УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-09

МОДЕЛЮВАННЯ ЗНОШУВАННЯ ПРИ КОНТАКТІ ПРЯМОКУТНОГО ПЛОСКОГО ШТАМПА І ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

Онишкевич В. М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики і фізики
Національний лісотехнічний університет України
вул. Генерала Чупринки, 103, Львів, Україна
orcid.org/0000-0002-4657-5462
onyshkevych@nltu.edu.ua

Сулим Г. Т.
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0003-2223-8645
gtsulym@gmail.com

Ключові слова: *теорія пружності, контакт, тертя, зношування, парні інтегральні рівняння.*

Проблема дослідження контактної поведінки тіл за наявності тертя, фрикційного проковзування, зношування та їх впливу на контактну міцність і деформативність структур набуває все більшої актуальності. Збільшення довговічності й надійності має й економічне значення, адже більшість відмов машин відбувається внаслідок зношування їх окремих вузлів.

Розглядається плоска задача про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Поза штампом поверхня півплощини не завантажена. Температурними ефектами, які неминуче виникають, нехтуємо, оскільки задача розглядається в стаціонарній постановці. Відповідно, зношування розглядається у вигляді лінійної функції. При цьому введення нової функції «старіння» дає змогу феноменологічно врахувати ті складні перетворення і зміни, які відбуваються в так званому «третьому» тілі – тонкому приповерхневому шарі, фізичні, хімічні й трибологічні властивості якого суттєво відрізняються від властивостей основних матеріалів контактуючих тіл.

Розв’язок задачі теорії пружності будується за допомогою інтегрального перетворення Фур’є. Контактні напруження шукаються у вигляді ряду Фур’є, коефіцієнти розвинення якого задовольняють парним інтегральним рівнянням. Використавши метод точкової колокації, для знаходження невідомих коефіцієнтів отримали систему нелінійних алгебричних рівнянь. Невласні інтеграли обчислювалися згідно з теоремою Коші про лишки, здійснювалося інтегрування по відповідному контуру. Граничні випадки становлять найбільший інтерес, оскільки дають можливість обчислити найменше й найбільше зношування. В інших випадках розв’язок буде міститися між розв’язками цих задач. Для розв’язання нелінійної системи рівнянь використано метод простої ітерації, за нульове наближення вибрано середнє значення розв’язків обох крайніх випадків.

Отримано еволюцію контактних напружень, зношування і стирання в часі. Для частинних випадків виявлено зростання або постійність вертикальних переміщень відповідно. У граничному випадку отримані результати співпадають із відомими в літературі.

MODELING OF WEAR AT CONTACT OF RECTANGULAR PLANE PUNCH AND ELASTIC HALF-PLANE

Onyshkevych V. M.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Physics and Mathematics
Ukrainian National Forestry University
General Chuprynka str., 103, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-4657-5462
onyshkevych@nltu.edu.ua

Sulym G. T.
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-2223-8645
gtsulym@gmail.com

Key words: *theory of elasticity, contact, frictions, wear, dual integral equations.*

Investigation of thermal stresses and wear in the contact couple is an important problem for many engineering researches. The steady problem of thermoelasticity currently is sufficiently investigated. However, taking into account the actual operating conditions, in particular wear, leads to complication of statement and mathematical modeling of problem. This is due to mathematical difficulties that arise in the solution of dual integral equations. The authors of this paper developed a method of constructing solutions of contact problems with wear.

In this work the plane contact problem on wear of elastic half-plane by a rigid punch has been considered. The punch moves with constant velocity. Arising thermal effects are neglected because the problem is investigated in stationary statement. We use this model for plane contact problem of rectangular punch and elastic half-plane consideration in stationary statement, therefore wear is representative by linear function with time. Introduction of new function “ageing“ gives the opportunity to take account of difficult transformations and changes, which takes place in what is called “third body”. “Third body” is a thin near surface layer with its physical, chemical and tribotechnical properties, which differ from properties of main material of contacting bodies. In this case the crumpling of the nonhomogeneities of the surfaces and abrasion of half-plane take place. Out of the punch the surface of half-plane is free of load.

The solution for problem of theory of elasticity is constructed by means of Fourier integral transformation. Contact stresses are found in Fourier series which coefficients satisfy the dual integral equations. It leads to the system of nonlinear algebraic equations for unknown coefficients by a method of collocations. Cauchy theorem about residuals is used for computing integrals. This system is reduced to linear system in the partial most interesting cases for computing of largest and smallest wear. This system is reduced to linear system in the partial most interesting cases for computing of maximum and minimum wear. The iterative scheme is considered for investigation of other nonlinear cases, for initial approximation the mean value of boundary cases is used. The evolutions of contact stresses, wear and abrasion in the time are given. For both last cases increase or invariable of vertical displacement correspondently is obtained. In the boundary cases coincidence of results with known is obtained.

Вступ. У зв'язку з прикладними запитами мікромеханіки, трибології, біомеханіки все більшої актуальності набуває проблема дослідження контактної поведінки тіл за наявності тертя, фрикційного проковзування, зношування та їх впливу на контактну міцність і деформативність структур. Проблема довговічності й надійності має й економічне значення: унаслідок зношування окремих вузлів відбувається 80–90% відмов машин, витрати на ремонт і технічне обслуговування становлять 10–15% вартості обладнання, а витрати в машинобудуванні внаслідок зношування й тертя в технічно розвинутих країнах досягають 4–5% національного доходу. У всьому світі опір тертю поглинає 30–40% енергії, що виробляється протягом року, причому енергія при терті не просто губиться, а перетворюється в тепло, яке нагріває механізми й вузли машин, що призводить до відмов та аварій.

Задачі з урахуванням зносу вперше досліджені в працях [1; 2], а математичні моделі зношування запропоновано в роботі [3]. Розв'язок контактної осесиметричної задачі зі зношуванням для кругового штампа і півпростору наведено в праці [4]. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя досліджувалася в роботі [5]. Класичним аналітичним методом побудови розв'язку задачі теорії пружності в плоскій постановці є застосування інтегрального перетворення Фур'є [6]. Однак урахування зношування ускладнює математичну постановку задачі і створює труднощі при розв'язуванні системи парних інтегральних рівнянь.

Метою роботи є розроблення методики побудови розв'язку задачі про контакт штампа з пружною півплощиною з урахуванням зношування, яка ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Фур'є, довизначенні невідомої функції, розв'язуванні системи парних інтегральних рівнянь методом поточкової колокації та зведенні задачі до системи нелінійних алгебричних рівнянь.

Формулювання задачі. Розглянемо плоску задачу про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Температурними ефектами, які неминуче виникають, нехтуємо, оскільки задача розглядається в стаціонарній постановці. Відповідно, зношування розглядається у вигляді лінійної функції. При цьому введення нової функції «старіння» дає змогу феноменологічно врахувати ті складні перетворення й зміни, які відбуваються в так званому «третьому» тілі – тонкому приповерхневому шарі, фізичні, хімічні і трибологічні властивості якого суттєво відрізняються від властивостей основних матеріалів контактуючих тіл.

Нехай до моменту часу $\tau = 0$ під утиснутим силою P у пружну півплощину штампом тиск стаціонарно розподілявся, зминаючи мікронерівності поверхні. З моменту часу $\tau = 0$ штамп рухається з постійною швидкістю V_0 і відбувається стирання півплощини. Поза штампом поверхня півплощини не завантажена. Для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати рівняння теорії пружності:

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\,\partial\theta/\partial x = 0\,, \tag{1}$$

$$\mu\Delta v + (\lambda + \mu)\,\partial\theta/\partial y = 0\,, \tag{2}$$

де $\theta = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y$, u і v – компоненти вектора переміщень, λ і μ – коефіцієнти Ламе, за таких граничних умов при $y = 0$:

$$v = f(x) + \left(k_1 V_0 \tau / H_b + k_2\right)\left|\sigma_y(x)\right|^{\alpha},\ \ |x| \le a, \tag{3}$$

$$\sigma_y(x) = 0, \quad |x| \ge a, \tag{4}$$

$$\tau_{xy}(x) = 0, \quad |x| < \infty. \tag{5}$$

Тут $f(x)$ – задані переміщення під штампом, a – півширина штампа, H_b – твердість за Брінелем матеріалу півплощини, τ – час. Процес зношування визначається параметрами [7] $k_1,\ k_2,\ 0 \le \alpha \le 1$.

Побудова розв'язку задачі. Застосовуючи до рівнянь (1)–(2) інтегральне перетворення Фур'є та задовольняючи граничним умовам (3)–(5), отримаємо парні інтегральні рівняння:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)C_1\xi^2 e^{-i\xi x}\ /\ \lambda d\xi = f(x) + \left(k_1 V_0\tau\ /\ H_B + k_2\right)\left|\sigma_y(x)\right|^{\alpha},$$

$$|x| \le a \qquad 6)$$

$$-\frac{\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda + \mu)^2 C_1\xi^2\,|\xi|\,e^{-i\xi x}\ /\ \lambda d\xi = 0\,, |x| > a\,. \tag{7}$$

Продовжимо (7) на всю вісь x за допомогою функції Хевісайда:

$$-\frac{\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda + \mu)^2 C_1\xi^2\,|\xi|\,e^{-i\xi x}\ /\ \lambda d\xi = \sigma_y(x)\,H\left(a - |x|\right). \tag{8}$$

Тоді згідно з прямою формулою інтегрального перетворення Фур'є:

$$C_1 = \frac{\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)^2\xi^2|\xi|}\int_{-a}^{+a}\sigma_y(x)\,e^{i\xi x}\,dx\,.$$

Представимо нормальні напруження у вигляді ряду Фур'є:

$$\sigma_y(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \exp\left(i\pi n x/a\right), \tag{9}$$

Отримаємо:

$$\int_{-a}^{+a}\sigma_y(x)\,e^{i\xi x}\,dx = 2\sum_{n=-N}^{N} a_n \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{\xi + \pi n\ /\ a},$$

звідки:

$$C_1 = \frac{\lambda}{\mu(\lambda + \mu)^2\xi^2|\xi|}\sum_{n=-N}^{N} a_n \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{\xi + \pi n\ /\ a}.$$

Замінивши в інтегральному рівнянні (6) C_1 його значенням, зі співвідношень (6)–(7) отримаємо:

$$\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\sum_{n=-N}^{N}a_n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\xi a+\pi n)}{|\xi|(\xi+\pi n/a)}e^{-i\xi x}\,d\xi+$$
$$+2\pi\left(\frac{k_1V_0\tau}{H_B}+k_2\right)\left(\sum_{n=-N}^{N}a_n\exp\frac{i\pi nx}{a}\right)^{\alpha}=-2\pi f(x).$$

Використавши метод точкової колокації при $x=x_j=-a+a(j-1)/N$, $\left(j=\overline{1,\,2N+1}\right)$, для знаходження невідомих коефіцієнтів a_n, $\left(n=\overline{1,\,2N+1}\right)$ отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь:

$$\vec{z}\,\|A\|+C\left(\vec{z}\,\|D\|\right)^{\alpha}=\vec{b}\,, \qquad (10)$$

де

$$\vec{z}=\left(a_{-N},a_{-N+1},\ldots,a_{N-1},a_N\right)=\left(z_1,z_2,\ldots,z_{2N+1}\right),$$

$$a_{k,j}=\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\xi a+\pi n)}{|\xi|(\xi+\pi k/a)}e^{-i\xi x}\,d\xi,\quad b_j=-2\pi f\left(x_j\right),$$

$$d_{k,j}=\exp\left(i\pi kx/a\right),\ \left(k,j=\overline{1,\,2N+1}\right),\ C=2\pi\left(k_1V_0\tau/H_B+k_2\right).$$

Невласні інтеграли обчислювалися згідно з теоремою Коші про лишки, здійснювалося інтегрування по відповідному контуру.

При $\alpha=1$ та $\alpha=0$ нелінійна система рівнянь (10) перетворюється в лінійну й, відповідно, набуває вигляду:

$$\vec{z}_1\left(\|A\|+C\,\|D\|\right)=\vec{b} \qquad (11)$$

та

$$\vec{z}_0\,\|A\|=\vec{b}-\vec{c}\,. \qquad (12)$$

Граничні випадки ($\alpha=0$, $\alpha=1$) становлять найбільший інтерес, оскільки дають можливість обчислити найменше й найбільше зношування. При $0<\alpha<1$ розв'язок (10) буде міститися між розв'язками задач (11) і (12).

Для розв'язання нелінійної системи рівнянь (10) використаємо метод простої ітерації. Представимо систему у вигляді $\vec{z}=\vec{g}(\vec{z})$ або $z_j=g_j\left(z_1,z_2,\ldots,z_k\right)$, ($k=2N+1$), де

$$g_j\left(z_1,z_2,\ldots,z_k\right)=-\frac{1}{a_{j,j}}\left\{\sum_{m=j+1}^{j-1}a_{j,m}\,z_m+\sum_{m=1}^{k}a_{j,m}z_m+C\left(\sum_{m=1}^{k}a_{j,m}z_m\right)^{\alpha}\right\}+b_j\,.$$

Ітерація проводилася за формулою $\vec{z}^{(n+1)}=\vec{g}\left(\vec{z}^{(n)}\right)$, тобто $z_j^{(n+1)}=g_j\left(z_1^{(n)},\ldots,z_k^{(n)}\right)$, ($j=\overline{1,k}$), або інакше

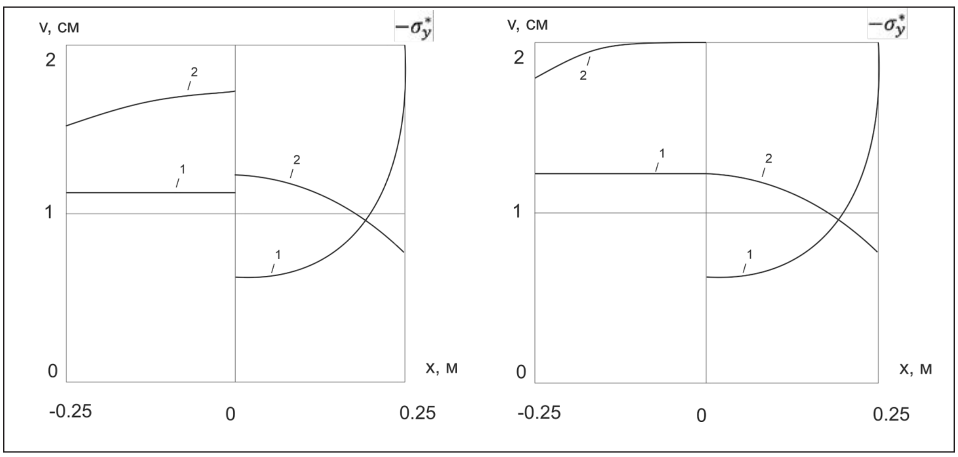
$$\begin{cases}z_1^{(n+1)}=g_1\left(z_1^{(n)},\ldots,z_k^{(n)}\right)\\ z_2^{(n+1)}=g_2\left(z_1^{(n)},\ldots,z_k^{(n)}\right)\\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z_k^{(n+1)}=g_k\left(z_1^{(n)},\ldots,z_k^{(n)}\right)\end{cases}. \qquad (13)$$

За нульове наближення вибираємо середнє значення $\vec{z}^{(0)}=\left(\vec{z}_0+\vec{z}_1\right)/2$ між розв'язком задачі (11) і (12).

Висновки. Числові результати отримано при таких значеннях вхідних параметрів: матеріал півплощини – алюміній ($\lambda=5.6\times10^{10}$ Па, $\mu=2.6\times10^{10}$ Па), $V_0=0.25$ м/с, $a=0.25$ м, $H_B=11.3$ кПа/мм^2, $k_1=10^{-10}$, $k_2=10^{-11}$, $f(x)=const=0.01$ м, $N=23$. Розподіл переміщень v та приведених напружень $\sigma_y^*=2\sigma_y a/P$ наведено на рис. 1, відповідно, при $\tau=0$ і $\tau=100$ с. Криві 1 відповідають $\alpha=0$, а криві 2 – $\alpha=1$. Значення сили P обчислювалося за формулою:

$$P=-\int_{-a}^{+a}\sigma_y(x)\,dx=-\int_{-a}^{+a}\sum_{k=-N}^{N}z_{N+k+1}\exp\frac{i\pi kx}{a}=-2az_{N+1}\,.$$

У випадку $\alpha=1$ зі збільшенням часу взаємодії вертикальні переміщення зростають, що свідчить про збільшення величини зношення матеріалу (криві 2 на рис. 1). Випадку $\alpha=0$ відповідають постійні переміщення v (криві 1 на рис. 1).



а) б)

Рис. 1. Розподіл переміщень і приведених напруженьпри $\tau=0$ (а) та $\tau=100$ с (б) відповідно (криві 1 при $\alpha=0$, криві 2 при $\alpha=1$)

Отримані результати для граничного випадку $\alpha = 0$, $\tau = 0$ співпадають із відомими в літературі [1]. На одержаний розв'язок потрібно накласти розв'язок антиплоскої задачі, коли до півплощини прикладено дотичні напруження $\tau_{yz} = f_\text{т}\sigma_y$, де $f_\text{т}$ – коефіцієнт тертя, а σ_y визначаються формулою (9).

ЛІТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа. *ПММ.* 1976. Т. 40. № 6. С. 981–989.
2. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей. *Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа*. Москва, 1971. С. 130–140.
3. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел. *ДАН СССР*. 1983. Т. 271. № 4. С. 827–831.
4. Левицький В.П., Онишкевич В.М. Осесиметрична контактна задача із зношуванням. *Вісник Львівського університету. Серія «Механіко-математична».* 1993. Вип. 38. С. 60–63.
5. Онишкевич В.М., Сулим Г.Т. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки».* 2017. № 3. С. 165–168.
6. Levytskyi V.P., Onyshkevych V.M. Plane contact problem with heat generation account of friction. Int. *J. Engng Sci.* 1996. Vol. 34. № 1. P. 101–112.
7. Гавриков М.В., Мазинг Р.И. Наследственно-стареющая модель изнашивания и ее применение к задачам с монотонно растущей зоной контакта. *Трение и износ*. 1988. Т. 9. № 2. С. 274–279.

REFERENCES

1. Galin L.A. (1976) Kontaktnyie zadachi teoryi uprugosti pri nalichiyi iznosa [Contact problems of theory of elasticity with wear]. *PMM*, vol. 40, no. 6, pp. 981–989.
2. Korovchinskyi M.V. (1971*)* Lokalnyi kontakt uprugih tel pri iznashivaniyi ih poverhnostey [Local contact of elastic bodies with wear of surfaces]. *Kontaktnoye vzaimodeystviye tverdyh tel i raschet sil treniya i iznosa* [Solids contact interaction and frictional forces and wear computing]. Moscow: Nauka, pp. 130–140.
3. Aleksandrov V.M. (1983) O postanovke ploskih kontaktnyh zadach teoryi uprugosti pri iznose vzaimodeystvuyushchih tel [About statement of plane problems of theory of elasticity with wear of interactive bodies]. *DAN SSS*, vol. 271, no 4, pp. 827–831.
4. Levytskyi V.P., Onyshkevych V.M. (1993) Osesymetrychna kontaktna zadacha iz znoshuvannyam [Axisymmetric contact problem with wear]. *Bulletin of Lviv University. Series: Mechanics and Mathematics*, vol. 38, pp. 60-63.
5. Onyshkevych V. M., Sulym G. T. (2017) Zadacha pro termopruzhnyi kontakt pivploshchyny z priamokutnym shtampom za teploutvorennya vid tertya [Problem about thermoelastic contact of half-plane and rectangular punch with heat generation account of friction]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, vol. 3, pp. 165–168.
6. Levytskyi V.P., Onyshkevych V.M. (1996) Plane contact problem with heat generation account of friction. *Int. J. Engng Sci*., vol. 34, no 1, pp. 101–112.
7. Gavrikov M.V., Mazing R.I. (1988) Nasledstvenno-stareyushchaya model iznashivaniya i eyo primeneniye k zadacham s monotonno rastushchey zonoy kontakta [Inherited-aging model model of wear for problems with monotonically increasing contact area]. *Treniye i iznos*, vol. 9, no 2, pp. 274–279.