластини – «плоскої стінки» показує можливості запропонованого узагальненого підходу до його практичного використання. Показано, що найшвидший розігрів пластини вимагає збільшення управляючої температури впритул до розігріву близько 57% товщини пластини, а потім стрибкового зменшення управляючої температури до потрібного умовою розігріву пластини значення. Одержані результати розв'язування модельної задачі дають змогу стверджувати, що зменшення похибки оптимізації програмного управління потребує збільшення кількості вузлів просторової дискретизації порівняно з кількістю вузлів, яка забезпечує достатню точність розв'язування задачі теплопровідності. Суттєвим недоліком розв'язку модельної задачі оптимізації програмного управління нагрівом пластини є відсутність автоматизації вибору значення m у виразі (18), тому в подальшому планується здійснити автоматизацію визначення значення m у виразі (18) і дослідити вплив кількості вузлів на похибку розв'язування задачі оптимізації програмного управління.

Розроблений узагальнений підхід до оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами є досить перспективним із погляду розв'язування низки прикладних задач щодо автоматизації керування певними експлуатаційними режимами енергоустановок з урахуванням обмежень щодо їх міцності й ресурсу. У зв'язку із цим у подальшому передбачається розглянути низку прикладних задач щодо оптимального управління температурними полями в циліндричних тілах із різними типами граничних умов та умов обмеження міцності, які відповідають схематизації надважливих елементів теплових і ядерних енергоустановок: оболонок твелів і корпусів ядерних реакторів і трубопроводів ядерних енергоустановок, теплообмінних труб і барабанів парових котлів, теплообмінних труб і корпусів парогенераторів реакторних установок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Matsuda T., Muta H., Tanaka K. Optimization of heating profile for densification of fuel pellets using Monte Carlo simulation. *Computational Materials Science*. 2017. Vol. 138. P. 346–352.
2. Almena A., Goode K.R., Bakalis S., Fryer P.J., Lopez-Quiroga E. Optimising food dehydration processes: energy-efficient drum-dryer operation. *Energy Procedia*. Vol. 161. P. 174–181.
3. Maia L.K.K., Drünert L., La Mantia F., Zondervan E. Expanding the lifetime of Li-ion batteries through optimization of charging profiles. *Journal of Cleaner Production*. 2019. Vol. 225. P. 928–938.
4. Hulkó G., Belavý C., Ondrejkovič K., Bartalský L., Bartko M. Control of technological and production processes as distributed parameter systems based on advanced numerical modelling. *Control Engineering Practice*. 2017. Vol. 66. P. 23–38.

5. Aguilar-Leal O., Fuentes-Aguilar R. Q., Chairez I., García-González A., Huegel J.C. Distributed parameter system identification using finite element differential neural networks. *Applied Soft Computing*. 2016. Vol. 43. P. 633–642.
6. Boltyanski V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., Pontryagin L.S. The maximum principle in the theory of optimal processes of control. *IFAC Proceedings Volumes*. 1960. Vol. 1. № 1. P. 464–469.
7. Korobov V.I., Pavlichkov S.S., Schmidt W.H. Global robust controllability of the triangular integro-differential Volterra systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2005. Vol. 309. № 215. P. 743–760.
8. Rouff M. Non Linear Optimal Robot Control with Ordinary Differential Equations. *IFAC Proceedings Volumes*. 1985. Vol. 18. № 16. P. 125–128.
9. Fardigola L.V. Transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Diriclet boundary condition. *Mathematical Control and Related Fields*. 2015. Vol. 5. P. 31–53.
10. Faugeras B., Blum J., Heumann H., Boulbe C. Optimal control of a coupled partial and ordinary differential equations system for the assimilation of polarimetry Stokes vector measurements in tokamak free-boundary equilibrium reconstruction with application to ITER. *Computer Physics Communications*. 2017. Vol. 217. P. 43–57.
11. Pesch H.J. Optimal Control of Dynamical Systems Governed by Partial Differential Equations: A Perspective from Real-life Applications. *IFAC Proceedings Volumes*. 2012. Vol. 45. № 2. P. 1–12.
12. Fletcher C.A.J. Computational techniques for fluid dynamics. 1 Fundamental and General Techniques. Berlin : Springer Verlag, 1991. 404 p.
13. Sarker P., Chakravarty U.K. A generalization of the method of lines for the numerical solution of coupled, forced vibration of beams. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2020. Vol. 170. P. 115–142.
14. Ferreira S.R. Freezing time of a slab using the method of lines. *International Journal of Refrigeration*. 2017. Vol. 75. P. 77–94.
15. Speedy C.B., Brown R.F., Goodwin G.C. Control theory: identification and optimal control. Edinburgh : Oliver and Boyd, 1970. 293 p.
16. Lance G.N. Numerical methods for high speed computers. London : Iliffe & sons Ltd, 1960. 166 p.

REFERENCES

1. Matsuda T., Muta H., Tanaka K. Optimization of heating profile for densification of fuel pellets using Monte Carlo simulation. *Computational Materials Science*. 2017. Vol. 138. P. 346–352.
2. Almena A., Goode K.R., Bakalis S., Fryer P.J., Lopez-Quiroga E. Optimising food dehydration processes: energy-efficient drum-dryer operation. *Energy Procedia*. Vol. 161. P. 174–181.
3. Maia L. K. K., Drünert L., La Mantia F., Zondervan E. Expanding the lifetime of Li-ion batteries through optimization of charging profiles. *Journal of Cleaner Production*. 2019. Vol. 225. P. 928–938.
4. Hulkó G., Belavý C., Ondrejkovič K., Bartalský L., Bartko M. Control of technological and production processes as distributed parameter systems based on advanced numerical modelling. *Control Engineering Practice*. 2017. Vol. 66. P. 23–38.
5. Aguilar-Leal O., Fuentes-Aguilar R. Q., Chairez I., García-González A., Huegel J. C. Distributed parameter system identification using finite element differential neural networks. *Applied Soft Computing*. 2016. Vol. 43. P. 633–642.
6. Boltyanski V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., Pontryagin L.S. The maximum principle in the theory of optimal processes of control. *IFAC Proceedings Volumes*. 1960. Vol. 1, No 1. P. 464–469.
7. Korobov V. I., Pavlichkov S. S., Schmidt W. H. Global robust controllability of the triangular integro-differential Volterra systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2005. Vol. 309, No 215. P. 743–760.
8. Rouff M. Non Linear Optimal Robot Control with Ordinary Differential Equations. *IFAC Proceedings Volumes*. 1985. Vol. 18, No 16. P. 125–128.
9. Fardigola L.V. Transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Diriclet boundary condition. *Mathematical Control and Related Fields*. 2015. Vol. 5. P. 31–53.
10. Faugeras B., Blum J., Heumann H., Boulbe C. Optimal control of a coupled partial and ordinary differential equations system for the assimilation of polarimetry Stokes vector measurements in tokamak free-boundary equilibrium reconstruction with application to ITER. *Computer Physics Communications*. 2017. Vol. 217. P. 43–57.

11. Pesch H.J. Optimal Control of Dynamical Systems Governed by Partial Differential Equations: A Perspective from Real-life Applications. *IFAC Proceedings Volumes*. 2012. Vol. 45, No 2. P. 1–12.
12. Fletcher C. A. J. Computational techniques for fluid dynamics. 1 Fundamental and General Techniques. Berlin : Springer Verlag, 1991. 404 p.
13. Sarker P., Chakravarty U.K. A generalization of the method of lines for the numerical solution of coupled, forced vibration of beams. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2020. Vol. 170. P. 115–142.
14. Ferreira S.R. Freezing time of a slab using the method of lines. *International Journal of Refrigeration*. 2017. Vol. 75. P. 77–94.
15. Speedy C.B., Brown R.F., Goodwin G.C. Control theory: identification and optimal control. Edinburgh : Oliver and Boyd, 1970. 293 p.
16. Lance G. N. Numerical methods for high speed computers. London : Iliffe & sons Ltd, 1960. 166 p.