УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-13

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПІВПРОСТОРІ З ПОКРИТТЯМ ЗА УМОВИ РУХОМОГО ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Турчин І. М.
доктор фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри механіки
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, Львів, Україна
orcid.org/0000-0003-0345-1467
ihorturchyn@gmail.com

Турчин О. Ю.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики і фізики
Національний лісотехнічний університет України
вул. Ген. Чупринки, 103, Львів, Україна
orcid.org/0000-0002-0046-3131
turchyn@nltu.edu.ua

Ключові слова: *нестаціонарна задача теплопровідності, рухоме теплове навантаження, неоднорідний півпростір, поліноми Лагерра, інтегральне перетворення Фур'є.*

Вивчення процесу поширення тепла в тілах із покриттями має застосування в багатьох інженерних дослідженнях. У багатьох випадках для більш адекватного моделювання варто враховувати нестаціонарність процесу. При побудові точних аналітичних розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності дослідників чекають значні труднощі математичного характеру, пов'язані із застосуванням інтегрального перетворення Лапласа. Особливо це стосується випадків, коли розміри одного із складових частин значно перевищують розміри інших і цей складник моделюється півбезмежним тілом, наприклад півпростором. У роботі до таких задач пропонується застосовувати новий метод – інтегральне перетворення Лагерра.

Розглянуто нестаціонарну задачу теплопровідності про нагрів масивного тіла з покриттям тепловим потоком, який рухається по поверхні покриття. На межі покриття і основи виконуються умови ідеального теплового контакту. Основа при цьому моделюється півпростором, а покриття – шаром. До рівняння нестаціонарної теплопровідності і крайових умов застосовано спочатку інтегральне перетворення Лагерра за часовою змінною, а потім інтегральне перетворення Фур'є за просторовою змінною. У результаті отримано трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь. Загальний розв'язок цієї послідовності отримано у вигляді алгебричної згортки фундаментальних розв'язків та набору сталих. Фундаментальні розв'язки трикутних послідовностей побудовано методом невизначених коефіцієнтів, а набір сталих визначено із трансформованих за Лагерром і Фур'є крайових умов та умов ідеального теплового контакту основи і покриття у вигляді рекурентних співвідношень. Зрештою, остаточний розв'язок вихідної задачі записаний у вигляді ряду за поліномами Лагерра з коефіцієнтами у вигляді інтегралів Фур'є.

Числовий експеримент проведено для півпростору з тепловими властивостями алюмінієвого стопу та покриття, виготовленого з кераміки. Виявлено фізично обґрунтовані закономірності нестаціонарного поширення тепла в неоднорідних тілах при рухомому тепловому навантаженні.

UNSTEADY HEAT CONDUCTIVITY PROBLEM FOR COATED HALF-SPACE UNDER MOVING HEAT LOAD

Turchyn I. M.
Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Professor at the Department of Mechanics
Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0003-0345-1467
ihorturchyn@gmail.com

Turchyn O. Yu.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematic and Physic
Ukrainian Forestry National University
Gen. Chuprynky str., 103, Lviv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-0046-3131
turchyn@nltu.edu.ua

Key words: *unsteady heat conductivity problem, moving heat load, inhomogeneous half-space, Laguerre polynomials, Fourier transform.*

The study of the process of heat propagation in coated bodies is used in many engineering studies. In many cases, for more adequate modeling, the nonstationarity of the process should be taken into account. When constructing accurate analytical solutions of nonstationary problems of thermal conductivity, researchers face significant mathematical difficulties associated with the application of the Laplace integral transformation. This is especially true when the size of one of the components is much larger than the size of the others and this component is modeled by a half-boundless body, such as half-space. In this paper, we propose to apply a new method – integral Laguerre transformation.

The nonstationary problem of thermal conductivity about the heating of a massive body with a covering by a heat stream, that is moving on a covering surface considers. At the boundary of the coating and the base, we have the conditions of ideal thermal contact. The basis is modeled by a half-space and a covering – a layer. The equation of nonstationary thermal conductivity and boundary conditions is applied first by the integral Laguerre transform with respect to the time variable, and then by the integral Fourier transform with respect to the spatial variable. The result is a triangular sequence of ordinary differential equations. The general solution of this sequence obtains in the form of an algebraic convolution of fundamental solutions and a set of constants. We propose to construct the fundamental solutions of triangular sequences by the method of indeterminate coefficients and to determine the set of constants from the boundary conditions transformed by Laguerre and Fourier and the conditions of ideal thermal contact of the base and coating in the form of recurrent relations. Ultimately, the final solution of the initial problem writes in the form of a series of Laguerre polynomials with coefficients in the form of Fourier integrals.

A numerical experiment for a half-space with thermal properties of aluminum alloy and a coating made of ceramics performs. Physically substantiated regularities of nonstationary heat distribution in inhomogeneous bodies under moving heat load reveals.

Вступ. Покриття як засоби захисту деталей конструкцій від високих температур та агресивних середовищ широко використовуються в сучасній інженерній практиці [1]. Математичне моделювання термічного стану в тілах із покриттями часто використовує певні спрощення, пов'язані з малою відносною товщиною покриття. Схема розв'язування задач про перенесення тепла в тілах із тонкими покриттями полягає у поданні покриття математичною поверхнею розривів параметрів температурного стану тіла. Таким чином, покриття з розгляду виключається, а його наявність моделюється деякими умовами взаємодії, тобто певною математичною залежністю між функціями температури і теплових потоків, на граничних із середовищем поверхнях.

Якщо елементи неоднорідного тіла не вдається описати за допомогою теорій пластин чи оболонок, доводиться використовувати просторові постановки [2; 3]. Традиційний підхід до побудови розв'язків задач теплопровідності шаруватих тіл і, зокрема, тіл із покриттями ґрунтується на розгляді відповідних рівнянь для кожного елемента композита з подальшим узгодженням розв'язків через умови теплового контакту.

Проте в процесі розгляду нестаціонарних задач теплопровідності вказані підходи під час застосування класичного методу інтегрального перетворення Лапласа [2; 7] приводять до значних труднощів обчислювального характеру, оскільки рівняння на визначення нулів знаменника трансформанти та його корені, що використовується під час обернення інтегрального перетворення Лапласа, залежить ще й від параметра вибраного інтегрального перетворення за просторовою змінною [7]. Особливо це стосується випадків, коли один із складових елементів композитного тіла значно перевищує їх за розмірами і тому моделюється півпростором, що приводить до появи в характеристичному рівнянні точок галуження. У таких випадках спільне числове обернення інтегрального перетворення Лапласа та інтегрального перетворення за просторовою змінною (Фур'є, Ханкеля тощо) може суттєво впливати на точність та, головне, достовірність одержаних результатів.

Метою цієї роботи є розробка ефективної аналітичної методики побудови розв'язку нестаціонарних задач теплопровідності для тіл із покриттями за змінних у часі умов нагрівання, яка ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Лагерра [4–6] і дослідження на її основі перехідних температурних полів у півпросторі із покриттям, зумовлених умовами рухомого нагрівання.

Формулювання задачі. Розглянемо шар товщиною h, що лежить на масивному тілі (моделюється півпростором) з іншими теплофізичними характеристиками. Шар із певного моменту часу починає нагріватися джерелами тепла, що рухаються по його вільній поверхні прямолінійно в додатному напрямі осі $0y$ з постійною швидкістю v. Тепловий контакт між шаром і півпростором будемо вважати ідеальним, а початкову температуру шару і півпростору – рівною нулю. Крім того, припустимо, що розміри джерела тепла в напрямі, перпендикулярному напряму руху, значно більші за товщину шару, а тому зміною температури в цьому напрямі знехтуємо (плоска задача).

Таким чином, задача полягає у відшуканні розв'язку двох рівнянь нестаціонарної теплопровідності:

$$\partial^2_{\eta\eta}T^{(i)} + \partial^2_{\zeta\zeta}T^{(i)} = \tilde{a}_i^{-1}\partial_\tau T^{(i)}, \;\; i = 1,2\,; \qquad (1)$$

при початкових:

$$T^{(i)}(\eta,\zeta,0) = 0\,, \;\; i = 1,2\,; \qquad (2)$$

крайових:

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)}\partial_\zeta T^{(1)} = -q(\eta,\tau)\,, \quad \zeta = 0\,; \qquad (3)$$

$$T^{(2)} = 0, \;\; \zeta \to \infty\,; \qquad (4)$$

та умовах спряження

$$T^{(1)} = T^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)}\partial_\zeta T^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)}\partial_\zeta T^{(2)}, \quad \zeta = 1\,, \qquad (5)$$

Тут і надалі всі функції і величини з індексом «1» належать до шару, а з індексом «2» – до півпростору, $T^{(i)}(\eta,\zeta,\tau)$ – температура, $\eta = x/h$, $\zeta = y/h$, $\tau = a_0 t/h^2$, $\tilde{a}_i = a_i/a_0$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)}/\lambda_T^{(0)}$, $\lambda_T^{(i)}$, a_i – відповідно, коефіцієнти тепло- і температуропровідності, $\tilde{l} = l/h$, l – півдовжина рухомої смуги, на якій розташовані джерела тепла, $q(\eta)$ – закон розподілу густини джерел тепла по рухомій області, $v^* = vh/a_0$ – безрозмірна швидкість, $\lambda_T^{(0)}, a_o$ – деякі розмірні величини, які вибираємо згідно із завданнями числового аналізу.

Побудова розв'язку задачі. Застосовуючи до рівнянь (1), крайових умов (3), (4) та умов спряження (5) інтегральне перетворення Фур'є за змінною η та інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ, після врахування початкових умов (2) одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$d^2_{\gamma\gamma}\bar{T}_n^{(i)} - \omega_i^2\bar{T}_n^{(i)} = \beta_i\sum_{m=0}^{n-1}\bar{T}_m^{(i)}\,, \;\; i = 1,2\,; \qquad (6)$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\zeta\,\bar{T}_n^{(1)}\Big|_{\zeta=0} = -\bar{q}_n(\xi)\,; \qquad (7)$$

$$\bar{T}_n^{(2)}\Big|_{\zeta\to\infty} = 0\,; \qquad (8)$$

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}\,; \;\; \tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\zeta\bar{T}_n^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)} d_\zeta\bar{T}_n^{(2)}, \quad \zeta = 1\,. \qquad (9)$$

 ISSN 2413-6549

У формулах (6)–(9)

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} T^{(i)}(\eta,\zeta,\tau)e^{i\xi\eta}d\eta\right]L_n(\lambda\tau)d\tau,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ – зображення за Лагерром, і Фур'є, $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра, $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \beta_i}$, $\beta_i = \lambda/\tilde{a}_i$, $\bar{q}_n(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\left[\int_{v^*\tau-\tilde{l}}^{v^*\tau+\tilde{l}} q(\eta)e^{i\xi\eta}d\eta\right]L_n(\lambda\tau)d\tau$ λ – масштабний множник.

Загальний розв'язок трикутної послідовності (6) подамо у вигляді алгебричної згортки:

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta) = \sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}^{(i)}(\xi)G_j^{(i)}(\xi,\zeta) + B_{n-j}^{(i)}(\xi)W_j^{(i)}(\xi,\zeta)\right], \quad i = 1, 2; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

де

$$G_j^{(i)}(\zeta,\omega_i) = e^{-\omega_i\zeta}\sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^i \frac{(\omega_i\zeta)^k}{k!}; W_j^{(i)}(\zeta,\omega_i) = e^{\omega_i\zeta}\sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i\zeta)^k}{k!}. \tag{11}$$

Коефіцієнти $a_{j,k}^i(\xi)$ при цьому задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$a_{j,k+1}^i = 0.5\left(a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2}\sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i\right), \tag{12}$$

де $a_{j,k}^i \equiv 0$, при $k > j$, а $a_{j,0}^i$ – довільні.

Задовольняючи умові на безмежності (8), одержимо, що

$$B_n^{(2)}(\xi) \equiv 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Покладемо $a_{0,0}^i(\xi) \equiv 1$, $a_{j,0}^i \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Тоді задовольняючи крайовій умові (7) та умовам спряження (9), одержимо трикутну послідовність систем алгебричних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} -\omega_1 & \omega_1 & 0 \\ e^{-\omega_1} & e^{\omega_1} & -e^{-\omega_2} \\ -\tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1 e^{-\omega_1} & \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1 e^{\omega_1} & \tilde{\lambda}_T^{(2)}\omega_2 e^{-\omega_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n^{(1)} \\ f_n^{(2)} \\ f_n^{(3)} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де

$$f_n^{(1)}(\xi) = -\bar{q}_n(\xi) - \sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j^{(1)}(\xi,0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j^{(1)}(\xi,0)\right];$$

$$f_n^{(2)}(\xi) = \sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j^{(2)}(\xi,1) - A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j^{(1)}(\xi,1) - B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j^{(1)}(\xi,1)\right];$$

$$f_n^{(3)}(\xi) = \sum_{j=1}^{n}\Big[\tilde{\lambda}_T^{(2)}A_{n-j}^{(2)}(\xi)\partial_\zeta G_j^{(2)}(\xi,1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)}A_{n-j}^{(1)}(\xi)\partial_\zeta G_j^{(1)}(\xi,1) - $$
$$- \tilde{\lambda}_T^{(1)}B_{n-j}^{(1)}(\xi)\partial_\zeta W_j^{(1)}(\xi,1)\Big].$$

З систем (14) невідомі $A_n^{(1)}(\xi), B_n^{(1)}(\xi), A_n^{(2)}(\xi)$ отримаємо у вигляді:

$$A_n^{(1)}(\xi) = \frac{-e^{\omega_1}\left(\tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1 + \tilde{\lambda}_T^{(2)}\omega_2\right)f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)}\omega_1\omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1\left(\tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)}\omega_2 ch(\omega_1)\right)};$$

$$B_n^{(1)}(\xi) = \frac{e^{-\omega_1}\left(\tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1 - \tilde{\lambda}_T^{(2)}\omega_2\right)f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)}\omega_1\omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1\left(\tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)}\omega_2 ch(\omega_1)\right)}; \tag{15}$$

$$A_n^{(2)}(\xi) = \frac{-\tilde{\lambda}_T^{(1)}f_n^{(1)} - \tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1 sh(\omega_1)f_n^{(2)} + ch(\omega_1)f_n^{(3)}}{e^{-\omega_2}\left(\tilde{\lambda}_T^{(1)}\omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)}\omega_2 ch(\omega_1)\right)}.$$

Легко переконатись, що знаменник у формулах (15) (визначник матриці систем (14)) не перетворюється на нуль при довільних додатних дійсних значеннях ω_1, ω_2, а тому за формулами (15) можна послідовно визначити всі невідомі $A_n^{(1)}(\xi), B_n^{(1)}(\xi), A_n^{(2)}(\xi)$.

При цьому розв'язок вихідної задачі (1) – (5) одержимо у вигляді ряду за поліномами Лагерра:

$$T^{(i)}(\eta,\zeta,\tau) = \frac{\lambda}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta)e^{-i\xi\eta}d\xi\right]L_n(\lambda\tau). \tag{16}$$

Приймемо, що густина джерел тепла є постійною. Тоді:

$$\bar{q}_n(\xi) = q^*\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\left[\int_{v^*\tau-\tilde{l}}^{v^*\tau+\tilde{l}} e^{i\xi\eta}d\eta\right]L_n(\lambda\tau)d\tau = q^*\frac{2\sin(\xi\tilde{l})}{\xi}\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-iv^*\xi)\tau}L_n(\lambda\tau)d\tau =$$

$$= q^*\frac{2\sin(\xi\tilde{l})}{\xi}\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\cos(v^*\xi\tau)L_n(\lambda\tau)d\tau + i\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\sin(v^*\xi\tau)L_n(\lambda\tau)d\tau\right) =$$

$$= q^*\frac{2\sin(\xi\tilde{l})}{\xi}\left(y_{c,n}(\xi) + iy_{s,n}(\xi)\right). \tag{17}$$

Інтеграли $y_{c,n}(\xi)$ і $y_{s,n}(\xi)$ у формулі (17) можна обчислити, проте зручніше використати те, що ці інтеграли є трансформантами за Лагерром від функцій $\cos(v^*\xi\tau)$ і $\sin(v^*\xi\tau)$ – розв'язків відповідних задач Коші:

$$\ddot{y}_c + x^2 y_c = 0; y_c(0) = 1; \dot{y}_c(0) = 0; \tag{18}$$

$$\ddot{y}_s + x^2 y_s = 0; y_s(0) = 0; \dot{y}_s(0) = x, \tag{19}$$

де $x = v^*\xi$.

Застосувавши до диференціальних рівнянь у (18) і (19) інтегральне перетворення Лагерра і врахувавши при цьому відповідні початкові умови, одержимо трикутні послідовності рівнянь:

$$\lambda^2\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)y_{c,m} + x^2 y_{c,n} = \lambda(n+1);$$

$$\lambda^2\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)y_{s,m} + x^2 y_{s,n} = x.$$

Звідси одержимо формули для визначення функцій $y_{c,n}(\xi)$ і $y_{s,n}(\xi)$:

$$y_{c,n}(\xi) = \frac{\lambda(n+1) - \lambda^2\sum_{m=0}^{n-1}(n-m+1)y_{c,m}}{\lambda^2 + (v^*\xi)^2};$$

$$y_{s,n}(\xi) = \frac{v^*\xi - \lambda^2\sum_{m=0}^{n-1}(n-m+1)y_{s,m}}{\lambda^2 + (v^*\xi)^2}$$

Числові результати. Числовий аналіз проводився для півпростору з властивостями алюмінієвого стопу $(a_2 = 11{,}9\times10^{-6}\frac{\text{м}^2}{c.}, \lambda_T^{(2)} = 36\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot K})$ та покриття, виготовленого з кераміки $(a_1 = 90{,}6\times10^{-6}\frac{\text{м}^2}{c}, \lambda_T^{(1)} = 222\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot K})$. Теплове навантаження границі покриття було задано співвідношенням:

$$q(\eta,\tau) = q^*\left[S_+\left(\eta + \eta_0 + \tilde{l} - v^*\tau\right) - S_+\left(\eta + \eta_0 - \tilde{l} - v^*\tau\right)\right],$$

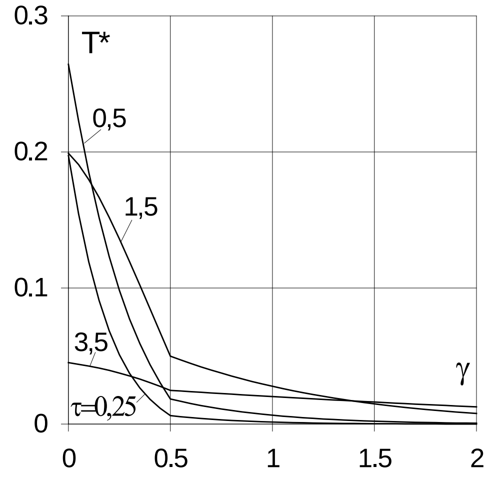

Рис. 1. Розподіл температури за глибиною композита при різних значеннях безрозмірного часу

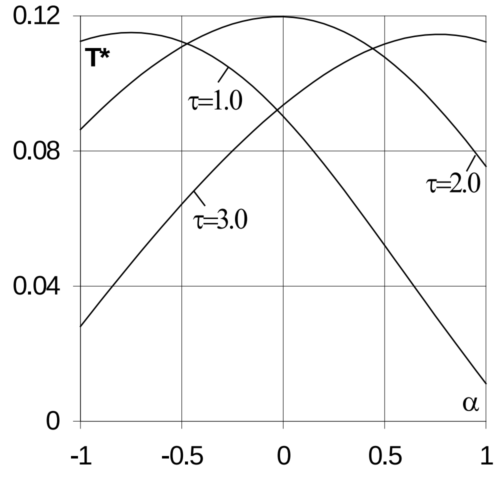

Рис. 2. Розподіл температури поверхні розділу матеріалів в різні моменти безрозмірного часу

де q^* – деяка розмірна величина, $S_+(\cdot)$ – асиметрична функція Хевісайда, η_0 – знерозмірена координата центру джерела нагрівання. При числових значеннях $\eta_0 = 2$, $v^* = 1$, $\tilde{l} = 1$ було розраховано температурне поле в композиті.

На рис. 1 показано зміну безрозмірної температури за глибиною композита при різних значеннях безрозмірного часу.

Як видно з наведених результатів, найбільшого значення температура набуває на вільній поверхні композита при наближенні до області заміру краю джерела тепла $(\tau \approx 1.0)$. У той же час на лінії розділу матеріалів максимальна температура досягається в момент часу, коли середина плями нагріву сягає області заміру $(\tau \approx 2.0)$. Цю закономірність добре видно на рис. 2, де зображено розподіл температурного поля поверхні розділу матеріалів у різні моменти безрозмірного часу.

Висновки. Таким чином, у роботі отримано точний аналітичний розв'язок плоскої нестаціонарної задачі теплопровідності для системи шар-півпростір, що нагрівається на обмеженій частині граничної поверхні рухомим тепловим потоком. Розв'язок отримано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є у вигляді ряду за поліномами Лагерра. Коефіцієнти цього ряду знаходяться з рекурентних співвідношень. Наведено результати тестового прикладу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Tamarin Y. Protective coatings for turbine blades: monograph. USA: ASM International, 2002. 248 p.
2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела : монографія. Київ : Наук. думка, 1992. 280 с.
3. Sneddon I. Fourie transforms: monograph. New York : McCraw-Hill Book Company, 1951. 542 p.
4. Galazyuk V.A., Turchyn I.M. Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions *International Applied Mechanics*. 1998. V. 34. No 9. P. 886–893.
5. Turchin I.M. Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2012. Vol. 85. Iss. 6. P. 1453–1462.
6. Turchin I.M., Timar I., Kolodiy Yu.O. Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015. Vol. 88. Iss. 5. P. 1135–1144.

REFERENCES

1. Tamarin Y. (2002). Protective coatings for turbine blades. ASM International, USA.
2. Kolyano Yu. M. (1992). Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela. [Methods of thermal conductivity and thermoelasticity of an inhomogeneous body]. Kiev: Naukova Dumka. (In Russian)
3. Sneddon I. (1951). Fourier transforms. McCraw-Hill Book Company. New York.

4. Galazyuk V.A. & Turchin I.M. (1998). Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. *International Applied Mechanics*, Volume 34, No 9, pp. 886–893.
5. Turchin I.M. (2012). Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Volume 85, Issue 6, pp. 1453–1462.
6. Turchin I.M., Timar I. & Kolodiy Yu.O. (2015). Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Volume 88, Issue 5, pp. 1135–1144.