УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-12

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Ткаченко І. Г.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри фундаментальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-4232-2484
tig.phd81@gmail.com

Антоненко Н. М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики
Національний університет «Запорізька політехніка»
вул. Жуковського, 64, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-0427-6499
antonenkonina.ua@gmail.com

Морозов Ю. В.
аспірант кафедри фундаментальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-8234-6544
yuliysamiy@gmail.com

Ключові слова: *температура, теплопровідність, пружний шар, функції податливості, інтегральне перетворення Фур'є.*

У запропонованій статті авторами отримано аналітичний розв'язок (у вигляді невласних інтегралів Фур'є) двовимірної стаціонарної задачі про визначення температурного поля в точках істотно багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між її шарами. У цій роботі розглянуто два типи крайових умов задачі, що розв'язується: на верхній межі багатошарової основи відомий закон розподілу температури (задача І) або на верхній межі основи відомий температурний потік (задача ІІ). На нижній межі основи підтримується нульова температура, інші навантаження відсутні. Поставлена задача розв'язується за допомогою метода функцій податливості в просторі трансформант Фур'є. Раніше вказаний метод застосовувався лише до задач пружності, теплопровідності та термопружності для багатошарових основ та плит з ідеальним тепловим контактом між їх шарами. Для поставлених у роботі задач отримано аналітичні вирази для обчислення температури в точках шарів основи. Для чисельної реалізації отриманих результатів уведено модифіковані функції податливості, які являють собою різницю границі функції податливості та самої цієї функції, що дало змогу виділити слабо та швидко збіжні доданки у виразах для обчислення температури в кожному шарі багатошарової основи. Для верхнього шару перший доданок у виразі для температури може бути обчислений точно, використовуючи спеціальні таблиці інтегралів. Чисельні розрахунки виконано за допомогою математичного пакета Maple.

Як приклад було розглянуто чотиришарову основу, що складається з шарів однакової товщини, які мають різні механічні властивості. За результатами розрахунків було побудовано графіки розподілу температури за товщиною першого та четвертого шарів основи, що ілюструють вплив коефіцієнтів теплопровідності та теплового опору на розподіл температури в точках заданої чотиришарової основи. Аналіз отриманих результатів показав, що одночасне збільшення коефіцієнтів теплового опору призводить до збільшення температури в точках першого шару основи, а в четвертому шарі при цьому температура зменшується.

PLANE THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEM FOR A MULTILAYER FOUNDATION WITH NON-IDEAL THERMAL CONTACT BETWEEN ITS LAYERS

Tkachenko I. H.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Pure Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-4232-2484
tig.phd81@gmail.com

Antonenko N. M.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics
Zaporizhzhia Polytechnic National University
Zhukovskoho str., 64, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-0427-6499
antonenkonina.ua@gmail.com

Morozov Yu. V.
Postgraduate Student at the Department of Pure Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-8234-6544
yuliysamiy@gmail.com

Key words: *temperature, thermal conductivity, elastic layer, compliance functions, Fourier transform.*

An analytical solution (in the form of the improper Fourier integrals) of a two-dimensional stationary problem of determining temperature field at the points of a multilayer foundation with non-ideal thermal contact between its layers is obtained. The two types of boundary conditions are considered: either the temperature distribution law is known on the upper boundary (problem I) or the heat flux is known on the upper boundary (problem II). On the lower boundary of the foundation the temperature equals to zero is kept, there are no other loads. The considered problem is solved by the compliance functions method in the Fourier transforms space. Previously, this method was applied only to the problems of elasticity, thermal conductivity and thermoelasticity for foundations and plates with ideal thermal contact between their layers. The modified compliance functions were introduced for numerical realization of the obtained results. They are equal to the differences between the limits of the compliance functions and those functions themselves. The introduction of these functions allows to isolate weakly and rapidly convergent terms in the expressions for temperature in each foundation layer. For the considered problems, the analytical expressions for the temperature at the points of the foundation layers are obtained. The first term in the upper layer temperature

expression can be calculated exactly using special tables of integrals. The numerical calculations were made in the Maple mathematical package.
The numerical results for the four-layer foundation which consists of the same thickness layers with different mechanical properties are obtained. The graphs of temperature distributions over the thickness of the first and fourth layers are constructed. They are illustrated the influence of the thermal conductivity and thermal resistance coefficients on the temperature distribution at the points of the considered foundation. The analysis of the results enables us to make the following conclusions: the simultaneous increase of the thermal resistance coefficients leads to the increase (decrease) of temperature at the points of the first (fourth) layer of the foundation.

Вступ. Різні задачі геології, машинобудування та ракетобудування зводяться до розв’язання задач теплопровідності та термопружності для багатошарових плит, основ та пластин з ідеальним тепловим контактом між шарами [1–8]. Під час виготовлення шаруватих конструкцій важко забезпечити ідеальне з’єднання шарів. Між шарами, що контактують, може знаходитись тонкий проміжний шар деякого матеріалу з термопружними властивостями, які істотно відрізняються від подібних характеристик шарів, тому серед крайових задач термопружності істотний інтерес становлять задачі для багатошарових структур з неідеальним тепловим контактом між шарами. Різні типи моделювання неідеального теплового контакту між шарами використані в низці робіт, присвячених вивченню теплових процесів у шаруватих тілах [9–11].

У цій роботі метод функцій податливості [12] застосовано до розв’язування задачі про визначення температурного поля в точках багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами [13]. Раніше цим методом було розв’язано задачу про термопружну деформацію багатошарової основи з ідеальним тепловим контактом між шарами [8].

Постановка задачі. Розглядається плоска задача теплопровідності для n-шарової основи (пакет зчеплених між собою пружних шарів, що лежать на абсолютно жорсткій півплощині) з неідеальним тепловим контактом між її шарами: на стиках сусідніх шарів різниці температур відповідних точок пропорційні їхнім тепловим потокам. Шари нумеруємо зверху вниз, починаючи з одиниці, півплощині присвоїмо номер $n+1$. Кожен шар характеризується товщиною h_k, коефіцієнтом теплопровідності k_{Tk} та теплового розширення α_{Tk}, коефіцієнтами Ламе λ_k, μ_k. На верхній межі основи задана температура (задача I) або тепловий потік (задача II). На нижній межі основи підтримується нульова температура.

Метою статті є отримання аналітичного виразу для температури в точках багатошарової основи за умови неідеального теплового контакту між її шарами та представлення його у зручному для чисельної реалізації вигляді.

У кожному шарі вводимо декартову систему координат $O_k x z_k$ так, як показано на рис. 1.

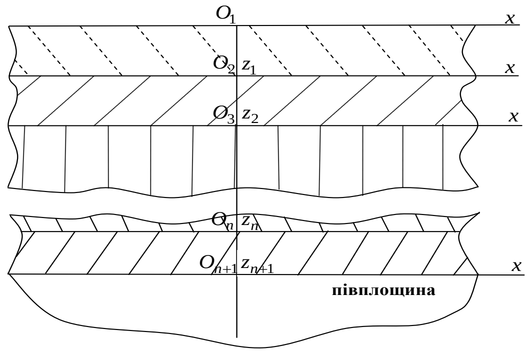

Рис. 1. Багатошарова основа

Крайові умови задачі I: $T_1(x,0) = f(x)$, $T_{n+1}(x,0) = 0$.
Крайові умови задачі II: $\dfrac{\partial T_1(x,0)}{\partial z} = g(x)$, $T_{n+1}(x,0) = 0$.
Умови на спільних межах шарів [13]:

$$k_{Tk}\frac{\partial T_k}{\partial z}(x,h_k) = \frac{1}{R_k}\left[T_{k+1}(x,0) - T_k(x,h_k)\right],$$

$$k_{T\,k+1}\frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(x,0) = k_{Tk}\frac{\partial T_k}{\partial z}(x,h_k), \qquad (1)$$

де R_k – коефіцієнт теплового опору.

Метод розв’язання. Задача визначення температурного поля для стаціонарного ізотропного тіла зводиться до розв’язання диференціального рівняння [14]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 .$$

У просторі трансформант Фур’є температуру в точках кожного шару можна представити у вигляді лінійної комбінації двох допоміжних функцій $\eta_k(\xi) = \bar{T}_k(\xi,0)$ та $\varepsilon_k(\xi) = \frac{1}{p}\frac{d\bar{T}_k}{dz}(\xi,0)$ цього шару [8]:

$$\bar{T}_k(\xi,z) = \mathrm{ch}pz\,\eta_k + \mathrm{sh}pz\,\varepsilon_k ,$$

де $p = |\xi|$.

У роботі [15] отримано формули для обчислення допоміжних функцій кожного з шарів основи та доведено, що мають місце співвідношення:

$$\varepsilon_k = -r_k\eta_k,\; r_n = \mathrm{cth}\; p_n,\; r_k = \frac{\Delta_k S_k + r_{k+1}\left(C_k + L_k p S_k\right)}{\Delta_k C_k + r_{k+1}\left(S_k + L_k p C_k\right)},$$

$$k = \overline{1, n-1}, \qquad (2)$$

де $r_k = r_k(p)$ – функції податливості термопружної основи, $S_k = \mathrm{sh}p_k$, $C_k = \mathrm{ch}p_k$, $p_k = ph_k$, $L_k = R_k k_{Tk}$.

Оскільки $\lim\limits_{p\to\infty} r_k = 1$, то для чисельної реалізації зручно ввести модифіковані функції податливості:

$$\tilde{r}_k = 1 - r_k .$$

З урахуванням формул (2) отримуємо:

$$\tilde{r}_n = -\frac{e^{-p_n}}{S_n},\ \tilde{r}_k = \frac{\left[\Delta_k + (1-\tilde{r}_{k+1})(L_k p - 1)\right]e^{-p_k}}{\Delta_k C_k + (1-\tilde{r}_{k+1})(S_k + L_k p C_k)},$$

$$k = \overline{1, n-1} .$$

Якщо на верхній межі основи задано тепловий потік, то для розв'язання задачі II зручно ввести функції податливості $d_k = \frac{1}{r_k}$, $k = \overline{1, n}$. Враховуючи, що $\lim\limits_{p\to\infty} d_k = 1$, то для чисельної реалізації також зручно ввести модифіковані функції $\tilde{d}_k$:

$$\tilde{d}_k = 1 - d_k .$$

Вони матимуть вигляд:

$$\tilde{d}_n = \frac{e^{-p_n}}{C_n},\ \tilde{d}_k = \frac{\left[1 - L_k p - \Delta_k\left(1-\tilde{d}_{k+1}\right)\right]e^{-p_k}}{C_k + L_k p S_k + \Delta_k S_k\left(1-\tilde{d}_{k+1}\right)},$$

$$k = \overline{1, n-1} .$$

Наведемо формули, які дають змогу обчислити функції $\bar{T}_k(\xi, z)$ для будь-якого шару, якщо відома лише одна з допоміжних функцій цього шару:

$$\bar{T}_k(\xi, z) = \left(e^{-pz} + \tilde{r}_k \mathrm{sh}pz\right)\eta_k \quad \text{(задача I)}, \ (3)$$

$$\bar{T}_k(\xi, z) = \left(\tilde{d}_k \mathrm{ch}pz - e^{-pz}\right)\varepsilon_k \quad \text{(задача II)}, \ (4)$$

Представлення $\bar{T}_k(\xi, z)$ у формах (3) та (4) дає змогу спростити процес знаходження оригіналів температури:

$$T_k(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \eta_k e^{-pz} e^{-i\xi x} d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \eta_k \tilde{r}_k \,\mathrm{sh}pz\, e^{-i\xi x} d\xi , \ (5)$$

$$T_k(x, z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_k e^{-pz} e^{-i\xi x} d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_k \tilde{d}_k \,\mathrm{ch}pz\, e^{-i\xi x} d\xi .$$

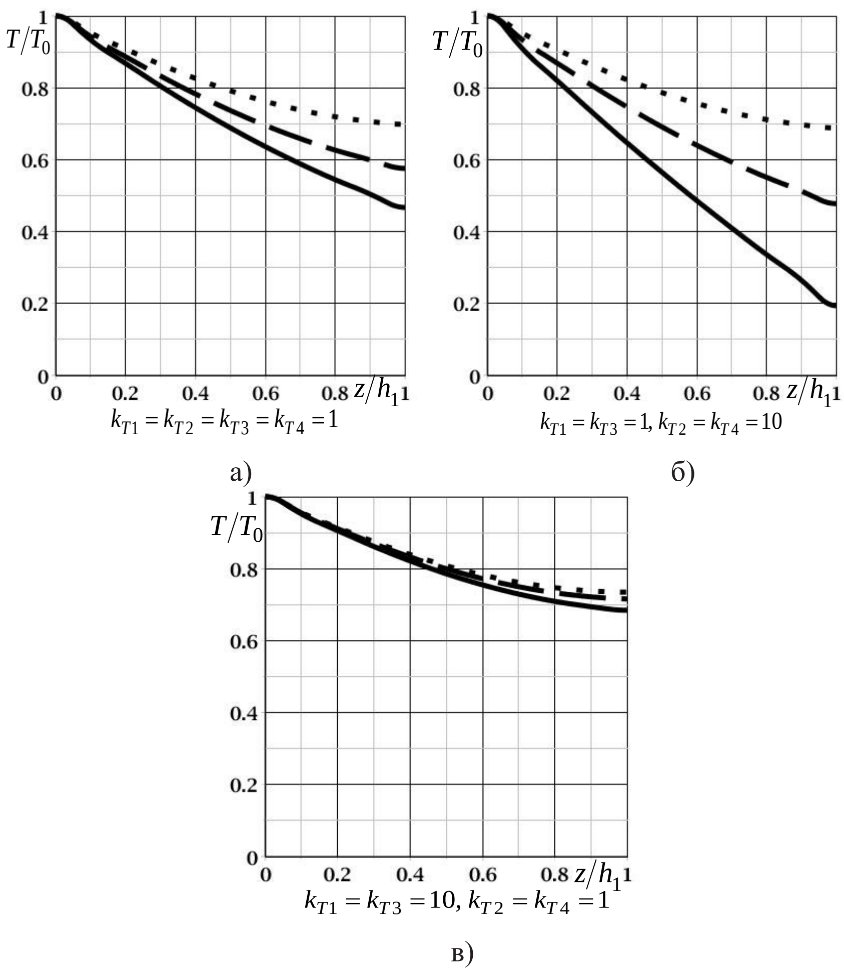

Рис. 2. Розподіл температури за товщиною першого шару (суцільна лінія – ідеальний контакт, пунктирна лінія – $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, точкова лінія – $R_1 = R_2 = R_3 = 10$)

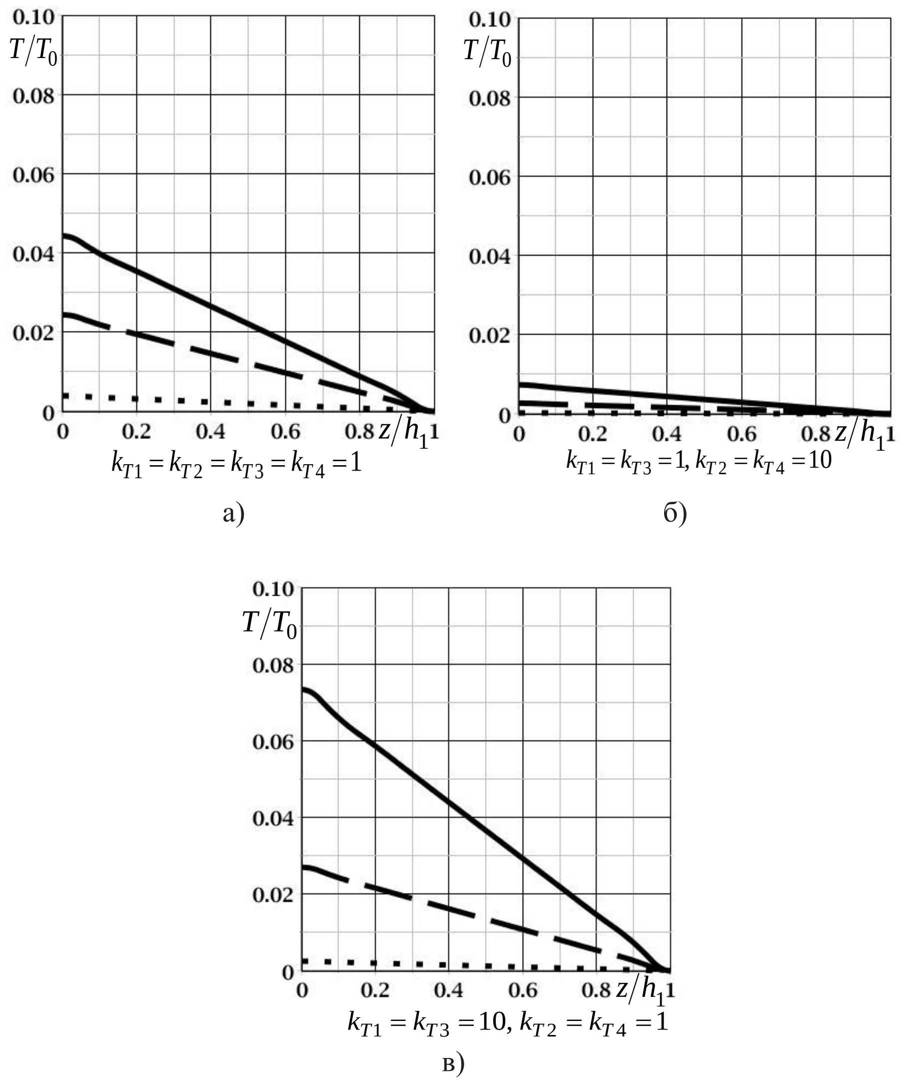

Рис. 3. Розподіл температури за товщиною четвертого шару (суцільна лінія – ідеальний контакт, пунктирна лінія – $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, точкова лінія – $R_1 = R_2 = R_3 = 10$)

Для верхнього шару основи перший доданок кожної з двох останніх формул можна обчислити точно, використовуючи спеціальні таблиці [16], а другий легко інтегрується за допомогою математичних пакетів.

Результати чисельних досліджень та висновки. Чисельні розрахунки проведено для чотиришарової основи з параметрами шарів $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$ за крайових умов

$$T_1(x,0) = \begin{cases} T_0, |x| \le 1, \\ 0, \ |x| > 1. \end{cases}$$

Для заданого типу теплового навантаження:

$$\eta_1(\xi) = \int_{-1}^{1} T_0 e^{i\xi x} dx = 2T_0 \int_0^1 \cos pxdx = \frac{2T_0 \sin p}{p}.$$

Для верхнього шару перший доданок формули (5) обчислюємо точно [16]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \eta_1 e^{-pz} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-pz} \sin p \cos(px)}{p} dp =$$

$$= \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-pz} \sin p(1-x) + \sin p(1+x)}{p} dp =$$

$$= \frac{T_0}{\pi}\left(arctg\frac{1-x}{z} + arctg\frac{1+x}{z} \right).$$

На рис. 2 (рис. 3) наведено розподіли температури за товщиною першого (четвертого) шару при x=0, які ілюструють вплив коефіцієнтів теплового опору та теплопровідності на ці розподіли.

Таким чином, можна зробити такі висновки: для розглянутих типів основ одночасне збільшення коефіцієнтів теплового опору призводить до збільшення температури в точках першого шару основи, а в четвертому шарі – до зменшення температури; найбільш суттєвий вплив коефіцієнта теплового опору для першого шару спостерігається для основи з такими значеннями коефіцієнтів теплопровідності $k_{T1} = k_{T3} = 1$, $k_{T2} = k_{T4} = 10$, а для четвертого шару – для основи з коефіцієнтами теплопровідності $k_{T1} = k_{T3} = 10$, $k_{T2} = k_{T4} = 1$.

Отже, у статті побудовано точний аналітичний розв'язок задачі теплопровідності для багатошарової основи за умови неідеального теплового контакту між її шарами. Отримані чисельні результати добре узгоджуються з фізичним сенсом. Надалі планується застосувати зазначений метод до багатошарових основ із більш істотною кількістю шарів та інших законів розподілу температури на поверхні основи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Brischetto S., Carrera E. Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates. *Composite Structures*. 2010. Vol. 92, No 8. P. 1793–1812. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.01.020.
2. Cetkovic M. Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P. 388–399. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.051.
3. Ma Ch.-Ch., Chang Sh.-W. Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multilayered media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2004. Vol. 47, No 8-9. P. 1643–1655. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.10.022.
4. Ma Ch.-Ch., Chen Y.-T. Theoretical analysis of heat conduction problems of nonhomogeneous functionally graded materials for a layer sandwiched between two half-planes. *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 221, No 3. P. 223–237. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00707-011-0498-7.
5. Vel S.S., Batra R.C. Generalized Plane Strain Thermoelastic Deformation of Laminated Anisotropic Thick Plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38, No 8. P. 1395–1414. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00108-6.
6. Zenkour A.M., Maturi D.A. Termoelastic bending response of laminated plate resting on elastic foundations. *Scientia Iranica*. 2015. Vol. 22, No 2. P. 287–298.
7. Бойко С.Б., Величко О.В. Аналітичний метод визначення теплових стаціонарних полів у шаруватих конструкціях. *Вісник ТНТУ*. 2015. Т. 77, № 1. С. 257–266.
8. Величко І.Г., Ткаченко І.Г. Плоска термопружна деформація багатошарової основи. *Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка*. 2004. Вип. 8, Т. 1, № 6. С. 154–161.
9. Беляков Н.С., Носко А.П. Неидеальный тепловой контакт тел при трении. Москва : Книжный дом «Либроком», 2010. 104 с.
10. Гера Б.В. Математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології*. 2013. Вип. 8. С. 61–72.
11. Каримбаев Т.Д., Рапилбекова Н.С. К решению задачи управления направлением тепловых потоков в сплошных средах. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2014. Т. 16, № 6. С. 263–269.
12. Приварников А.К. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований. Днепропетровск : ДГУ, 1976. 60 с.
13. Boley B.A., Weiner J.H. Theory of thermal stresses. New York-London : John Wiley and sons, 1960. 586 p.
14. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев : Вища школа, 1975. 216 с.
15. Antonenko N., Tkachenko I. Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Foundation with Nonideal Thermal Contact Between its Layers. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 486–495. DOI: http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.486.
16. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: в 3 т. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. Т. 1. 623 с.

REFERENCES

1. Brischetto S., Carrera E. (2010) Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates. *Composite Structures*, vol. 92, no. 8, pp. 1793–1812. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.01.020.
2. Cetkovic M. (2015) Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model. *Composite Structures*, vol. 125, pp. 388–399. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.051.
3. Ma Ch.-Ch., Chang Sh.-W. (2004) Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, no. 8–9, pp. 1643–1655. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.10.022.

4. Ma Ch.-Ch., Chen Y.-T. (2011) Theoretical analysis of heat conduction problems of nonhomogeneous functionally graded materials for a layer sandwiched between two half-planes. *Acta Mechanica*, vol. 221, no. 3, pp. 223–237. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00707-011-0498-7.
5. Vel S. S., Batra R. C. (2001) Generalized Plane Strain Thermoelastic Deformation of Laminated Anisotropic Thick Plates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, no. 8, pp. 1395–1414. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00108-6.
6. Zenkour A. M., Maturi D. A. (2015) Termoelastic bending response of laminated plate resting on elastic foundations. *Scientia Iranica*, vol. 22, no. 2, pp. 287–298.
7. Bojko S.B., Velychko H.V. (2015) Analitychnyj metod vyznachennja teplovykh stacionarnykh poliv u sharuvatykh konstrukcijakh [Analytical method for determining the stationary thermal fields in layered structures]. *Scientific Journal of TNTU*, vol. 77, no. 1, pp. 257–266. (in Ukrainian).
8. Velychko I.G., Tkachenko I.G. (2014) Ploska termopruzhna deformacija baghatosharovoji osnovy [Plane termoelastic deformation of multilayer foundation]. *Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series: Mechanics*, vol. 1, no. 6, pp. 154–161. (in Ukrainian).
9. Beliakov N. S., Nosko A. P. (2010) Neideal'nyy teplovoy kontakt tel pri trenii [Nonperfect thermal contact of friction bodies]. Moscow: Knizhnyy dom «Librokom». (in Russian).
10. Ghera B. (2013) Matematychne modeljuvannja umov neidealjnogho teplovogho kontaktu shariv cherez tonke vkljuchennja z dzherelamy tepla [Mathematical modelling of nonideal conditions for thermal contact of layers through thing inclusion with heat source]. *Physico-mathematical modeling and informational technologies*, vol. 8, pp. 61–72. (in Ukrainian).
11. Karimbaev T. D., Rapilbekova N. S. (2014) K resheniyu zadachi upravleniya napravleniem teplovykh potokov v sploshnykh sredakh [To problem solving of managing by thermal streams in solid structures]. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, vol. 16, no. 6, pp. 263–269. (in Russian).
12. Privarnikov A. K. (1976) Reshenie granichnykh zadach teorii uprugosti dlya mnogosloynykh osnovaniy [The solution of boundary problems of the theory of elasticity for multilayer foundations]. Dnepropetrovsk: DNU. (in Russian).
13. Boley B.A., Weiner J. H. (1960) Theory of thermal stresses. New York-London: John Wiley and sons.
14. Kovalenko A.D. (1975) Termouprugost' [Thermoelasticity]. Kiev: Vishcha shkola. (in Russian).
15. Antonenko N., Tkachenko I. (2019) Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Foundation with Non-ideal Thermal Contact Between its Layers. *Materials Science Forum*, vol. 968, pp. 486–495. DOI: http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.486.
16. Prudnikov A. P., Brychkov Iu. A., Marichev O. I. (2002) Integraly i ryady [Integrals and Series] (vol. 1). Moscow: FIZMATLIT. (in Russian).