УДК 004.942: 519.6
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-14

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕНЕРАЦІЇ НЕРІВНОМІРНИХ СТРУКТУРОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ДВОВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Халанчук Л. В.
асистент кафедри вищої математики і фізики
Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного
пр. Богдана Хмельницького, 18, Мелітополь, Запорізька обл., Україна
orcid.org/0000-0002-6055-6233
larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

Чопоров С. В.
доктор технічних наук, доцент,
професор кафедри програмної інженерії
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-5932-952X
s.choporoff@znu.edu.ua

Ключові слова:
структурована сітка, згущення сітки, контрольні функції, ортогональність сітки.

Під час розв'язання прикладних задач математичне моделювання процесів у різних конструкціях має певні труднощі через складність геометричної форми досліджуваної області, що враховує велику кількість компонентів і зв'язків між ними. Дискретна модель геометричного об'єкта замінює вихідну неперервну область кінцевим набором простих фігур. Розробка методів створення дискретних моделей, кінцеві елементи яких згущуються в місцях концентрації напружень і в місцях, де конструкція має особливу форму, є актуальною задачею, наприклад, для вивчення міцності та довговічності інженерних конструкцій, що є важливою складовою частиною сучасних технологій. Дослідження згущення було проведено на структурованих сітках. У статті розглянуто алгебраїчні та диференціальні методи побудови структурованих дискретних моделей, досліджено їхні недоліки та переваги. Розроблено математичний апарат для побудови структурованих сіток із заданими параметрами згущення вузлів сітки. Досліджено вплив параметрів контрольних функцій на згущення вузлів сітки і геометричні характеристики в структурованій сітці. Визначено, що алгебраїчні методи забезпечують швидку побудову сітки, контроль густоти і нахилу координатних ліній за допомогою перехідних коефіцієнтів у формулах трансфінітної інтерполяції. Для диференціального методу з використанням еліптичного рівняння Пуассона досліджено вплив параметрів контрольних функцій на якість побудованої сітки, а саме її ортогональність. Для розв'язання рівняння Пуассона було написано код програми, де застосовано різницеві схеми і метод Зейделя. У статті також наведено фрагмент коду програми побудови згущення для сітки по вертикальних та горизонтальних лініях, що була реалізована у вільно поширюваному пакеті програм Scilab. Значення максимального кута кожного елемента досліджено на прикладі сітки з двома колами у тому випадку, коли значення параметрів для одного кола будуть дорівнювати параметрам іншого. Встановлено, що якість сітки (її ортогональність) краща, якщо збільшити значення другого параметра досліджуваних функцій управління.

RESEARCH OF NON-UNIFORM STRUCTURED DISCRETE MODELS GENERATION FOR TWO-DIMENSIONAL DOMAINS

Khalanchuk L. V.
Assistant at the Department of Higher Mathematics and Physics
Dmytro Motornyi Tavria State Agrotechnological University
B. Khmelnytsky Ave, 18, Melitopol, Zaporizhia region, Ukraine
orcid.org/0000-0002-6055-6233
larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

Choporov S. V.
Doctor of Technical Sciences, Associate Professor,
Professor at the Department of Software Engineering
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-5932-952X
s.choporoff@znu.edu.ua

Key words: *structured grid, grid thickening, control functions, grid orthogonality.*

Mathematical modeling of processes in different constructions has certain difficulties due to the complexity of the geometric shape of the respective areas. A discrete model of a geometric object replaces the original continuous domain with a finite set of simple figures. The development of methods for generating discrete models, the finite elements of which condense in places of stress concentration and in places where the structure has a special shape, is relevant, for example, to study the strength and durability of engineering structures, which is an important component of modern technology. The article considers algebraic and differential methods of constructing structured discrete models, their disadvantages and advantages. A mathematical apparatus for constructing structured grids with given parameters of grid node thickening has been developed. The influence of the parameters of control functions on the thickening of the grid nodes and geometrical characteristics in the structured grid is investigated. It is determined that algebraic methods provide fast grid construction, control of density and inclination of coordinate lines by means of transition coefficients in transfinite interpolation formulas. Differential methods based on elliptic and parabolic equations give smooth internal coordinate lines, so it is possible to build orthogonal lines and condensed lines. The influence of the parameters of the control functions of the elliptic method on the quality of the constructed grid, namely its orthogonality, is investigated. The article also presents a fragment of the code of the program for constructing condensation for the grid on vertical and horizontal lines, which was implemented in a freely distributed software package Scilab. The value of the maximum angle of each element was measured on the example of a grid with two circles in the case when the values of the parameters for one circle will be equal to the parameters of the other. It is found that the quality of the grid (its orthogonality) is better if you increase the value of the second parameter of the control functions.

Постановка проблеми. Нині в інженерних додатках одне із провідних місць займають дослідження, які виконуються із застосуванням комп'ютерного моделювання різноманітних реальних процесів, оскільки комп'ютерне моделювання за своїми витратами в багато разів економічно вигідніше, ніж побудова фізичної моделі. Сучасні проекти мають дедалі складніший характер, оскільки використовують конструкції, що складаються з досить великої кількості компонентів і зв'язків між ними. Математичне моделювання процесів у таких конструкціях має певні труднощі, пов'язані зі складністю геометричної форми відповідних областей.

Дискретною моделлю геометричного об'єкта (сіткою) називають множину точок, що розподілені в досліджуваній області, разом зі зв'язками між цими точками (вузлами). Дискретна модель геометричного об'єкта замінює вихідну неперервну область скінченною множиною простих фігур [1]. Розрізняють структуровані та неструктуровані сітки. Неструктуровані сітки визначаються звичайним набором вузлів. Логічний зв'язок між вузлами сітки визначається довільним чином, тобто кожен вузол може мати довільну кількість «сусідів». На відміну від неструктурованої сітки, в структурованій всі внутрішні вершини топологічно еквівалентні між собою. Наприклад, чотирикутні структуровані сітки топологічно еквівалентні стандартним прямокутним сіткам.

Розробка методів генерації дискретних моделей, скінченні елементи яких згущуються в місцях концентрації напруг і в місцях, де конструкція має особливу форму, є актуальною, наприклад, для дослідження міцності та витривалості інженерних конструкцій, що є важливою складовою часиною сучасної техніки.

Огляд актуальних підходів і методів автоматичної генерації структурованих сіток (дискретних моделей геометричних об'єктів) наведено в роботі [2]. Дослідження генерації сіток алгебраїчними методами, контроль густоти і нахилу координатних ліній за допомогою перехідних коефіцієнтів у формулах трансфінітної інтерполяції проведено в роботах [3; 4]. Контроль густоти по координатним лініям за допомогою алгебраїчного методу через введення проміжної системи координат наведено в роботі [5].

Згущення вузлів сіток по координатним лініям сітки (вертикальним і горизонтальним) та до певного вузла за допомогою диференціального методу розглянуто в праці колективу авторів [5]. Вплив контрольних функцій і форми границі області на розподіл вузлів сітки, що генерується еліптичним методом через розв'язання рівняння Бельтрамі, досліджено в роботах О.В. Трофимова, Ю.В. Петрової, В.Д. Лісейкіна [6; 7].

Дослідження згущення вузлів сітки через контрольні функції, що задавали області діагональних ліній, круга, синусоїди за допомогою рівняння Ейлера, що застосовується в задачах газової динаміки, показано в статті [8]. Застосування контрольних функцій як фільтра згущення сітки використовується для глобальних кліматичних моделей у статті [9].

Метою статті є аналіз актуального стану проблеми керування згущенням сітки під час автоматичної побудови структурованих дискретних моделей (сіток) геометричних об'єктів.

Об'єкт дослідження – структуровані сітки для геометричних моделей.

Предмет дослідження – методи керування згущенням структурованих сіток геометричних моделей.

Виклад основного матеріалу дослідження. У структурованих сітках алгоритм нумерації вузлів і визначення комірок, узгоджених із межею, доволі простий. Конструкція таких сіток дає змогу легко збільшувати кількість вузлів для оцінки збіжності, похибки і для підвищення точності чисельних методів розв'язку крайових задач.

Основними методами побудови структурованих сіток є:

– алгебраїчні, що використовують різні види інтерполяцій або спеціальні функції;

– диференціальні, що визначаються розв'язком еліптичних, параболічних і гіперболічних рівнянь;

– варіаційні, що основані на розв'язку задач оптимізації.

Алгебраїчні методи забезпечують швидку побудову сітки, контроль густоти і нахилу координатних ліній за допомогою перехідних коефіцієнтів у формулах трансфінітної інтерполяції. Для трансфінітної інтерполяції використовуються поліноми. Проте в складних областях алгебраїчні методи можуть не давати потрібний результат: елементи можуть мати кути, близькі до 180° (рис. 1). Тому алгебраїчні методи найчастіше використовують як початкове наближення при використанні ітераційних алгоритмів.

Для криволінійної розрахункової області в процесі побудови сітки використовують перетворення координат, що дає змогу криволінійну фізичну область у системі координат (x, y) перевести до прямокутної розрахункової області в системі (ξ, η). Зв'язок між фізичною та розрахунковою областями визначається залежностями:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \tag{1}$$

Для контролю згущення сітки в заданій області можна використати проміжну систему координат. Наприклад, для проміжної системи координат (s,t) можна використати функцію розтягу, що має вигляд:

$$s = P\xi + (1 - P)\left[1 - \frac{\operatorname{th}\left[Q(1-\xi)\right]}{\operatorname{th}Q}\right], \qquad (2)$$

де P і Q – параметри, що забезпечують контроль розподілу точок сітки [5]. Керувати розподіленням вузлів сітки можна, наприклад, при постійному значенні одного параметру $Q = 2$ та різних значеннях іншого $P = 0{,}1$ – згущення відбувається ліворуч (Рис. 2а), $P = 1$ – сітка рівномірна (Рис. 2б), $P = 1{,}9$ – згущення відбувається праворуч (Рис. 2в). У формулі (2) при $P = 1$ сітка буде рівномірною, а параметр Q вже не має впливу.

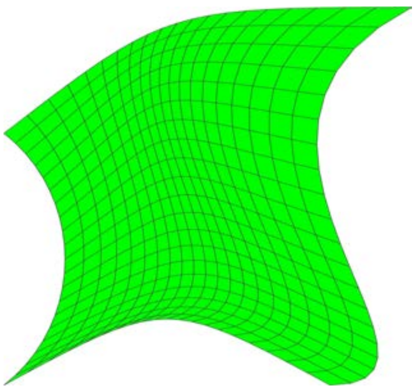


Рис. 1. Елементи сітки мають кути, що близькі до розгорнутих

Диференціальні методи на основі еліптичних і параболічних рівнянь дають гладкі внутрішні координатні лінії, тому є змога будувати ортогональні лінії та лінії, що згущуються. Гіперболічні рівняння дають змогу будувати ортогональну систему, але не завжди їх можна застосовувати для областей, наприклад, які мають задані граничні умови. Отже, такі методи використовують для областей, що не вимагають спеціально заданого розподілу вузлів сітки.

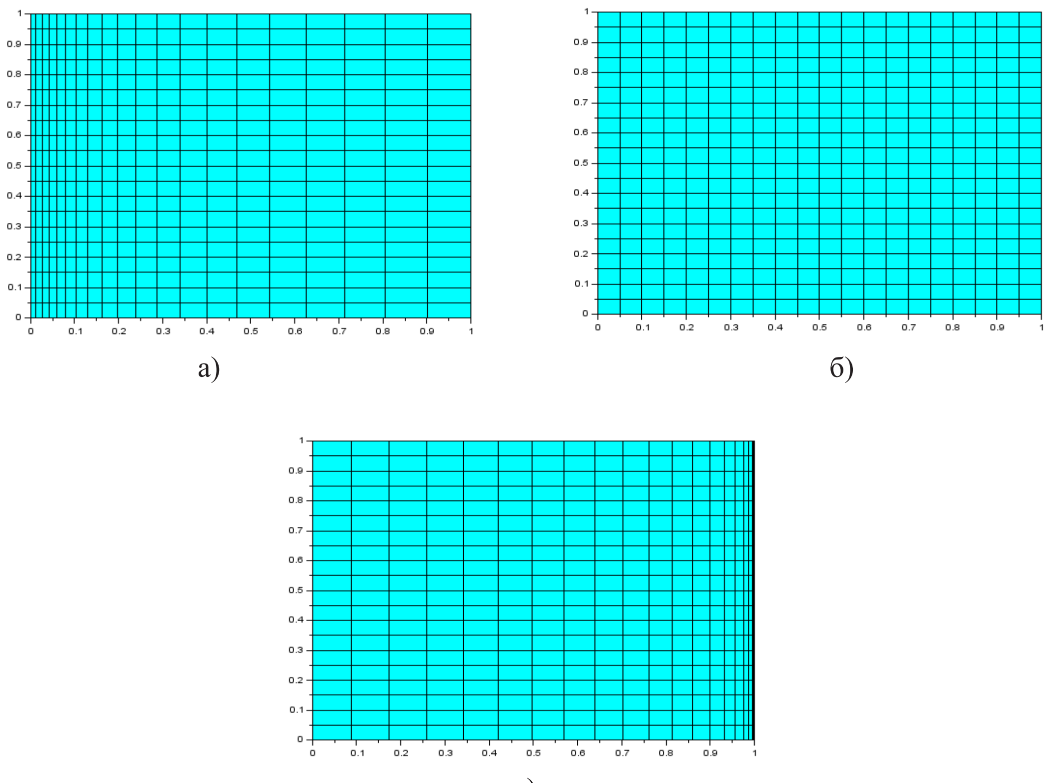
Розглянемо диференціальний метод на прикладі еліптичного рівняння. У найпростішому узагальненому вигляді, з урахуванням перетворення з фізичної до розрахункової області координат (1), маємо рівняння Лапласа для генерації структурованої сітки:

$$\begin{cases} \nabla^2 \xi = 0, \\ \nabla^2 \eta = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Рівняння (3) дозволяють отримати рівномірну сітку, а для отримання згущення сітки в потрібних областях використовують контрольні функції $P(\xi,\eta)$, $Q(\xi,\eta)$ і рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 \xi = P(\xi,\eta), \quad \nabla^2 \eta = Q(\xi,\eta), \qquad (4)$$

Оскільки лінії сітки задають в просторі (ξ,η), необхідно отримати залежності



а)

б)

в)

Рис. 2. Керування згущенням сітки

$x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$, тому залежні і незалежні змінні в рівнянні (4) необхідно поміняти місцями.

Розв'язок системи (4) в розрахунковій області системи координат (ξ,η) отримує вигляд:

$$\begin{cases} g_{22}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} - 2g_{12}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta} + g_{11}\dfrac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} + g\left(\mathrm{P}(\xi,\eta)\dfrac{\partial x}{\partial\xi} + \mathrm{Q}(\xi,\eta)\dfrac{\partial x}{\partial\eta}\right) = 0, \\ g_{22}\dfrac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} - 2g_{12}\dfrac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta} + g_{11}\dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta^2} + g\left(\mathrm{P}(\xi,\eta)\dfrac{\partial y}{\partial\xi} + \mathrm{Q}(\xi,\eta)\dfrac{\partial y}{\partial\eta}\right) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

де

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2,\ g_{12} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta},$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2,\ g = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 \tag{6}$$

У загальному випадку рівняння (5) є нелінійними, оскільки коефіцієнти залежать від невідомих величин, тому систему рівнянь (5) розв'язують із використанням чисельних методів, наприклад, різницевих схем.

Контрольні функції, наприклад, можуть бути задані формулами:

$$P(\xi,\eta) = -\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{(\xi-\xi_n)}{|\xi-\xi_n|} e^{-c_n|\xi-\xi_n|} - \sum_{i=1}^{I} b_i \frac{(\xi-\xi_i)}{|\xi-\xi_i|} e^{-d_i\sqrt{\left[(\xi-\xi_i)^2+(\eta-\eta_i)^2\right]}}, \tag{7}$$

$$Q(\xi,\eta) = -\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{(\eta-\eta_n)}{|\eta-\eta_n|} e^{-c_n|\eta-\eta_n|} - \sum_{i=1}^{I} b_i \frac{(\eta-\eta_i)}{|\eta-\eta_i|} e^{-d_i\sqrt{\left[(\xi-\xi_i)^2+(\eta-\eta_i)^2\right]}}, \tag{8}$$

де N – кількість ліній (координатних ліній $\xi = \xi_n$ та $\eta = \eta_n$), а I – кількість точок (із координатами $\xi = \xi_i$ та $\eta = \eta_i$), біля яких сітка має згущуватися, коефіцієнти a_n, c_n, b_i, d_i – додатні параметри.

Перший член в (7) приводить до суміщення ліній $\xi = const$ до лінії $\xi = \xi_n$, а перший член в (8) приводить до суміщення ліній $\eta = const$ до лінії $\eta = \eta_n$.

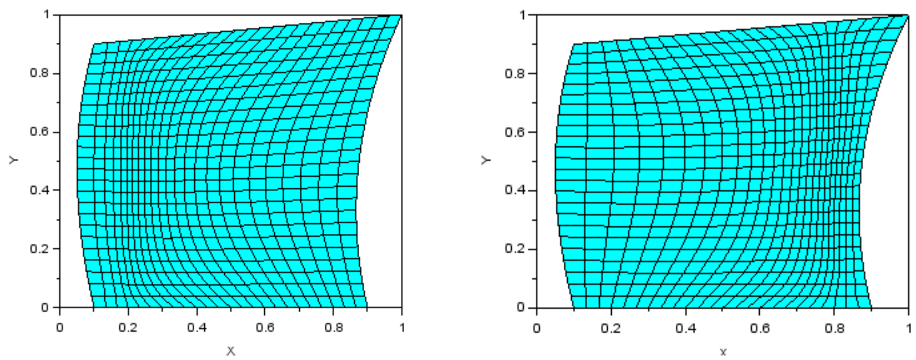
Другі члени в формулах (7)–(8) призводять до згущення ліній сітки $\xi = const$ та $\eta = const$ біля точки (ξ_i, η_i) [5].

Якщо згущення необхідно провести тільки по вертикальних лініях, то у формулах (7)–(8) другі параметри будуть відсутні, тобто $b_i = 0$, $d_i = 0$, взагалі $Q(\xi,\eta) = 0$, змінюючи параметри, що залишились, можна зміщувати згущення в лівій, наприклад, при $\xi = 0.2$ (рис. 3а), чи правій, наприклад, при $\xi = 0.8$ (рис. 3б), частинах області.

Якщо згущення необхідно провести тільки по горизонтальних лініях, то у формулах (7)–(8) другі параметри будуть відсутні, тобто $b_i = 0$, $d_i = 0$, взагалі $P(\xi,\eta) = 0$, змінюючи параметри, що залишились, можна зміщувати згущення в нижній, наприклад, при $\eta = 0.2$ (рис. 4а), чи верхній, наприклад, при $\eta = 0.7$ (рис. 4б), частинах області.

Наведемо фрагмент коду програми побудови згущення для сітки по вертикальних та горизонтальних лініях, що була реалізована в пакеті програм Scilab:

```
for i=2 : n-1
for j=2 : n-1
g11 = ((X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) ^ 2 + (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) ^ 2) / 4;
g12 = (X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) * (X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) / 4 + (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) * (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) / 4;
g22 = ((X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) ^ 2 + (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) ^ 2) / 4;
g = (((X(i+1,j) - X(i-1,j))*(Y(i,j+1) - Y(i,j-1)) - (Y(i+1,j) - Y(i-1,j)) * (X(i,j+1) - X(i,j-1))) / 4)^2;
P1 = -axn * sign((i-1)/(n-1)-x01) * exp(-cxn * abs((i-1)/(n-1)-x01));
Q1 = -ayn * sign((j-1)/(n-1)-y01) * exp(-cyn * abs((j-1)/(n-1)-y01));
X1(i,j) = (g22 * (X1(i-1,j) + X1(i+1,j)) - g12 * (X1(i+1,j+1) - X1(i+1,j-1) - X1(i-1,j+1) + X1(i-1,j-1)) / 2 + g11 * (X1(i,j-1) + X1(i,j+1)) + g * (P1 * (X1(i+1,j) - X1(i-1,j)) / (2*dx ) + Q1 * (X1(i,j+1) - X1(i,j-1)) / (2 * dy))) / (2 * g11 + 2 * g22);
Y1(i,j) = (g22 * (Y1(i-1,j) + Y1(i+1,j)) - g12 * (Y1(i+1,j+1) - Y1(i+1,j-1) - Y1(i-1,j+1) + Y1(i-1,j-1)) / 2 + g11 * (Y1(i,j-1) + Y1(i,j+1))+ g * (P1 * (Y1(i+1,j) - Y1(i-1,j)) / (2*dx ) + Q1 * (Y1(i,j+1) - Y1(i,j-1)) / (2 * dy))) / (2 * g11 + 2 * g22);
end
end
```



а) б)

Рис. 3. Згущення сітки в лівій і правій частинах області

Символьне позначення в наведеному коді максимально наближене до тих позначень, що наведено у формулах (5)–(8), з урахуванням використання методу скінченних різниць (центральні різниці) для наближеної заміни похідних функцій. Спочатку обчислюються значення g_{11}, g_{12}, g_{22}, g за формулами (6), далі $P(\xi,\eta)$, $Q(\xi,\eta)$ за формулами (7)-(8) з використанням тільки частини, що відповідає згущенню для горизонтальних та вертикальних ліній. Наостанок обчислюються значення координат $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$ фізичної області, що були виведені з використанням формул системи (5).

Для контролю згущення, наприклад, у формі кіл можна скористатися такими формулами контрольних функцій:

$$P(\xi,\eta) = -\sum_{n=1}^{N} a_n sign(\xi) e^{-c_n\left(|\xi-\xi_0|-\sqrt{R^2-(\eta-\eta_0)^2}\right)}, \quad (9)$$

$$Q(\xi,\eta) = -\sum_{n=1}^{N} b_n sign(\eta) e^{-d_n\left(|\eta-\eta_0|-\sqrt{R^2-(\xi-\xi_0)^2}\right)}, \quad (10)$$

де N – кількість кіл (координати відповідних центрів та (ξ_0,η_0)), до яких сітка має згущуватися, коефіцієнти a_n, c_n, b_n, d_n – додатні параметри. Приклади побудови таких кіл показано на рис. 5 (а) – одне коло, б), в) – 2 кола).

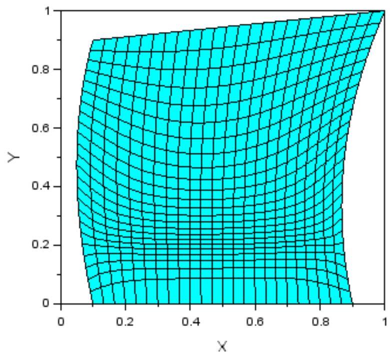
Проте інтерес представляє вплив параметрів a_n, b_n, c_n, d_n контрольних функцій на якість сітки. Одним із показників якості сітки є її ортогональність (кути комірок сітки мали бути близькими до прямих). Відомо, що еліптичні методи забезпечують ортогональність ліній сітки [1; 2].

Дослідимо значення максимального кута кожного елемента на прикладі сітки з двома колами (рис. 5в). Розглянемо випадок, коли значення параметрів для одного кола будуть, відповідно, дорівнювати параметрам іншого.

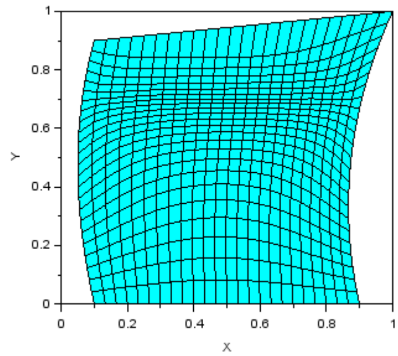
Якщо перший параметр залишити незмінним $a_n = b_n = 3$, а для другого параметру розглянути 2 випадки ($c_n = d_n = 40$ і $c_n = d_n = 20$), то побачимо, що максимальне значення найбільшого кута елемента в першому випадку дорівнює $147,7°$, дає менший результат порівняно з другим випадком $157,6°$. Отже, якість першої сітки (її ортогональність) є кращою за якість другої сітки. Це означає, що більше значення другого параметра дає кращу якість сітки.

Отже, досліджено вплив параметрів контрольних функцій на якість сітки. Виміряно значення максимального кута кожного елемента на прикладі сітки з двома колами (рис. 5в), якщо значення параметрів для одного кола будуть, відповідно, дорівнювати параметрам іншого. Виявлено, що якість сітки (її ортогональність) є кращою, якщо збільшити значення другого параметра c_n, d_n.

Було використано формули згущення вузлів сіток по координатних лініях сітки за допомогою

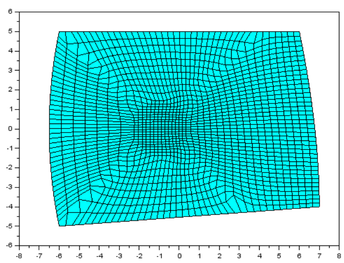


а)

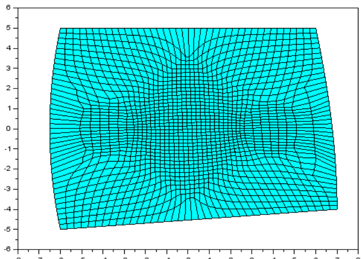


б)

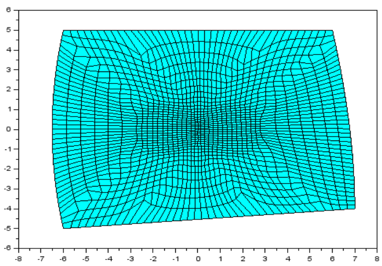
Рис. 4. Згущення сітки в нижній (а) і верхній (б) частинах області



а)



б)



в)

Рис. 5. Згущення сітки до заданих кіл

алгебраїчного (2) та диференціального (7)–(8) методу, що розглянуто в праці [5], та підтверджено їх вплив на згущення по горизонтальних та вертикальних лініях (рис. 2, 3, 4).

Висновки. У роботі було розглянуто методи побудови структурованих дискретних моделей, їх недоліки і переваги. Особлива увага була приділена дослідженню впливу контрольних функцій на керування сіткою.

Було показано на прикладах алгебраїчних методів можливості згущення сітки праворуч чи ліворуч.

Для диференціального методу (еліптичного) розглядалися контрольні функції, за допомогою яких можна виконати згущення до горизонтальних чи вертикальних координатних ліній, досліджено вплив параметрів цих контрольних функцій на згущення. Було досліджено вплив параметрів контрольних функцій, за допомогою яких можна побудувати одне, два чи більше кіл, еліптичного методу на якість побудованої сітки, а саме її ортогональність. Дослідження супроводжувалось візуалізацією отриманих результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Чопоров С.В., Гоменюк С.І., Алатамнех Х.Х., Оспіщев К.С. Методи побудови дискретних моделей: структуровані та блочно-структуровані сітки. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2016. № 1. С. 272–284.
2. Халанчук Л.В., Чопоров С.В. Огляд методів генерації дискретних моделей геометричних об’єктів. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2018. № 1. С. 139–152.
3. Яцук Ю.В. Построение расчетных сеток для решения уравнений математической физики методом «объемов Безье». *Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология.* 2009. № 1. С. 116–120.
4. Mahariq I., Erciyas A. A spectral element method for the solution of magnetostatic fields. *Turkish journal of electrical engineering and computer sciences.* 2017. Vol. 25, No 4, pp. 2922–2932.
5. Молчанов А.М., Щербаков М.А., Янышев Д.С., Куприков М.Ю., Быков Л.В. Построение сеток в задачах авиационной и космической техники : учеб. пособие. Москва : МАИ, 2013. 260 с.
6. Трофимов О.В., Петрова Ю.В. Многосеточные итерационные алгоритмы построения сеток для упругих и упругопластических слоистых пакетов. *Системи та технології*. 2015. № 2 (54). С. 69–80.
7. Liseikin V.D. A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation. N.-Y.: Springer, 2007. 293 p.
8. Вальгер С.А., Федорова Н.Н. Применение алгоритма к адаптации расчетной сетки к решению уравнений Эйлера. *Вычислительные технологии*. 2012. Т. 17, № 3. С. 24–33.
9. Surcel D., Laprise R. A General Filter for Stretched-Grid Models: Application in Cartesian Geometry. *Monthly weather review*. 2011. Vol. 139, pp. 1637–1653.

REFERENCES

1. Choporov S. V., Homeniuk S. I., Alatamnekh Kh. Kh., Ospishchev K. S. (2016) Metody pobudovy dyskretnykh modelei: strukturovani ta blochno-strukturovani sitky [Discrete models generation methods: structured and block-structured grids]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, no. 1, pp. 272–284.
2. Khalanchuk L.V., Choporov S.V. (2018) Ohliad metodiv heneratsii dyskretnykh modelei heometrychnykh obiektiv [Review of discrete models of geometric objects generation methods]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, no. 1, pp. 139–152.
3. Yatsuk Yu. V. (2009) Postroenie raschetnykh setok dlya resheniya uravneniy matematicheskoy fiziki metodom “objemov Bez'e” [Construction of computational grids for solving equations of mathematical physics by the method of “Bezier volumes”]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Morskaya tekhnika i tekhnologiya,* no. 1, pp. 116–120.
4. Mahariq I., Erciyas A. (2017) A spectral element method for the solution of magnetostatic fields. *Turkish journal of electrical engineering and computer sciences,* vol. 25, no. 4, pp. 2922–2932.
5. Molchanov A. M., Shcherbakov M. A., Yanyshev D. S., Kuprikov M. Yu., Bykov L. V. (2013) *Postroenie setok v zadachakh aviatsionnoy i kosmicheskoy tekhniki*: ucheb. posobie [Meshing in problems of aviation and space technology]. MAI. Moskva. (in Russian)
6. Trofimov O. V., Petrova Yu. V. (2015) Mnogosetochnye iteratsionnye algoritmy postroeniya setok dlya uprugikh i uprugoplasticheskikh sloistykh paketov [Multigrid iterative mesh generation algorithms for elastic and elastoplastic layered packets]. *Systemy ta tekhnolohii*, no. 2 (54), pp. 69–80.
7. Liseikin V. D. (2007) *A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation*. N.-Y.: Springer.
8. Val'ger S.A., Fedorova N. N. (2012) Primenenie algoritma k adaptatsii raschetnoy setki k resheniyu uravneniy Eylera [Application of the algorithm to adapting the computational grid to solving the Euler equations]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 17, no. 3, pp. 24–33.
9. Surcel D., Laprise R. (2011) A General Filter for Stretched-Grid Models: Application in Cartesian Geometry. *Monthly weather review*, vol. 139, pp. 1637–1653.