

УДК 539.3
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-10>

ЗГИН ІЗ РОЗТЯГОМ ПЛАСТИНИ З ОТВОРОМ ТА СИСТЕМОЮ ТРІЩИН ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Слободян М. С.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна,
orcid.org/0000-0001-5357-8584
slobkolia@gmail.com*

Кузь І. С.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0003-1885-2474
ihorkuz24@gmail.com*

Білаш О. В.

*кандидат економічних наук,
доцент кафедри інженерної механіки
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
вул. Героїв Майдану, 32, Львів, Україна
orcid.org/0000-0001-7515-7641
oksana.opanasovych@gmail.com*

Шайнога М. І.

*студент
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0001-8174-5706
maksym028@gmail.com*

Ключові слова: тріщина, розтяг, згин, круговий отвір, ізотропна пластинка, контакт, комплексні потенціали, контактні зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

У роботі побудовано розв'язок задачі про двовісний згин із розтягом нескінченної ізотропної пластини з круговим отвором та системою наскрізних прямолінійних тріщин. Межа кругового отвору та береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Під час розв'язування задачі припускається, що під дією рівномірно розподіленого згинального та розтягувального навантажень береги тріщин контактують по області сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини по всій довжині тріщин. Задача розв'язана за таких крайових умов: $M_r = 0$, $P_r = 0$, $\sigma_{rr} = 0$, $\tau_{rr0} = 0$, $x \in L$; $P^\pm = 0$, $M_{y_k}^\pm = \beta_k h N_k$, $\tau_{yx, y_k}^\pm = 0$, $\sigma_{yx, y_k}^\pm = -0,5 N_k / h$, $\beta_k = 1 - \gamma_k / 3$, $\partial[v_{rr}] / \partial x_k + \alpha_k h [\partial^2 w / \partial x_k \partial y_k] = 0$, $\alpha_k = 0,5 (1 + (1 - \gamma_k)^2)$, $\gamma_k = h_k / h$, $x_k \in L_k$, $k = 1, M$, де M_r – згинальний момент, P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізуювальна сила, σ_{rr} і σ_{rr0} – компоненти тензора напружень у полярній системі координат, N_k – контактне зусилля між

берегами k -тої тріщини, h – товщина пластини, h_k – висота контакту k -ої тріщини, w – прогин пластини, σ_{μ_k, y_k} і τ_{μ_k, y_k} – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, v_{μ} – компонента вектора переміщень; $[f] = f^+ - f^-$, значками “+” і “-” позначені граничні значення функцій при прямування точки площини до k -тої тріщини при $y_k \rightarrow \pm 0$.

Через контакт берегів тріщин розв’язок задачі будемо шукати у вигляді розв’язків двох взаємопов’язаних задач: задачі згину пластини, використовуючи теорію Кірхгофа-Лява, та плоскої задачі. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі побудовано задачі лінійного спряження. Отримані задачі лінійного спряження розв’язані аналітично та отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь щодо стрибків переміщень у плоскій задачі та стрибків кутів повороту у задачі згину на берегах тріщин. Ця система сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою методу механічних квадратур зведена до системи алгебраїчних рівнянь, яка розв’язана чисельно за допомогою методу Гауса. Проведено числовий аналіз задачі та побудовані графічні залежності контактних зусиль та коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів при різних геометричних параметрах задачі та різних значеннях рівномірно розподіленого розтягувального та згинного навантаження на нескінченності. У часткових випадках результати зійшлися з відомими результатами, отриманими в наукових працях іншими авторами.

BENDING AND TENSION OF A PLATE WITH A HOLE AND SYSTEM OF CRACKS ON THE ASSUMPTION OF STRIPLIKE CRACK CLOSURE

Slobodian M. S.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5357-8584
slobkolia@gmail.com*

Kuz’ I. S.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-1885-2474
ihorkuz24@gmail.com*

Bilash O. V.

*Candidate of Economic Sciences,
Associate Professor at the Department of Engineering Mechanics
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy
Heroiv Maydana str., 32, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-7515-7641
oksana.opanasovych@gmail.com*

Shaynoga M. I.

*Student
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8174-5706
maksym028@gmail.com*

Key words: crack, tension, bending, circular hole, isotropic plate, contact, complex potentials, contact force, intensity factors.

The solution of biaxial tensile-bending problem for an infinite isotropic plate with circular hole and straight through cracks is constructed. Crack faces and hole boundary are free from external load. It is assumed that uniform bending and tensile loads cause crack closure zone of constant width (strip contact) on the upper surface of the plate along the entire length of the cracks. The problem is solved under the following boundary conditions: $M_r = 0$, $P_r = 0$, $\sigma_{rr} = 0$, $\tau_{rr\theta} = 0$, $x \in L$; $P^\pm = 0$, $M_k^\pm = \beta_k h N_k$, $\tau_{r_k y_k}^\pm = 0$, $\sigma_{r_k y_k}^\pm = -0.5 N_k / h$, $\beta_k = 1 - \gamma_k / 3$, $\partial[v_{rr}] / \partial x_k + \alpha_k h [\partial^2 w / \partial x_k \partial y_k] = 0$, $\alpha_k = 0.5(1 + (1 - \gamma_k)^2)$, $\gamma_k = h_k / h$, $x_k \in L_k$, $k = \overline{1, M}$, where M_r – bending moment, P_r – generalized Kirchhoff shear force, σ_{rr} and $\sigma_{rr\theta}$ – stress tensor components in the polar coordinate system, N_k – contact force between faces of k -th crack, h – plate thickness, h_k – the height of contact zone of k -th crack, w – plate deflection, $\sigma_{r_k y_k}$ and $\tau_{r_k y_k}$ – stress tensor components in the cartesian coordinate system, v_{rr} – displacement vector component; $[f] = f^+ - f^-$, superscripts “+” and “-” stand for limits of functions as a point of the plane approaches k -th crack ($y_k \rightarrow \pm 0$).

Due to the crack closure the solution is sought as superposition of solutions of two interrelated problems: Kirchhoff-Love plate bending problem and plane problem of the elasticity theory. Using the theory of functions of a complex variable and Kolosov-Muskhelishvili complex potentials linear conjugation problems are constructed. These problems are solved analytically. The systems of singular integral equations in unknown displacement discontinuity (plane problem) and angular displacement discontinuity (bending problem) at crack faces are obtained. Using mechanical quadrature method these systems are reduced to the system of linear algebraic equations, which is numerically solved by Gaussian method. Graphical representations of numerical results are presented for the contact forces, forces and moments intensity factors at various geometrical parameters and values of uniform tensile and bending loads at infinity. In partial cases, the results coincide with the known ones obtained in scientific works by other researchers.

Вступ. У багатьох галузях техніки широко використовують пластинчасті елементи конструкцій. Їхні експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів і отворів, які знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації пластинчатих елементів важливо знати, яким чином такі дефекти впливають на міцність та механічні характеристики конструкції.

Розв'язками плоских задач і задач згину пластин з отворами та тріщинами займалось багато авторів. Їхні узагальнення і методи їх розв'язування подано в монографіях [1–8]. Але в цих роботах не враховано контакт берегів тріщин при дії зовнішнього навантаження. Експерименти, проведені в роботі Дж. Кальтгофа, І. Шацького, А. Бюргеля [9], показують значний вплив контакту берегів тріщини при згині пластини на її напружено-деформований стан. Модель гладкого контакту берегів тріщин по лінії по всій довжині тріщин (лінійний контакт) використано у роботах [10–13]. Модель гладкого контакту берегів тріщин по області сталої ширини (смуговий контакт) використано у працях [14–18].

У цій роботі досліджується задача про згин із розтягом нескінченної ізотропної пластини з круговим отвором та системою довільно розта-

шованих тріщин, береги яких гладко контактують по області сталої ширини по всій їх довжині на верхній основі пластини.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R та систему M довільно орієнтованих прямолінійних наскрізних тріщин довжиною $2l_k$ ($k = \overline{1, M}$) кожна. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxuz$, а її початок виберемо в центрі кругового отвору. У площині Oxu введемо полярну систему координат r і θ з полюсом у точці O та полярною віссю Ox . Центри тріщин розміщені в точках O_k з координатами (x_{0k}, y_{0k}) , а α_k – кут нахилу лінії k -тої тріщини до осі Ox ($k = \overline{1, M}$). У точці O_k виберемо початок декартової системи координат $O_k x_k y_k$, яка буде пов'язана з k -тою тріщиною. Нехай на безмежності пластини згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ та розтягується зусиллями P_1 та P_2 . Через S^+ позначимо область всередині кругового отвору, а через S^- – ззовні, через L_k – лінію, де розміщена k -та тріщина, а через L – коло (див. рис. 1).

Нехай за такого навантаження береги тріщин контактують по області сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини по всій

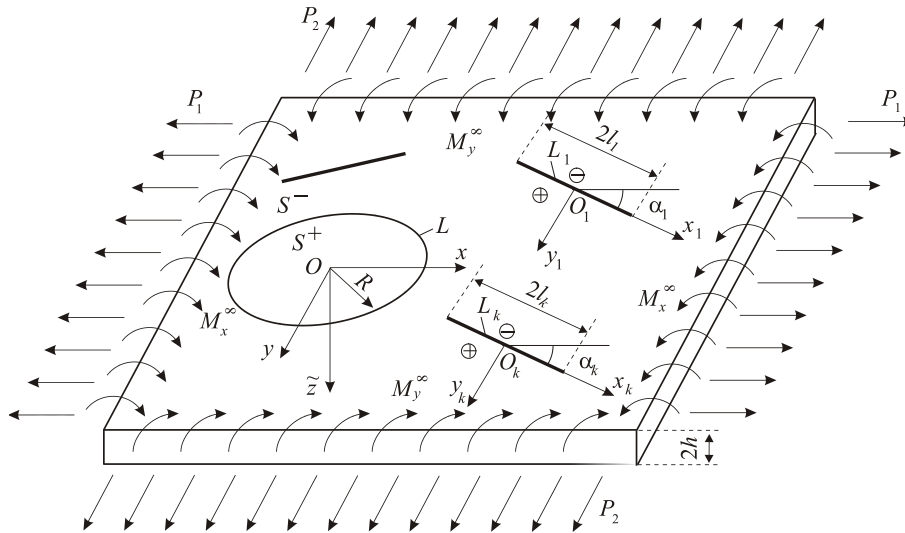


Рис. 1. Безмежна пластина з круговим отвором та системою довільно розташованих тріщин

довжині тріщин. Через контакт берегів тріщин розв’язок задачі будемо шукати у вигляді розв’язків двох взаємопов’язаних задач: задачі згину пластини, використовуючи теорію Кірхгофа-Лява, та плоскої задачі.

На межі отвору матимемо такі крайові умови

$$M_r = 0, P_r = 0, \sigma_{rr} = 0, \tau_{rr\theta} = 0, x \in L, \quad (1)$$

де M_r – згинальний момент, P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила, σ_{rr} і $\tau_{rr\theta}$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат.

Крайові умови смугового контакту берегів тріщин будуть такими [14–16]

$$P^\pm = 0, M_{y_k}^\pm = \beta_k h N_k, \tau_{lx_k y_k}^\pm = 0, \sigma_{ly_k y_k}^\pm = -\frac{N_k}{2h},$$

$$\beta_k = 1 - \frac{\gamma_k}{3}, x_k \in L_k, \quad (2)$$

$$\frac{\partial [v_{ll}]}{\partial x_k} + \alpha_k h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial y_k} \right] = 0, \alpha_k = \frac{1}{2} (1 + (1 - \gamma_k)^2), \gamma_k = \frac{h_k}{h},$$

$$x_k \in L_k, k = \overline{1, M}, \quad (3)$$

де N_k – контактне зусилля між берегами k -тої тріщини, h_k – висота контакту k -ої тріщини, w – прогин пластини, $\sigma_{ly_k y_k}$ і $\tau_{lx_k y_k}$ – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, v_{ll} – компонента вектора переміщень; $[f] = f^+ - f^-$, значками “+” і “-” позначені граничні значення функцій при прямування точки площини до k -тої тріщини при $y_k \rightarrow \pm 0$.

Розв’язок задачі. З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [4] та задачі згину пластини [6], задовольняючи крайові умови (1)–(3), розв’язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано

систему сингулярних інтегральних рівнянь щодо невідомих стрибків переміщень $G_j(\eta)$ та стрибків кутів повороту $Y_j(\eta)$ на берегах тріщин, яка набуде вигляду

$$\text{Im} \left(\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \{ K_{mj}(\eta, \xi) Y_j(\eta) + L_{mj}(\eta, \xi) \overline{Y_j(\eta)} \} d\eta \right) - \text{Im} \left(\frac{ie^{-2i\alpha_m} \tilde{c}'_0}{\tilde{X}_m^2} \right) =$$

$$= \tilde{c}'_m + \text{Im} \tilde{P}_m(\xi), \xi \in [-1, 1], m = \overline{1, M}, \quad (4)$$

$$\text{Re} \left(\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \{ K_{mj}(\eta, \xi) Y_j(\eta) + L_{mj}(\eta, \xi) \overline{Y_j(\eta)} \} d\eta \right) - \text{Re} \left(\frac{ie^{-2i\alpha_m} \tilde{c}'_0}{\tilde{X}_m^2} \right) +$$

$$+ \frac{q}{2} \text{Re} \left(\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \{ R_{mj}(\eta, \xi) G_j(\eta) + S_{mj}(\eta, \xi) \overline{G_j(\eta)} \} d\eta \right) =$$

$$= \text{Re} (\tilde{P}_m(\xi) + \tilde{H}_m(\xi)), \xi \in [-1, 1], m = \overline{1, M}, \quad (5)$$

$$\text{Im} \left(\sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \{ R_{mj}(\eta, \xi) G_j(\eta) + S_{mj}(\eta, \xi) \overline{G_j(\eta)} \} d\eta \right) =$$

$$\text{Im} \tilde{H}_m(\xi), \xi \in [-1, 1], \quad (6)$$

де

$$R_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} 1/(\pi(\eta - \xi)) + \tilde{R}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{R}_{mj}(\eta, \xi) + R_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j, \end{cases}$$

$$S_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} \tilde{S}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{S}_{mj}(\eta, \xi) + S_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j, \end{cases}$$

$$\tilde{R}_{mj}(\eta, \xi) = R_{mj}^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\tilde{X}_m^2} \right) R_{mj}^{II}(\eta, \xi) + e^{-2i\alpha_m} \left(X_m - \frac{1}{X_m} \right) R_{mj}^{III}(\eta, \xi) +$$

$$+ \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\tilde{X}_m^2} R_{mj}^{IV}(\eta, \xi),$$

$$\tilde{S}_{mj}(\eta, \xi) = S_{mj}^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\tilde{X}_m^2} \right) S_{mj}^{II}(\eta, \xi) +$$

$$\begin{aligned}
& +e^{-2i\alpha_m} \left(X_m - \frac{1}{\bar{X}_m} \right) S_{mj}^{III}(\eta, \xi) + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} S_{mj}^{IV}(\eta, \xi), & \left. \frac{X_m^2 + e^{2i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1} \right\}, \\
& R_{mj}^I(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi X_m} \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1}, & K_{mj}^{II}(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi i \tilde{\kappa}} \left\{ \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{T_j} + \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} \bar{F}_{mj}}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} - \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} \bar{X}_m^2 + e^{2i\alpha_j}}{\bar{X}_m} \frac{1}{T_j \bar{X}_m - 1} \right\}, \\
& S_{mj}^I(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j} + \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j} F_{mj}}{(\bar{T}_j X_m - 1)^2} - \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{X_m} \right. & K_{mj}^I(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi i X_m} \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1}, \\
& \left. \frac{X_m^2 + e^{-2i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1} \right\}, & L_{mj}^{II}(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi i \bar{X}_m} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \bar{X}_m - 1}, \\
& R_{mj}^{III}(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{T_j} + \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} \bar{F}_{mj}}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} - \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} \bar{X}_m^2 + e^{2i\alpha_j}}{\bar{X}_m} \frac{1}{T_j \bar{X}_m - 1} \right\}, & K_{mj}^{III}(\eta, \xi) = -\frac{1}{\pi i \tilde{\kappa}} \frac{\lambda_j}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} \left\{ e^{i\alpha_j} + \frac{e^{-i\alpha_j}}{\bar{X}_m^2} + \right. \\
& S_{mj}^{II}(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi \bar{X}_m} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \bar{X}_m - 1}, & \left. \frac{T_j \bar{X}_m - 1}{\bar{X}_m^2} e^{-i\alpha_j} - \frac{e^{i\alpha_j} \bar{F}_{mj}}{\bar{X}_m} - \frac{e^{i\alpha_j}}{\bar{X}_m} \frac{\bar{F}_{mj}}{T_j \bar{X}_m - 1} \right\}, \\
& R_{mj}^{III}(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_j}{(T_j \bar{X}_m - 1)^2} \left\{ e^{i\alpha_j} + \frac{e^{-i\alpha_j}}{\bar{X}_m^2} + \frac{T_j \bar{X}_m - 1}{\bar{X}_m^2} e^{-i\alpha_j} - \right. & L_{mj}^{III}(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi i \bar{X}_m^2} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \bar{X}_m - 1} \left(1 + \frac{1}{2(T_j \bar{X}_m - 1)} \right), \\
& \left. \frac{e^{i\alpha_j} \bar{F}_{mj}}{\bar{X}_m} - \frac{e^{i\alpha_j}}{\bar{X}_m} \frac{\bar{F}_{mj}}{T_j \bar{X}_m - 1} \right\}, & K_{mj}^{IV}(\eta, \xi) = -\frac{\tilde{\kappa} \lambda_j \bar{X}_m e^{i\alpha_j}}{2\pi i (T_j \bar{X}_m - 1)}, \\
& S_{mj}^{III}(\eta, \xi) = -\frac{1}{\pi \bar{X}_m^2} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \bar{X}_m - 1} \left(1 + \frac{1}{2(T_j \bar{X}_m - 1)} \right), & L_{mj}^{IV}(\eta, \xi) = -\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{2\pi i \bar{T}_j}, \\
& R_{mj}^{IV}(\eta, \xi) = \frac{\lambda_j \bar{X}_m e^{i\alpha_j}}{2\pi (T_j \bar{X}_m - 1)}, \quad S_{mj}^{IV}(\eta, \xi) = \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{2\pi \bar{T}_j}, & K_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{\tilde{\kappa} \lambda_j e^{i\alpha_j}}{2\pi i} \left(\frac{1}{T_j - X_m} + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \right), \\
& K_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} \frac{\tilde{\kappa}}{\pi i (\eta - \xi)} + \tilde{K}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{K}_{mj}(\eta, \xi) + K_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j, \end{cases} & L_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \left(1 - \frac{T_j - X_m}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} e^{-2i\alpha_m} \right), \\
& L_{mj}(\eta, \xi) = \begin{cases} \tilde{L}_{mj}(\eta, \xi), & m = j, \\ \tilde{L}_{mj}(\eta, \xi) + L_{mj}^V(\eta, \xi), & m \neq j, \end{cases} & \tilde{H}_m(\xi) = 2\gamma + \frac{\gamma'}{\bar{X}_m^2} + \frac{\gamma'}{\bar{X}_m^2} - e^{-2i\alpha_m} \left(\frac{\gamma'}{\bar{X}_m^4} + \frac{\gamma}{\bar{X}_m^2} + \frac{2(X_m \bar{X}_m - 1)}{\bar{X}_m^4} \gamma' - \gamma' - \frac{\gamma}{\bar{X}_m^2} \right), \\
& R_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{2\pi} \left(\frac{1}{T_j - X_m} + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \right), & \gamma = \frac{p_1 + p_2}{4}, \quad \gamma' = -\frac{p_1 - p_2}{2}, \quad p_1 = \frac{hP_1}{M_y}, \quad p_2 = \frac{hP_2}{M_y^\infty}, \\
& S_{mj}^V(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} \left(1 - \frac{T_j - X_m}{\bar{T}_j - \bar{X}_m} e^{-2i\alpha_m} \right), & \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \\
& \tilde{K}_{mj}(\eta, \xi) = \tilde{\kappa} K_{mj}^I(\eta, \xi) - \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} \right) K_{mj}^{II}(\eta, \xi) - e^{-2i\alpha_m} \left(X_m - \frac{1}{\bar{X}_m} \right) K_{mj}^{III}(\eta, \xi) - & \tilde{P}_m(\xi) = -\tilde{\kappa} A + \frac{B}{\bar{X}_m^2} + A - \frac{B}{\tilde{\kappa} \bar{X}_m^2} - e^{-2i\alpha_m} \left\{ \frac{B}{\tilde{\kappa} \bar{X}_m^4} - \frac{A}{\bar{X}_m^2} - \frac{2B}{\tilde{\kappa}} \frac{X_m \bar{X}_m - 1}{\bar{X}_m^4} - B + \frac{\tilde{\kappa} A}{\bar{X}_m^2} \right\}, \\
& \quad - \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} K_{mj}^{IV}(\eta, \xi), & A = -0.375(1+\rho)(1-\nu), \quad B = 0.75(1-\rho)(1+\nu), \\
& \tilde{L}_{mj}(\eta, \xi) = \tilde{\kappa} L_{mj}^I(\eta, \xi) - \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} \right) L_{mj}^{II}(\eta, \xi) - & \rho = M_x^\infty / M_y^\infty, \\
& \quad - e^{-2i\alpha_m} \left(X_m - \frac{1}{\bar{X}_m} \right) L_{mj}^{III}(\eta, \xi) - \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2} L_{mj}^{IV}(\eta, \xi), & Z_{0j} = \frac{z_{0j}}{R} = \frac{x_{0j}}{R} + i \frac{y_{0j}}{R}, \quad x_j = l_j \xi, \quad t = l_j \eta, \quad \lambda_j = \frac{l_j}{R}, \\
& L_{mj}^I(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi i \tilde{\kappa}} \left\{ \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j} + \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j} F_{mj}}{(\bar{T}_j X_m - 1)^2} - \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{X_m} \right. & q = -\frac{3}{2}(1+\nu), \\
& \left. \frac{X_m^2 + e^{-2i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1} \right\}, & T_j = Z_{0j} + \lambda_j \eta e^{i\alpha_j}, \quad X_j = Z_{0j} + \lambda_j \xi e^{i\alpha_j}, \\
& & F_{mj} = X_m - Z_{0j} - \frac{e^{2i\alpha_j}}{X_m} + \bar{Z}_{0j} e^{2i\alpha_j}, \\
& & g'_m(t) = \frac{M_y^\infty G_m(l_m \eta)}{h^2} = \frac{2\mu}{(1+\kappa)i} \left[\frac{\partial(u_{II} + iv_{II})}{\partial x_m} \right],
\end{aligned}$$

$$G_m(\eta) = G_{m1}(\eta) + iG_{m2}(\eta),$$

$$y_m(\xi) = \frac{M_y^\infty Y_m(l_m \eta)}{Eh^3} = \frac{1}{1 + \bar{\kappa}} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial x_m} \right],$$

$$Y_m(\eta) = Y_{m1}(\eta) + iY_{m2}(\eta), \quad m = \overline{1, M},$$

де $Y_{m1}(\eta)$, $Y_{m2}(\eta)$, $G_{m1}(\eta)$, $G_{m2}(\eta)$ – дійсні невідомі функції; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

З крайової умови (3) будемо мати

$$G_{m1}(\eta) + \frac{1 + \bar{\kappa}}{(1 + \kappa)(1 + \nu)} Y_{m2}(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1], \quad m = \overline{1, M}, \quad (7)$$

Також додаємо додаткові умови

$$\int_{-1}^1 Y_m(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta Y_{m1}(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 G_m(\eta) d\eta = 0, \quad m = \overline{1, M}, \quad (8)$$

які впливають з однозначності кутів повороту, прогину пластини та переміщень при обході контуру кожної тріщини.

Щоб визначити сталу \bar{c}'_0 , використаємо умову однозначності прогину пластини при обході контуру отвору

$$\bar{c}'_0 = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j} Y_j(\eta)}{T_j} d\eta, \quad (9)$$

Таким чином, щоб визначити невідомі функції $Y_m(\eta)$, $G_m(\eta)$, $m = \overline{1, M}$, ми маємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (4)–(9), яку будемо розв'язувати числово методом механічних квадратур [5, 7].

Обезрозмірене контактне зусилля $N_m^*(\xi)$ ($m = \overline{1, M}$) між берегами тріщин визначимо за формулами

$$N_m^*(\xi) = \frac{hN_m(\xi)}{2M_y^\infty} = \operatorname{Re} \left(\bar{H}_m(\xi) - \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\eta, \xi) G_j(\eta) + S_{mj}(\eta, \xi) \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \right), \quad (10)$$

Числовий аналіз та висновки. При числових розрахунках $\nu = 0.3$, $\gamma_k = h_k / h = 0.13$ ($k = \overline{1, M}$) кількість вузлів у методі механічних квадрату – 200.

На рис. 2 побудовані графіки зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини

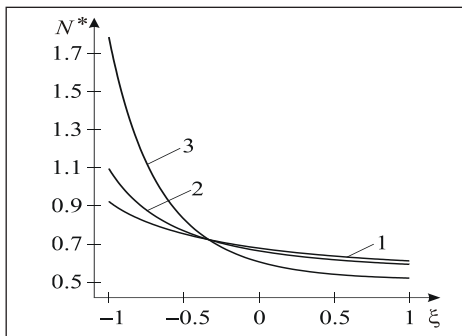


Рис. 2. Графіки контактної сили при різних значеннях навантаження p_2

від безрозмірної координати $\xi = x_i/l$ для випадку однієї радіальної тріщини (тобто коли $\alpha = 0$) при $X_0 = x_0/R = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon = d/R = 1$, $\lambda = d/R = 0.8$, $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$, $p_2 = 0$. Крива 1 побудована при навантаженні $p_1 = 0$, крива 2 – при $p_1 = 1$, крива 3 – при $p_1 = 5$. Бачимо, що величина N^* є більшою у ближній до отвору вершині, ніж у дальній вершині. Крім того, в разі збільшення навантаження p_1 величина контактної сили N^* у ближній до отвору вершині збільшується, а у дальній вершині зменшується.

На рис. 3 зображено графіки зведеного контактної сили $N_i^*(\xi) = hN_i/M_y^\infty$ для випадку двох тріщин, центри яких лежать на осі Ox по різні сторони щодо отвору, між берегами i -ї тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_i/l_i$ ($i = 1, 2$) при $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 0$, $p_1 = hP_1/M_y^\infty = 0$, $p_2 = hP_2/M_y^\infty = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$, $\alpha_2 = 0$, $X_{0i} = x_{0i}/R = 1 + \varepsilon_i$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, причому суцільні лінії відповідають першій тріщині, а штрихові – другій. Крива 1 побудована при $\alpha_1 = 30^\circ$, крива 2 – при $\alpha_1 = 45^\circ$, крива 3 – при $\alpha_1 = 60^\circ$. З рис. 3 бачимо, що при $\alpha_1 > 71^\circ$ відбувається відставання берегів першої тріщини.

На рис. 4 показано безрозмірні коефіцієнти інтенсивності зусиль k_2 і моментів K_1, K_2 для випадку двох тріщин, центри яких лежать на осі Ox по різні сторони щодо отвору, у дальній вершині першої тріщини при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $p_1 = hP_1/M_y^\infty = 0$, $p_2 = hP_2/M_y^\infty = 0$ від кута $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Криві 1 отримані при $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$, криві 2 – при $\rho = 3$, криві 3 – при $\rho = 5$. З рисунка бачимо, що K_1 при $\rho = 1$ і $0^\circ < \alpha < 106^\circ$, при $\rho = 3$ і $84^\circ < \alpha < 151^\circ$, при $\rho = 5$ і $86^\circ < \alpha < 161^\circ$ спадає із збільшенням α , а при $\rho = 1$ і $106^\circ < \alpha < 180^\circ$, при $\rho = 3$ і $\alpha \in (0^\circ, 84^\circ) \cup (151^\circ, 180^\circ)$, при $\rho = 5$ і

$\alpha \in (0^\circ, 86^\circ) \cup (161^\circ, 180^\circ)$ зростає із збільшенням α ; а K_2 при $\rho = 1$ і $\alpha \in (0^\circ, 30^\circ) \cup (99^\circ, 158^\circ)$, при $\rho = 3$ і $\alpha \in (0^\circ, 31^\circ) \cup (95^\circ, 156^\circ)$, при $\rho = 5$ і $\alpha \in (0^\circ, 33^\circ) \cup (94^\circ, 155^\circ)$ зростає із збільшенням α , а при $\rho = 1$ і $\alpha \in (30^\circ, 99^\circ) \cup (158^\circ, 180^\circ)$, при $\rho = 3$ і $\alpha \in (31^\circ, 95^\circ) \cup (156^\circ, 180^\circ)$, при $\rho = 5$ і $\alpha \in (33^\circ, 94^\circ) \cup (155^\circ, 180^\circ)$ спадає із збільшенням α .

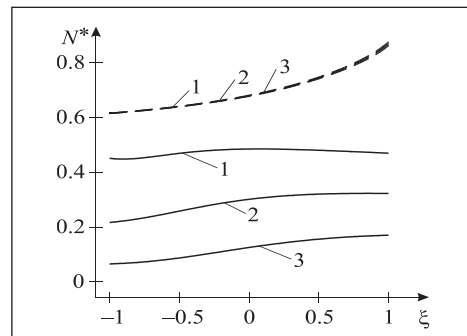


Рис. 3. Графіки контактної сили при різних кутах нахилу другої тріщини α_2

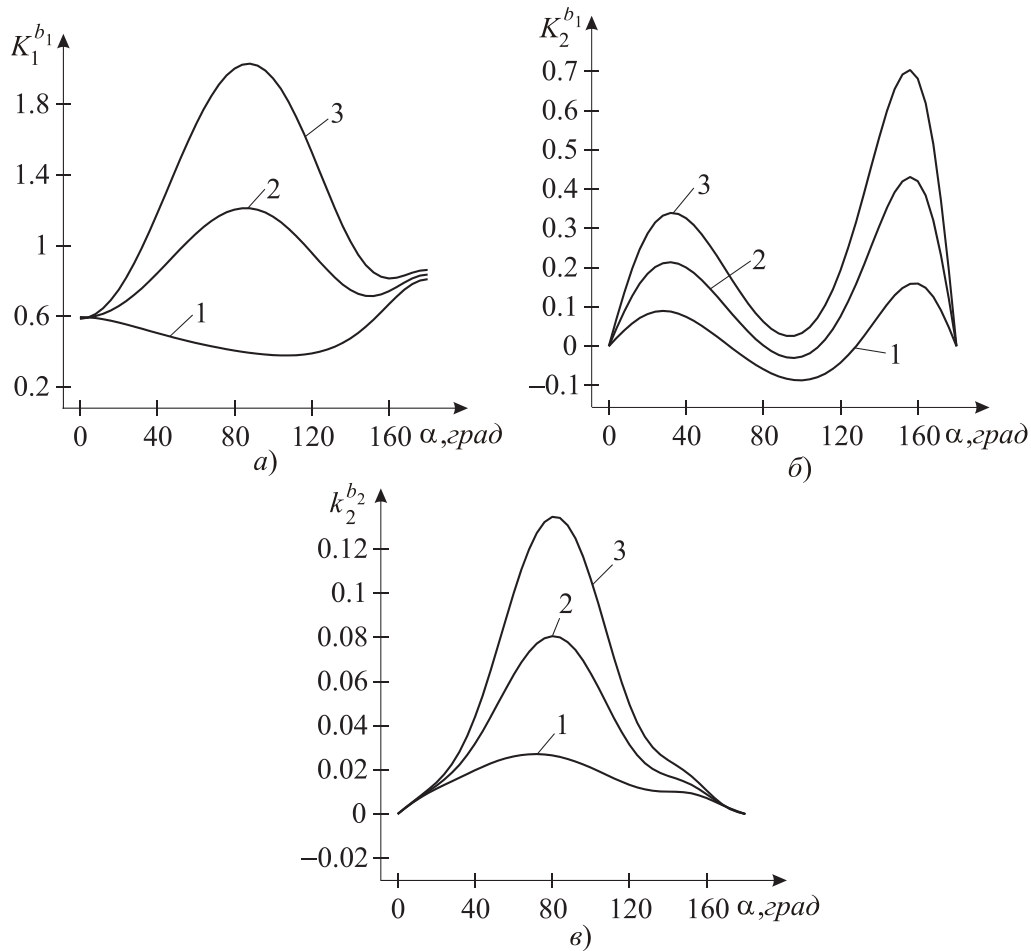


Рис. 4. Графіки коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів кута нахилу при різних значеннях ρ

ЛІТЕРАТУРА

1. Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. Киев : Наукова думка, 1982. 348 с.
2. Бережницький Л.Т., Делявський М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев : Наукова думка, 1979. 400 с.
3. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів : СПОЛОМ, 2003. 320 с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев : Наукова думка, 1976. 444 с.
6. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. Минск : Белорусский государственный университет, 1975. 256 с.
7. Саврук М.П., Зеленьяк В.М. Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. Львів : РАСТР, 2009. 212 с.
8. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев : Наукова думка. 1981. 324 с.
9. Кальтгоф Дж.Ф., Шацький І.П., Бюргель А. Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини. *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: В 3-х т. / Під заг. ред. В.В. Панасюка*. Львів : Каменяр, 1999. Т. 1. С. 72–74.
10. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. *Доповіді Академії наук УРСР. Серія А. Фізико-математичні та технічні науки*. 1988. № 7. С. 49–51.
11. Young M., Sun C. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*. 1992. Vol. 55. P. 81–93.

12. Опанасович В.К., Слободян М.С. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів. *Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки.* № 1, 2005. С. 85–89.
13. Опанасович В.К., Слободян М.С. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2006. Т. 49. № 3. С. 106–119.
14. Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Slepian L.L. Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal of Solids and Structures.* 1998. Vol. 35. P. 4077–4089.
15. Slepian L.L., Dempsey J.P., Shekhtman I.I. Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1995. № 43. P. 1727–1749.
16. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь. *Наукові нотатки Луцького технічного університету.* 2007. Вип. 20 (2). С. 123–127.
17. Опанасович В.К., Слободян М.С., Звізло І.С. Двовісний згин пластини з круговим отвором та крайовою радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2015. № 1. С. 127–135.
18. Опанасович В.К., Слободян М.С., Бедрій В.Я. Двовісний згин ізотропної пластини з прямокутною жорствою шайбою та прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математична.* 2015. № 3. С. 21–24.

REFERENCES

1. Andreykiv A.E. (1982) *Prostranstvennye zadachi teorii treshchin* [Spatial problems of crack theory]. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
2. Berezhnits'kiy L.T., Delyavskiy M.V., Panasyuk V.V. (1979) *Izhib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin* [Bending of thin plates with defects such as cracks]. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
3. Kushnir R.M., Nykolyshyn M.M., Osadchuk V.A. (2003) *Pruzhnyi ta pruzhno-plastychnyi hranychnyi stan obolonok z defektamy* [Elastic and elastic-plastic shells with boundary condition defects]. Lviv: SPOLOM. (in Ukrainian)
4. Muskhelishvili N.I. (1966) *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moskva: Nauka. (in Russian)
5. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. (1976) *Rasprostraneniye napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Distribution of stresses around cracks in plates and shells]. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
6. Prusov I.A. (1975) *Metod sopryazheniya v teorii plit* [The conjugation method in plate theory]. Minsk: Belorusskiy gosudarstvennyy universitet. (in Russian)
7. Savruk M.P., Zeleniak V.M. (2009) *Dvovymirni zadachi teorii pruzhnosti dlia kuskovo-odnorodnykh til z trishchynamy* [Two-dimensional problems of the theory of elasticity for piecewise homogeneous bodies with cracks]. Lviv: RASTR. (in Ukrainian)
8. Savruk M.P. (1981) *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami* [Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks]. Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
9. Kalthof Dzh.F., Shatskiy I.P., Biurhel A. (1999) *Eksperymentalne pidtverdzhennia kontaktu berehiv trishchyny pry zghyni plastyny* [Experimental confirmation of the contact of the crack]. *Mekhanika ruinvannia materialiv i mitsnist konstruktsii* [Mechanics of fracture of materials and strength of structures] (eds V.V. Panasiuk). Lviv: Kameniar, 1999, vol. 1, pp. 72–74. (in Ukrainian)
10. Shatskiy I.P. (1988) *Zghyn plastyny, oslablenoi rozrizom z kontaktuiuchymy berehamy* [Bending of a plate weakened by a section with contacting shores]. *Dopovidi Akademii nauk URSS. Seriya A. Fizyko-matematychni ta tekhnichni nauky* [Report of the USSR Academy of Sciences. Ser. A. Phys.-Math. and Tech. Science], no. 7, pp. 49–51. (in Ukrainian)
11. Young M., Sun C. (1992) Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*, vol. 55, pp. 81–93.
12. Opanasovych V.K., Slobodian M.S. (2005) *Dvostoronniy zghyn plastyny z kruhovym otvorom ta trishchynoiu z vrakhuvanniam kontaktu yii berehiv* [Bilateral bending of a plate with a circular hole and a crack taking into account the contact of its banks]. *Visnyk Donetskoho universytetu. Seriya A. Pryrodnychi nauky* [Visnyk of Donetsk National University], no 1, pp. 85–89. (in Ukrainian)

13. Opanasovych V.K., Slobodian M.S. (2006) *Dvovisnyi zghyn plastyny z kruhovym otvorom i dvoma radialnymi trishchynamy, berehy yakykh kontaktuiut* [Biaxial bending of a plate with a circular hole and two radial cracks, the shores of which are in contact]. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia* [Mathematical methods and physical and mechanical fields], vol. 49, no. 3, pp. 106–119. (in Ukrainian)
14. Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Slepyan L.L. (1998) Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, pp. 4077–4089.
15. Slepyan L.I., Dempsey J.P., Shekhtman I.I. (1995) Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, no 43, pp. 1727–1749.
16. Opanasovych V. K. (2007) *Zghyn plastyny z naskriznoiu priamoliniinoiu trishchynoiu z urakhuvanniam shyryny oblasti kontaktu yii poverkhon* [Bending of a plate with a through rectilinear crack taking into account the width of the contact area of its surfaces]. *Naukovi notatky Lutskoho tekhnichnoho universytetu* [Scientific Notes of Lutsk Technical University], vol. 20 (2), pp. 123–127. (in Ukrainian)
17. Opanasovych V.K., Slobodian M.S., Zvizlo I.S. (2015) *Dvovisnyi zghyn plastyny z kruhovym otvorom ta kraiovoiu radialnoiu trishchynoiu z urakhuvanniam shyryny oblasti kontaktu yii berehiv* [Biaxial bending of a plate with a circular hole and an edge radial crack taking into account the width of the contact area of its shores]. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky* [Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical sciences], no 1, pp. 127–135. (in Ukrainian)
18. Opanasovych V.K., Slobodian M.S., Bedrii V.Ya. (2015) *Dvovisnyi zghyn izotropnoi plastyny z priamokutnoiu zhorstvoiu shaiboju ta priamoliniinoiu naskriznoiu trishchynoiu z urakhuvanniam shyryny oblasti kontaktu yii berehiv* [Biaxial bending of an isotropic plate with a rectangular rigid washer and a rectilinear through crack, taking into account the width of the contact area of its shores]. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya fizyko-matematychna* [Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and mathematical series], no. 3, pp. 21–24. (in Ukrainian)