

КОНТАКТ ЗІ ЗЧЕПЛЕННЯМ І ПРОКОВЗУВАННЯМ ЦИЛІНДРИЧНОГО ПЛОСКОГО ШТАМПА З ЗАОКРУГЛЕНИМ КРАЄМ ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ

Стреляєв Ю. М.

*кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри фундаментальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-4400-7824
strelkiny@gmail.com*

Тітова О. О.

*кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-8471-0867
toa7676@gmail.com*

Ключові слова: *контактна задача, штамп із заокругленим краєм, тертя Кулона, квазістатична задача, інтегральне рівняння, числовий розв'язок.*

Розглянуто контактну задачу про вдавлювання жорсткого кругового циліндричного штампа в лінійно пружний ізотропний півпростір за наявності тертя. Межі зон зчеплення і проковзування заздалегідь невідомі. Поверхня, яка обмежує основу штампа, складалась із плоскої кругової ділянки в центрі і сферичного заокруглення в кільцевій області біля краю основи штампа. Навантаження тіл відбувалось за рахунок діючої вздовж осі симетрії штампа монотонно зростаючої нормальної сили. Задача формулювалася у квазістатичній постановці. Процес навантаження складався з скінченного числа кроків. Для урахування тертя використовувався закон Кулона в класичній неспрошеній формі. Граничні умови контактної взаємодії визначені системою рівностей і нерівностей у заданій обмеженій області, яка априорі включає в себе поверхню контакту на всіх етапах навантаження. Задачу зведено до розв'язання послідовності одностипних систем нелінійних граничних інтегральних рівнянь, які відповідають послідовним крокам дискретного процесу навантаження. Чисельний метод розв'язання одержаних систем полягав в їх регуляризації, потім дискретизації і застосуванні ітераційного процесу для наближеного розв'язання дискретизованих систем. Запропонованим методом одержано числові розв'язки контактної задачі при різних значеннях радіуса плоскої центральної ділянки основи штампа. Виконано порівняння одержаних розв'язків із числовими розв'язками відповідних статичних задач при однокроковому миттєвому навантаженні. Встановлено, що при малих радіусах плоскої ділянки розв'язки істотно відрізняються. Похибка, за якої задача може бути сформульована в статичній постановці, досягається за умови, що радіус плоскої частини становить не менше 80% радіуса штампа.

STICK-SLIP CONTACT OF THE CYLINDRICAL FLAT PUNCH WITH A ROUNDED EDGE AND ELASTIC HALF-SPACE

Streliaiev Yu. M.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Fundamental Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-4400-7824
strelkiny@gmail.com*

Titova O. O.

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Fundamental Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8471-0867
toa7676@gmail.com*

Key words: *contact problem,
punch with rounded edge,
Coulomb friction, quasi-static
problem, integral equation,
numerical solution.*

The contact problem on indentation of a rigid circular cylindrical punch into a linearly elastic isotropic half-space in the presence of friction is considered. The boundary between stick and slip zones is unknown in advance. The boundary surface of the punch base consisted of a flat circular area in the center and a spherical rounded annular area near the boundary. The bodies were loaded by the monotonically increasing normal force applied along the axis of symmetry of the punch. The loading process consisted of a finite number of steps. To take into account friction, we used the Coulomb law in classical unsimplified form. The problem was formulated in the modified quasi-static statement. This statement is based on the original hypothesis of the possibility of a small perturbation of the loading conditions in quasistatic frictional contact problems of elasticity. The boundary conditions for contact interaction of bodies at each step of discrete loading process are expressed as a system of equalities and inequalities. Mechanical meaning of this modification is an introduction of a small delay in action of normal contact stresses with respect to tangential contact stresses at each step of loading process. The boundary conditions of contact interaction are given by a system of equalities and inequalities in a prescribed bounded region containing the contact surface at all stages of loading. The problem is reduced to a sequence of similar systems of nonlinear boundary integral equations, corresponding to successive steps of the discrete loading process. The numerical method is applied. The analyzed system of equations is regularized. Then the corresponding regularized system is discretized. The iterative process for solving the resulting systems is constructed. Using this method, we obtained numerical solutions of the contact problem for different values of the radius of the flat central area of the base of the punch. The obtained solutions are compared with the numerical solutions of the corresponding static problems for a one-step instantaneous load. It has been established that for small radii of the flat area the solutions are significantly different. The error at which the problem can be formulated in the static statement is achieved if the radius of the flat area of base is not less than 80% of the radius of the punch.

Вступ. Задача про контактну взаємодію пружних тіл є важливою задачею механіки деформованого твердого тіла і має широке технічне застосування в машинобудуванні, транспорті, будівельній механіці та інших галузях. Актуальність цієї задачі зумовлена питаннями міцності і зносостійкості різних механічних систем і конструкцій. У процесі визначення контактних напружень у взаємодіючих елементах таких систем часто виникає необхідність враховувати тертя між контактуючими поверхнями цих елементів. Для врахування тертя в контактних задачах теорії пружності, як правило, використовують закон Кулона [1].

Складність таких задач пов'язана з тим, що поверхня контакту і виникаючі на ній зчеплення і проковзування заздалегідь невідомі і можуть мати складну непрогнозовану форму. Ці обставини призводять до необхідності використання геометричних та фізичних нелінійностей у процесі формулювання таких задач, що істотно ускладнює отримання їх аналітичних розв'язків.

Аналіз стану проблеми. Нині для розв'язання контактних задач про взаємодію пружних тіл з урахуванням тертя використовують точні та наближені аналітичні методи [1–3], а також чисельні методи, які базуються на варіаційній постановці задачі [4–6] та зведенні її до різних операторних рівнянь [7–12]. На відміну від аналітичних, чисельні методи орієнтовані на розв'язання контактних задач, для яких ділянка контакту, зони зчеплення і проковзування заздалегідь невідомі і можуть мати складну, не прогнозовану конфігурацію. Труднощі, які виникають при чисельній реалізації варіаційних методів розв'язання таких складних контактних задач, відсутні при використанні методів [9–12], заснованих на застосуванні нелінійних операторних рівнянь для моделювання контактної взаємодії тіл.

Нелінійні інтегральні рівняння [10; 11] дають змогу (на відміну від інших аналогічних рівнянь [7; 8]) враховувати наявність проковзування і зчеплення між контактуючими поверхнями тіл. Але при використанні цих рівнянь достатньо складно виразити умови єдиності розв'язку контактної задачі, виконати регуляризацію цих рівнянь та довести збіжність ітераційних процесів, які використовуються для отримання розв'язку. У роботі [12] одержано нелінійні операторні рівняння, для яких вдалося довести єдиність їх розв'язку і суворо обґрунтувати основні етапи методу їх наближеного розв'язання.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є дослідження розподілів контактних навантажень, що виникає в процесі фрикційного вдавлювання циліндричних штампів із криволінійною основою у пружній півпростір.

Реалізація цієї мети передбачала виконання таких завдань:

- методом крайових нелінійних інтегральних рівнянь [12] одержати наближений розв'язок квазістатичної контактної задачі про вдавлювання в лінійно пружний півпростір плоского циліндричного штампа, підшова якого має заокруглення біля краю;

- проаналізувати залежність параметрів контакту від величини радіусу плоскої ділянки основи штампа;

- перевірити коректність отриманих результатів шляхом їх порівняння з відомими даними та альтернативними числовими розрахунками.

Метод числового розв'язання просторової квазістатичної контактної задачі. Розглянемо загальну постановку тривимірної квазістатичної контактної задачі про взаємодію двох лінійно пружних ізотропних тіл. У випадку, коли одне із тіл є абсолютно жорстким, будемо вважати його умовно пружним із нескінченним модулем Юнга. Будемо вважати, що взаємодія тіл супроводжується тертям Кулона [1]. Навантаження тіл здійснюються повільно і складається із скінченної кількості l послідовних станів рівноваги (кроків навантаження). Задача полягає в знаходженні на кожному кроці навантаження ділянок контакту тіл і розподілів контактних напружень на цих ділянках.

При певних припущеннях [12] крайові умови контактної взаємодії на i -ому кроці навантаження можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} p_i(s) \geq 0; \quad u_i(s) \geq 0; \quad p_i(s) \cdot u_i(s) = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_i(s); \\ \sqrt{[\dot{u}_{2i}(s)]^2 + [\dot{u}_{3i}(s)]^2} \cdot p_{2i}(s) = \\ = -\mu \cdot p_i(s) \cdot \dot{u}_{2i}(s); \\ \sqrt{[\dot{u}_{2i}(s)]^2 + [\dot{u}_{3i}(s)]^2} \cdot p_{3i}(s) = \\ = -\mu \cdot p_i(s) \cdot \dot{u}_{3i}(s), \end{aligned} \quad (1)$$

де:

Ω – обмежена плоска область, яка містить невідому площадку контакту;

$u_i(s), u_{2i}(s), u_{3i}(s)$ – відносні переміщення взаємодіючих тіл у точці $s \in \Omega$;

$p_i(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ – контактні напруження в точці $s \in \Omega$;

$\dot{u}_{2i}(s), \dot{u}_{3i}(s)$ – компоненти вектора швидкості відносного проковзування в точці $s \in \Omega$;

μ – коефіцієнт тертя.

Надалі будемо вважати, що вектор-функції $p_i(s) = (p_i(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s))$ та $u_i(s) = (u_i(s), u_{2i}(s), u_{3i}(s))$ належать гільбертовому простору $L_2^3(\Omega)$ [10]. Зв'язок між компонентами цих вектор-функцій визначається співвідношеннями [12]:

$$u_{ki}(s) = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(p_{ji})_s - f_{ki}(s) \equiv F_k(p_i, \Delta_{ki})_s, \quad (2)$$

де:

$$f_{ki}(s) \in L_2(\Omega), \quad f_{1i}(s) = -\delta_0(s) - \Delta_{1i}, \quad f_{2i}(s) = -\Delta_{2i}, \\ f_{3i}(s) = -\Delta_{3i};$$

$\delta_0(s) \in L_2(\Omega)$ – початковий зазор між тілами;
 Δ_{ki} – відносні зміщення віддалених точок тіл на i -ому кроці навантаження.

Інтегральні оператори впливу $A_{kj} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, які входять у співвідношення (2), мають вигляд

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1, 3}), \quad (3)$$

У разі апроксимації тіл пружними півпросторами функції $K_{kj}(s, s')$ відомі із розв'язків Буссінеска і Черруті [13].

Таким чином, контактна задача зводиться до визначення на кожному i -ому кроці навантаження невідомих функцій $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$, які майже скрізь на Ω задовольняють співвідношення (1) з урахуванням (2), (3).

Згідно з підходом, запропонованим в [12], крайові умови (1) можна записати у спрощеній формі:

$$p_{1i}(s) \geq 0; \quad F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; \\ p_{1i}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i-1}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) = \\ = -\mu \cdot p_{1i-1}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) = \\ = -\mu \cdot p_{1i-1}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s, \quad (4)$$

де:

$$\tilde{\Delta}_{2i}(s) = \Delta_{2i} - \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{2i-1}; \\ \tilde{\Delta}_{3i}(s) = \Delta_{3i} - \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{3i-1}.$$

Систему співвідношень (4) можна звести до операторного рівняння [12]

$$p_i = G_{\mu p_{i-1}}(p_i - E \cdot (A(p_i) - \tilde{f}_i)), \quad (5)$$

де: $i = \overline{1, l}$; E – довільна додатна константа;

$$\tilde{f}_i(s) = (-\delta_0(s) - \Delta_{1i}, -\tilde{\Delta}_{2i}(s), -\tilde{\Delta}_{3i}(s)).$$

Лінійний обмежений оператор впливу $A : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ визначено співвідношеннями

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = A(x), \quad y_k = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(x_j) \quad \forall k = \overline{1, 3}. \end{cases} \quad (6)$$

Неперервний нелінійний оператор $G_{\mu g} : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ задано рівностями

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = G_{\mu g}(x), \\ y_1(s) = h(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu g(s)), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu g(s)), \quad s \in \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

в яких функції h і q мають вигляд

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases} \quad (9)$$

Операторне рівняння (5) є системою трьох нелінійних крайових інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$.

Метод чисельного розв'язання таких рівнянь детально викладено в роботі [12]. Він полягає в регуляризації нелінійних інтегральних рівнянь, дискретизації регуляризованих рівнянь і використанні ітераційного методу для одержання наближеного розв'язку отриманих систем нелінійних скалярних рівнянь.

Результати дослідження. За допомогою викладеного методу було одержано чисельний розв'язок просторової квазістатичної контактної задачі про вдавлення у пружній півпростір жорсткого кругового штампа радіуса R . Поверхня основи штампа складалась із плоскої кругової ділянки радіуса R_1 в центрі і сферичного закруглення радіуса R_2 в кільцевій зоні, біля краю основи (рис. 1).

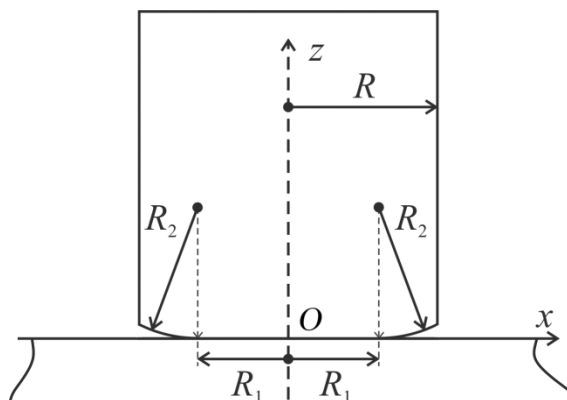


Рис. 1. Осьовий переріз штампа

Процес навантаження тіл виконувався за $l = 40$ кроків відповідно до закону зміни зміщення штампа:

$$\Delta_{ii} = -\frac{|\Delta_i|}{l} \cdot i, \quad i = \overline{1, l}, \quad (10)$$

де $|\Delta_i|$ – кінцеве значення абсолютної величини нормального переміщення штамп. Дотичні переміщення Δ_{2i} і Δ_{3i} дорівнювали нулю на всіх кроках навантаження.

Використовувались такі вихідні данні: модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона півпростору рівні $3,5 \cdot 10^4$ МПа і 0,44 відповідно; коефіцієнт тертя $\mu = 0,07$.

Числові розв’язки, одержані при різних значеннях параметра $\alpha = R_1/R$, порівнювались із числовими розв’язками відповідних статичних і квазістатичних задач немодифікованої постановці [11]. У випадку $\alpha = 1$ результати порівнювались із відомим розв’язком задачі [4]. Радіус R_2 обирали так, щоб радіус площадки контакту a на останньому кроці навантаження дорівнював $0,95 \cdot R$. Одержані результати представлені на рис. 2–5. Тут p і q – нормальна і дотична складові частини питомого контактного навантаження в точках осі x , a – радіус площадки контакту, $p(0)$ – тиск

у центрі ділянки контакту. Тут квадрати відповідають одержаному числовому розв’язку, круги – числовому розв’язку квазістатичної задачі в немодифікованій постановці [11], одержаному при $l = 20$ в законі (9), пунктирна лінія – числовому розв’язку статичної задачі [11] при $l = 1$. Суцільна лінія на рис. 5 відповідає розв’язку [4].

Обговорення результатів. Аналіз одержаних результатів показав, що при значеннях α із проміжку від 0 до 0,7 числовий розв’язок квазістатичної задачі істотно відрізняється від розв’язку відповідної статичної задачі. Так, у випадку сферичної основи штамп ($\alpha = 0$) максимальне відхилення квазістатичного розв’язку щодо його статичного аналога становило приблизно 35% (рис. 2). При $\alpha = 0,5$ це відхилення дорівнює 14% (Рис. 3). При значеннях α із проміжку від 0,8 до 1 це відхилення стає несуттєвим і не перевищує 3% (рис. 4, 5).

Порівняння одержаних числових розв’язків (квадрати на рис. 2–5) із числовими розв’язками цієї задачі в немодифікованій квазістатичній постановці (круги на рис. 2–5) показало, що максимальна відносна розбіжність цих розв’язків не перевищує 5% при усіх α . У випадку плоского

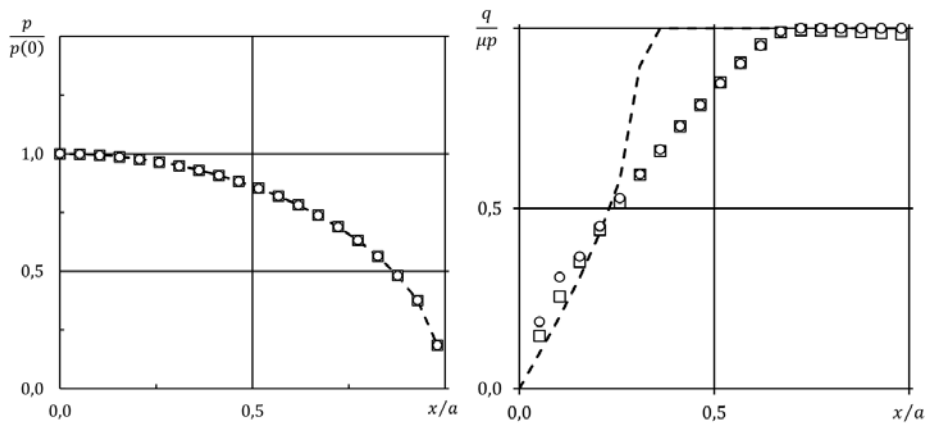


Рис. 2. Розподіли контактних зусиль при $\alpha = 0$ (сферичний штамп)

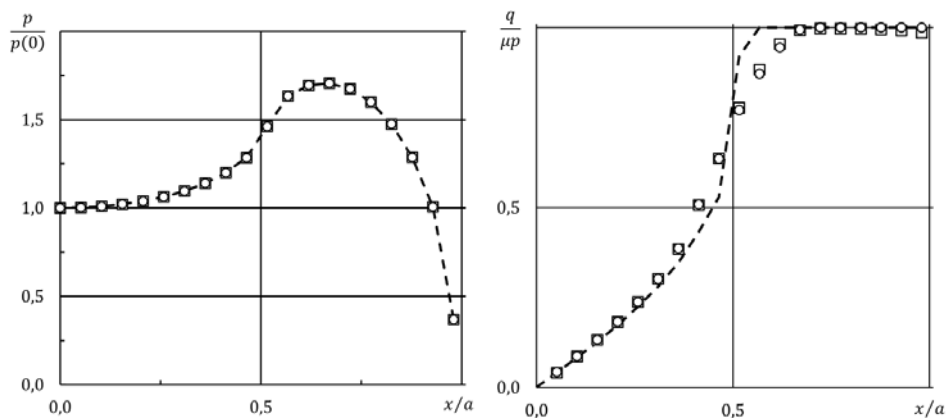


Рис. 3. Розподіли контактних зусиль при $\alpha = 0,5$

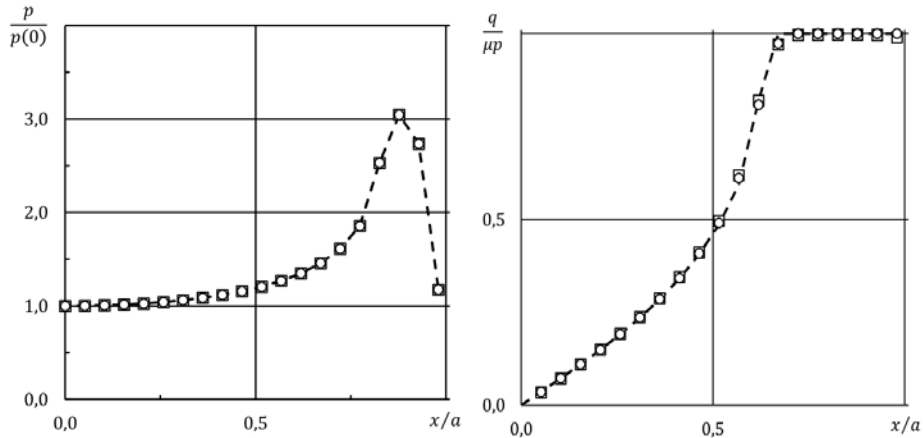


Рис. 4. Розподіли контактних зусиль при $\alpha = 0,8$

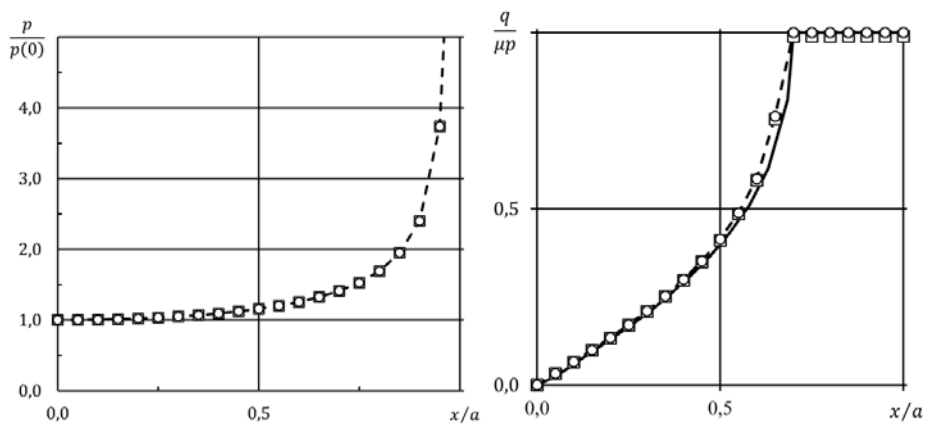


Рис. 5. Розподіли контактних зусиль при $\alpha = 1$
(плоский штамп з гострим краєм)

штампа (рис. 5) максимальне відхилення одержаного числового розв'язку від відомого розв'язку [4] становить 5%, а в більшості точок не перевищує 2%. Похибка 5% досягається в точці, розташованій поблизу границі зон зчеплення і проковзування (рис. 5). Таку похибку можна пояснити високим градієнтом функції $q/\mu p$ біля цієї границі.

Висновки. Розглянуто квазістатичну контактну задачу про фрикційне вдавлювання в лінійно пружний півпростір циліндричного штампа, підшва якого має плоску ділянку в центрі і сферичне закруглення біля краю. Методом крайових нелінійних інтегральних рівнянь знайдено розподіли пито-

мого контактного навантаження, що діє на основу штампа при різних розмірах її плоскої ділянки. Порівняння отриманих результатів із розв'язками статичних задач (при миттєвому навантаженні) показало, що розглянуту задачу можна формулювати в статичній постановці лише за умови, що радіус плоскої ділянки основи штампа становить не менш ніж 0,8 від радіусу його основи. В інших випадках цю задачу варто розглядати в квазістатичній постановці при покроковому навантаженні. Про коректність отриманих результатів свідчить їх добра відповідність іншим відомим розв'язкам та чисельним розрахункам.

ЛІТЕРАТУРА

1. Popov V.L. Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Berlin : Springer, 2017. 391p.
2. Zhupanska O.I. Contact problem for elastic spheres: Applicability of the Hertz theory to non-small contact areas. *International Journal of Engineering Science*. 2011. 49(7). P. 576–588.
3. Острик В.І. Метод факторизації та його узагальнення у змішаних задачах теорії пружності. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2018. 480 с.

4. Turner J.R. The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1979. Vol. 24. P. 439–469.
5. Kravchuk A.S. The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. № 73(3). P. 351–357.
6. Andresen H., Hills D. A., Barber J. R., Vazquez J. Frictional half-plane contact problems subject to alternating normal and shear loads and tension in the steady state. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. № 168. P. 166–171.
7. Galanov B.A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1985. 49(5). P. 634–640.
8. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2004. № 68(3). P. 463–472.
9. Стреляев Ю.М., Клименко М.І., Стреляев О.Ю. Контакт плоского циліндричного штампа з пружним півпростором при немонотонному навантажуванні з урахуванням тертя. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 2. С. 142–151.
10. Александров А.И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56, № 3. С. 29–42.
11. Александров А.И., Стреляев Ю.М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2014. № 3 (7). С. 36–40.
12. Стреляев Ю.М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения квазистатической контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. 2016. Т. 20, № 2. С. 306–327.
13. Johnson K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1985. 452 p.

REFERENCES

1. Popov, V. L. (2017) *Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications*. Berlin: Springer, 391.
2. Zhupanska, O. I. (2011). Contact problem for elastic spheres: Applicability of the Hertz theory to non-small contact areas. *International Journal of Engineering Science*, 49(7), pp. 576–588.
3. Ostryk V. I. (2018). *Metod faktoryzatsii ta yoho uzahalnennia u zmishanykh zadachakh teorii pruzhnosti* [Factorization method and its generalization in mixed problems of elasticity]. Kyiv: VPTs Kyivskiyi universytet. (in Ukrainian)
4. Turner, J. R. (1979). The frictional unloading problem on linear elastic half-space. *J. Inst. Math. and its Appl.*, vol. 24, pp. 439–469.
5. Kravchuk, A. S. (2009). The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development. *J. Appl. Math. Mech.*, 73(3), pp. 351–357.
6. Andresen, H., Hills, D. A., Barber, J. R., & Vazquez, J. (2019). Frictional half-plane contact problems subject to alternating normal and shear loads and tension in the steady state. *International Journal of Solids and Structures*, 168, pp. 166–171.
7. Galanov, B. A. (1985). The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. *J. Appl. Math. Mech.*, 49(5), pp. 634–640.
8. Aleksandrov, V. M., & Pozharskii, D. A. (2004). Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 68(3), pp. 463–472.
9. Streliaiev, Yu. M., Klymenko, M. I., & Streliaiev, O. Yu. (2018). Kontakt ploskoho tsylindrychnoho shtampa z pruzhnym pivprostorum pry nemo-notonnomu navantazhuvanni z urakhuvanniam tertia [Contact with friction of a flat cylindrical punch with an elastic half-space under nonmonotonic loading]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, 2, pp. 142–151.
10. Aleksandrov, A. I. (2015). A Method for the Solution of a Three-Dimensional Contact Problem of Interaction of Two Elastic Bodies in the Presence of Friction. *Journal of Mathematical Sciences*, 205(4), pp. 518–534.
11. Alexandrov, A., & Streliaiev, Y. (2014). Metod nelinejnyh granichnyh integral'nyh uravnenij dlja kontaktynyh zadach teorii uprugosti [Nonlinear boundary integral equation's method for elastic contact problems]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(7), pp. 36–40.
12. Streliaiev, Yu. M. (2016). Metod nelinejnyh granichnyh integral'nyh uravnenij dlja reshenija kvazi-staticheskoy kontaktojnij zadachi o vzaimodejstvii uprugih tel pri nalichii kulonova trenija [A nonlinear boundary integral equations method for the solving of quasistatic elastic contact problem with Coulomb friction]. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 20(2), pp. 306–327.
13. Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 452.