

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-15>

## ПРО ВЗАЄМОДІЮ ВІДКРИТОЇ ТА ЗАКРИТОЇ ТРІЩИН МІЖ ДВОМА МАТЕРІАЛАМИ

**Шевельова А. Є.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна 72, Дніпро, Україна  
[orcid.org/0000-0001-6688-0942](https://orcid.org/0000-0001-6688-0942)  
[allasheveleva@i.ua](mailto:allasheveleva@i.ua)*

**Сіліч-Балгабаєва В. Б.**

*кандидат технічних наук, старший науковий співробітник,  
заступник начальника науково-дослідної частини  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна 72, Дніпро, Україна  
[orcid.org/0000-0002-9490-3600](https://orcid.org/0000-0002-9490-3600)  
[v\\_silichbalgabaieva@ukr.net](mailto:v_silichbalgabaieva@ukr.net)*

**Костенко М. В.**

*аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна 72, Дніпро, Україна  
[orcid.org/0000-0002-1644-7857](https://orcid.org/0000-0002-1644-7857)  
[neutralunit1187@gmail.com](mailto:neutralunit1187@gmail.com)*

**Лобода В. В.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна 72, Дніпро, Україна  
[orcid.org/0000-0002-0432-629X](https://orcid.org/0000-0002-0432-629X)  
[loboda@dnu.dp.ua](mailto:loboda@dnu.dp.ua)*

**Ключові слова:** тріщина,  
біматеріал, задача  
лінійного спряження.

Розглядається відкрита та закрита тріщини між двома ізотропними півплощинами під дією комбінованого навантаження на нескінченості. Така ситуація може мати місце за наявності в області тріщини спеціальних мастильних матеріалів. Вважається, що береги відкритої тріщини не взаємодіють між собою, а закритої – знаходяться в умовах гладкого контакту. Для розв'язання задачі використані представлення напружень та похідних від стрибків переміщень через кусково-аналітичну функцію, що одержані раніше. Сформульована комбінована крайова задача Діріхле-Рімана з областями розривів невідомої функції, що збігаються з відрізкамі розташування тріщин. Виписаний точний аналітичний розв'язок цієї задачі, який задовольняє умовам на нескінченості та умовам однозначності переміщень при обході контурів тріщин. Знайдені досить прості вирази для напружень на межі поділу матеріалів поза тріщинами, а також для похідних

від стрибків переміщень берегів тріщин. Обчислені коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкість звільнення енергії для вершин тріщин, які визначають можливість їх розвитку. Показано, що має місце осцилююча коренева особливість у вершинах відкритої тріщини і звичайна коренева особливість у вершинах закритої тріщини. Окремо отримано досить простий розв'язок подібної задачі для випадку тільки однієї відкритої тріщини на межі поділу матеріалів, який використано для оцінки достовірності розв'язку основної задачі шляхом його порівняння для випадку, коли тріщини знаходяться на значному віддаленні між собою. Показано, що у цьому випадку основні характеристики відкритої тріщини для основної і допоміжної задачі дуже добре узгоджуються. Побудовано також розв'язок задачі про взаємодію відкритої і закритої міжфазних тріщин для випадку тіла скінчених розмірів з використанням студентської версії скінченно-елементного пакету ABAQUS. За умови, що розмір тріщин набагато менший за характерний розмір тіла, проведено порівняння аналітичних і чисельних результатів та отримана їх гарна узгодженість.

---

## ON THE INTERACTION OF AN OPEN AND CLOSED CRACKS BETWEEN TWO MATERIALS

**Sheveleva A. E.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Professor at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Cybernetics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarina Ave., 72, Dnipro, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-6688-0942  
allasheveleva@i.ua*

**Silich-Balgabaieva V. B.**

*Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher,  
Deputy Chief of Research  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarina Ave., 72, Dnipro, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-9490-3600  
v\_silichbalgabaieva@ukr.net*

**Kostenko M. V.**

*Postgraduate Student at the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarina Ave., 72, Dnipro, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-1644-7857  
neutralunit1187@gmail.com*

**Loboda V. V.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Head of the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarina Ave., 72, Dnipro, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-0432-629X  
loboda@dnu.dp.ua*

**Key words:** crack, bi-material, linear conjugation problem.

The open and closed cracks between two isotropic half-planes under the action of combined load at infinity are considered. It is assumed that the faces of the open crack do not interact with each other, and the closed ones are in smooth contact. The latter situation may occur in the presence of special lubricants in the crack region. To solve this problem, the previously obtained representations of stresses and derivatives of jump jumps via a piecewise analytic function are applied. Using the conditions at the interface of the materials, these representations made it possible to formulate a combined Dirichlet-Riemann boundary-value problem with areas of discontinuities of unknown function coinciding with the segments of the crack location. An exact analytical solution of this problem is written, which satisfies the conditions at infinity and the conditions of uniqueness of displacements when bypassing the cracks. Based on this solution, quite simple expressions were found for the stresses at the materials interface beyond the cracks, as well as for the derivatives of the of displacements jumps of the crack faces. The stress intensity factors and the energy release rate for the crack tips, which determine the possibility of their development, are also calculated. It is shown that there is an oscillating root singularity at the open crack tips and a common root singularity at the closed crack tips.

A rather simple solution of the similar problem was obtained also, but in the case of the only one open crack at the interface. This solution was used to evaluate the validity of the solution of the main problem by comparing it to the case of the cracks situated at a considerable distance from each other. It is shown that in this case the main characteristics of the open crack for the main and the auxiliary problem agree very well with each other. The solution of the problem of interaction of open and closed interface cracks for the case of a finite size body is also constructed. The student version of the Abaqus finite element package was used for this purpose. Provided that the size of the cracks is much smaller than the characteristic body size, the analytical and numerical results are compared and their good agreement is obtained. This is further evidence of the correctness of the analytical solution obtained in this paper.

**Постановка проблеми.** Дослідження тріщин між двома матеріалами (міжфазних тріщин) має важливе значення для практики, оскільки такого роду дефекти найчастіше спричиняють руйнування композитних конструкцій. Задача для тріщини, розташованої на межі поділу двох різних пружних ізотропних матеріалів, була поставлена за припущення, що тріщина повністю відкрита [1]. Для такої моделі встановлено, що біля вершин тріщини має місце осцилююча особливість напружень. Надалі міжфазна тріщина в рамках цієї моделі розглядалася в деяких роботах [2–4].

Для усунення осцилюючої особливості напружень у роботі [5] запропоновано контактну модель тріщини, яка враховує гладкий контакт її берегів біля вершин. Аналітичні способи розв'язання задачі для тріщини з зонами контакту, що розташована на межі поділу ізотропних матеріалів, розвивались у роботах [6–9].

Взаємодія двох відкритих міжфазних тріщин вивчалась у роботах [10–12], водночас результати дослідження взаємодії відкритої та закритої міжфазних тріщин авторам невідомі.

У цій роботі розглянуто задачу про взаємодію відкритої та закритої тріщин на межі поділу

матеріалів із використанням комплексних представлень компонент пружно-деформівного стану. Проблему зведено до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана, для якої виписано аналітичний розв'язок. Одержано досить прості аналітичні формули для всіх необхідних факторів на межі поділу матеріалів.

**Постановка задачі.** Розглянемо відкриту  $c \leq x_1 \leq a$  і закриту  $b < x_1 < d$  тріщини на межі поділу  $x_2 = 0$  двох пружних матеріалів (рис. 1).

Вважаємо, що вектор  $\mathbf{P}^\infty = [\sigma^\infty, \tau^\infty]^T$  задає умови на нескінченності. Вважається також відсутність напружень на гранях відкритої тріщини і умови неперервності на іншій частині біматеріального інтерфейсу. Отже, граничні умови на різних частинах інтерфейсу мають вигляд

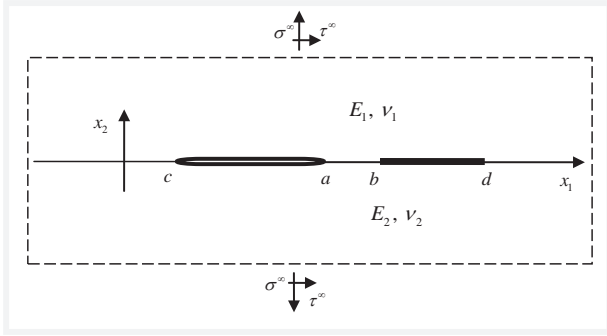
$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0 \quad \text{для } x_1 \in [c, a], \quad (1)$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0, \quad \langle u_2(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{22}(x_1, 0) \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \in [b, d], \quad (2)$$

$$\langle u_1(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle u_2(x_1, 0) \rangle = 0,$$

$$\langle \sigma_{12}(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{22}(x_1, 0) \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \notin [c, a] \cup [b, d], \quad (3)$$

де  $c < a < b < d$ ,  $\langle \cdot \rangle$  означає стрибок відповідної функції при переході через інтерфейс.



**Рис. 1.** Відкрита  $c \leq x_1 \leq a$  і закрита  $b < x_1 < d$  тріщини на межі поділу  $x_2 = 0$  двох пружних матеріалів

В роботі [13] отримані представлення

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = g [F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1)], \quad (4)$$

$$\langle u_1'(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2'(x_1, 0) \rangle = F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1), \quad (5)$$

де  $g = \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}$ ,  $\gamma_1 = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}$ , функція  $F_1(z)$

аналітична по всій площині комплексної змінної  $z = x + iy$  за виключенням відрізків  $[c, a]$  і  $[b, d]$  межі поділу матеріалів. При цьому рівняння (4), (5) забезпечують виконання умов неперервності напружень уздовж усього інтерфейсу.

**Аналітичне розв'язання проблеми.** Співвідношення (4), (5) задовольняють третю і четверту умови (3), що витікає з виконання рівняння  $P^{(1)}(x_1, 0) = P^{(2)}(x_1, 0)$  ( $P^{(m)} = [\sigma_{22}^{(m)}, \sigma_{12}^{(m)}]^T$ ) для всього інтерфейсу. Подальше врахування першої і другої умов (3) забезпечує аналітичність функції для всієї площини з розрізом уздовж інтерфейсу.

Задовольняючи інші граничні умови (1) і (2) з використанням (4) і (5), отримуємо такі рівняння:

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in [c, a], \quad (6)$$

$$\text{Im} [F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1)] = 0, \quad \text{Im} [F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)] = 0$$

для  $x_1 \in [b, d]$ .

Останні два співвідношення призводять до рівняння

$$\text{Im} F_1^\pm(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in [b, d], \quad (7)$$

Беручи до уваги, що для  $x_1 \notin [c, a]$  і  $x_1 \notin [b, d]$  співвідношення  $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$  є справедливим, маємо з (4):

$$(1 + \gamma_1) F_1(x_1) = \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \rightarrow \infty.$$

Використовуючи той факт, що функція  $F_1(z)$  є аналітичною по всій площині, яка розрізана вздовж  $x_1 \in \{[c, a] \cup [b, d]\}$ , і застосовуючи умови на нескінченності, приходимо з останнього рівняння до такої умови на нескінченності

$$F_1(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}^\infty - i \tilde{\tau}^\infty, \quad (8)$$

$$\text{де } \tilde{\sigma}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{g(1 + \gamma_1)}, \quad \tilde{\tau}^\infty = \frac{\tau^\infty}{g(1 + \gamma_1)}, \quad \sigma^\infty \text{ і } \tau^\infty -$$

напруження, задані на нескінченності.

Співвідношення (6) і (7) є комбінована гранична задача Діріхле-Рімана. Розв'язання такої проблеми було знайдено і застосовано до аналізу жорсткого штампа [14]. Для цього випадку цей розв'язок може бути записано у вигляді

$$F_1(z) = P(z) X_1(z) + Q(z) X_2(z), \quad (9)$$

де

$$P(z) = C_1 z^2 + C_2 z + C_3, \quad Q(z) = D_1 z + D_2,$$

$$X_1(z) = i e^{i\chi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)(z-b)(z-d)},$$

$$X_2(z) = e^{i\chi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)},$$

$$\chi(z) = 2\varepsilon \ln \left[ \frac{\sqrt{z-c} \sqrt{(d-a)(z-b)} + \sqrt{(b-a)(z-d)}}{\sqrt{z-a} \sqrt{(d-c)(z-b)} + \sqrt{(b-c)(z-d)}} \right],$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_1.$$

Невідомі коефіцієнти  $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2$  можна знайти з умов на нескінченності та умов однозначності зміщень. Беручи до уваги, що

$$X_1(z) = \frac{i e^{i\beta_0}}{z^2} \left[ 1 + \frac{1}{z} \left( i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^4}\right),$$

$$X_2(z) = \frac{e^{i\beta_0}}{z} \left[ 1 + \frac{1}{z} \left( i\beta_1 + \frac{a+c}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

де

$$\beta_0 = 2\varepsilon \ln \left[ \frac{\sqrt{(d-a)} + \sqrt{(b-a)}}{\sqrt{(d-c)} + \sqrt{(b-c)}} \right],$$

$$\beta_1 = \varepsilon \left[ \sqrt{(b-c)(d-c)} - \sqrt{(b-a)(d-a)} \right],$$

отримаємо такий вираз для  $F_1(z)$  на нескінченності

$$F_1(z) = i e^{i\beta_0} \left( C_1 + \frac{C_2}{z} + \frac{C_3}{z^2} \right) \left[ 1 + \frac{1}{z} \left( i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + e^{i\beta_0} \left( D_1 + \frac{D_2}{z} \right) \left[ 1 + \frac{1}{z} \left( i\beta_1 + \frac{a+c}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Прирівнюючи вирази при  $z^0$  і  $z^{-1}$  до правої частини (8) і до нуля відповідно, приходимо до системи

$$\begin{cases} i e^{i\beta_0} C_1 + e^{i\beta_0} D_1 = \tilde{\sigma}^\infty - i \tilde{\tau}^\infty, \\ i e^{i\beta_0} \left[ C_2 + C_1 \left( i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + e^{i\beta_0} \left[ D_2 + D_1 \left( i\beta_1 + \frac{a+c}{2} \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$C_1 = -\tilde{\tau}^\infty \cos \beta_0 - \tilde{\sigma}^\infty \sin \beta_0, \quad D_1 = \tilde{\sigma}^\infty \cos \beta_0 - \tilde{\tau}^\infty \sin \beta_0,$$

$$C_2 = -p_1 \sin \beta_0 + p_2 \cos \beta_0, \quad D_2 = p_1 \cos \beta_0 + p_2 \sin \beta_0,$$

де

$$p_1 = C_1 \left( \beta_1 \cos \beta_0 + \frac{a+b+c+d}{2} \sin \beta_0 \right) + D_1 \left( \beta_1 \sin \beta_0 - \frac{a+c}{2} \cos \beta_0 \right),$$

$$p_2 = -C_1 \left( \beta_1 \sin \beta_0 + \frac{a+b+c+d}{2} \cos \beta_0 \right) - D_1 \left( \beta_1 \cos \beta_0 + \frac{a+c}{2} \sin \beta_0 \right).$$

Використовуючи умову однозначності зміщень, приходимо з використанням (5) до такого рівняння

$$\int_b^d [F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)] dx_1 = 0.$$

Беручи до уваги, що для  $x_1 \in [b, d]$

$$X_1^\pm(x_1) = \frac{\pm e^{i\chi^\pm(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)(x_1-b)(d-x_1)}},$$

$$X_2^\pm(x_1) = \frac{e^{i\chi^\pm(x_1)}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}},$$

останнє співвідношення може бути представлено у вигляді

$$\int_b^d \left[ \frac{(C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3)(e^{z_0(x_1)} + e^{-z_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)(x_1-b)(d-x_1)}} - \frac{(D_1 x_1 + D_2)(e^{z_0(x_1)} - e^{-z_0(x_1)})}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \right] dx_1 = 0, \quad (10)$$

де

$$\chi_0(x_1) = 2\varepsilon \left( \tan^{-1} \frac{\sqrt{(b-a)(d-x_1)}}{\sqrt{(d-a)(x_1-b)}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{(b-c)(d-x_1)}}{\sqrt{(d-c)(x_1-b)}} \right).$$

З рівняння (10) коефіцієнт  $C_3$  може бути представлений у вигляді

$$C_3 = (-C_1 I_1 - C_2 I_2 + D_1 J_0 + D_2 J_1) / I_0,$$

де інтеграли

$$I_k = \int_b^d \frac{x_1^k (e^{z_0(x_1)} + e^{-z_0(x_1)}) dx_1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)(x_1-b)(d-x_1)}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$J_m = \int_b^d \frac{x_1^m (e^{z_0(x_1)} - e^{-z_0(x_1)}) dx_1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}, \quad m = 0, 1,$$

можна легко обчислити чисельно.

Використовуючи рішення (9) разом із формулою (4), отримуємо

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_1) F_1(x_1) \quad \text{для } x_1 \in [b, d], \quad (11)$$

Підстановка (9) призводить до такого виразу

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = (e^{z_0(x_1)} + \gamma_1 e^{-z_0(x_1)}) \left( \frac{P(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)(x_1-b)(d-x_1)}} + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \right) \quad \text{для } b < x_1 < d, \quad (12)$$

Підстановка розв'язку (9) в (5) дає такі формули

$$\langle u_1'(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2'(x_1, 0) \rangle = -2\sqrt{\alpha} e^{i\chi^*(x_1)} \times \left( \frac{P(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)(b-x_1)(d-x_1)}} + \frac{iQ(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}} \right) \quad \text{для } x_1 \in [c, a], \quad (13)$$

де  $\chi^*(x_1) = 2\varepsilon \ln \left[ \frac{\sqrt{x_1-c} \sqrt{(d-a)(b-x_1)} + \sqrt{(b-a)(d-x_1)}}{\sqrt{a-x_1} \sqrt{(d-c)(b-x_1)} + \sqrt{(b-c)(d-x_1)}} \right],$

$$\alpha = \frac{(\gamma_1 + 1)^2}{4\gamma_1}.$$

Варто зазначити, що в цьому випадку отриманий розв'язок є осцилюючим у вершинах відкритої тріщини і має традиційну кореневу сингулярність у вершинах закритої тріщини.

Далі вводимо найбільш важливі коефіцієнти інтенсивності напружень

$$K_2^b = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1-b)} \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0),$$

$$K_2^a - i K_1^a = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1-a)} (x_1-a)^{i\varepsilon} (\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)), \quad (14)$$

Використовуючи рівняння (12) і враховуючи, що  $\lim_{x_1 \rightarrow b+0} \chi_0(x_1) = 0$ , можна знайти

$$K_2^b = \frac{(1 + \gamma_1) \sqrt{2\pi} P(b)}{\sqrt{(b-c)(b-a)(d-b)}}, \quad (15)$$

Використання рівняння (11) для  $x_1 \rightarrow a-0$  дає змогу отримати вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_1^a$  і  $K_2^a$ :

$$K_2^a - i K_1^a = \sqrt{2\pi} (1 + \gamma_1) \left( \frac{2\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}}{\sqrt{(d-c)(b-a)} + \sqrt{(b-c)(d-a)}} \right)^{2i\varepsilon} \times \left( \frac{Q(a)}{\sqrt{(a-c)}} - \frac{iP(a)}{\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}} \right), \quad (16)$$

Відповідно до [15] швидкість вивільнення енергії (ШВЕ) для цієї задачі може бути представлена у вигляді

$$G = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \left\{ \int_a^{a+\Delta l} [\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_2(x_1 - \Delta l, 0) \rangle + \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l, 0) \rangle] dx_1 \right\}, \quad (17)$$

Формули (12), (13) в околі правої вершини тріщини

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \Big|_{x_1 \rightarrow a+0} = \frac{g(1 + \gamma_1)}{(x_1 - a)^{0.5+i\varepsilon}} \times \left( \frac{2\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}}{\sqrt{(d-c)(b-a)} + \sqrt{(b-c)(d-a)}} \right)^{2i\varepsilon} \left( \frac{Q(a)}{\sqrt{(a-c)}} - \frac{iP(a)}{\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}} \right), \quad (18)$$

$$\langle u_1(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2(x_1, 0) \rangle \Big|_{x_1 \rightarrow a-0} = \frac{\sqrt{2\alpha} (a-x_1)^{0.5-i\varepsilon}}{(0.5-i\varepsilon)} \times \left( \frac{2\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}}{\sqrt{(d-c)(b-a)} + \sqrt{(b-c)(d-a)}} \right)^{2i\varepsilon} \left( \frac{P(a)}{\sqrt{(a-c)(b-a)(d-a)}} + \frac{iQ(a)}{\sqrt{(a-c)}} \right), \quad (19)$$

Беручи до уваги, що

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_2(x_1 - \Delta l, 0) \rangle + \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l, 0) \rangle = -\text{Im} \left\{ [\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i \sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)] \times [\langle u_1(x_1 - \Delta l, 0) \rangle - i \langle u_2(x_1 - \Delta l, 0) \rangle] \right\}$$

і виконуючи інтегрування в (17) з використанням (18), (19) і значення інтегралу [15]

$$\int_0^1 \left( \frac{1-x}{x} \right)^{0.5+i\varepsilon} dx = \frac{\pi(1+2i\varepsilon)}{2\sqrt{\alpha}},$$

одержуємо

$$G = \frac{\pi g(1 + \gamma_1)}{a-c} \left[ Q^2(a) + \frac{P^2(a)}{(b-a)(d-a)} \right], \quad (20)$$

**Одна відкрита тріщина.** Для підтвердження обґрунтованості отриманого розв'язку припу-



стимо, що є тільки одна відкрита тріщина. У цьому випадку залишається задача лінійного спряження

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in [c, a], \quad (21)$$

для якої залишаються справедливими умови на нескінченності (8).

Розв'язок рівняння (21) при умовах на нескінченності (8) знайдений на основі [16] у вигляді

$$F(z) = (\tilde{\sigma}^\infty + i\tilde{\tau}^\infty) \frac{z - (a+c)/2 - i\varepsilon(a-c)}{\sqrt{(z-c)(z-a)}} \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{i\varepsilon}, \quad (22)$$

Напруження на межі поділу матеріалів знайдені на основі (4) у формі

$$\begin{aligned} & \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) + i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = \\ & = (\sigma^\infty + i\tau^\infty) \frac{x_1 - (a+c)/2 - i\varepsilon(a-c)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \left(\frac{x_1-c}{x_1-a}\right)^{i\varepsilon} \\ & \text{для } x_1 > a, \end{aligned} \quad (23)$$

Використовуючи рівняння (23) для  $x_1 \rightarrow a-0$ , знаходимо КІН у формі:

$$K_1^a + iK_2^a = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - 2i\varepsilon) (\sigma^\infty + i\tau^\infty) (a-c)^{0.5+i\varepsilon}, \quad (24)$$

ШВЕ знаходиться аналогічно розділу 3 і має вигляд

$$G_0 = \Omega (K_1^2 + K_2^2) = \Omega a \pi (1 + 4\varepsilon^2) \left( (\sigma^\infty)^2 + (\tau^\infty)^2 \right), \quad (25)$$

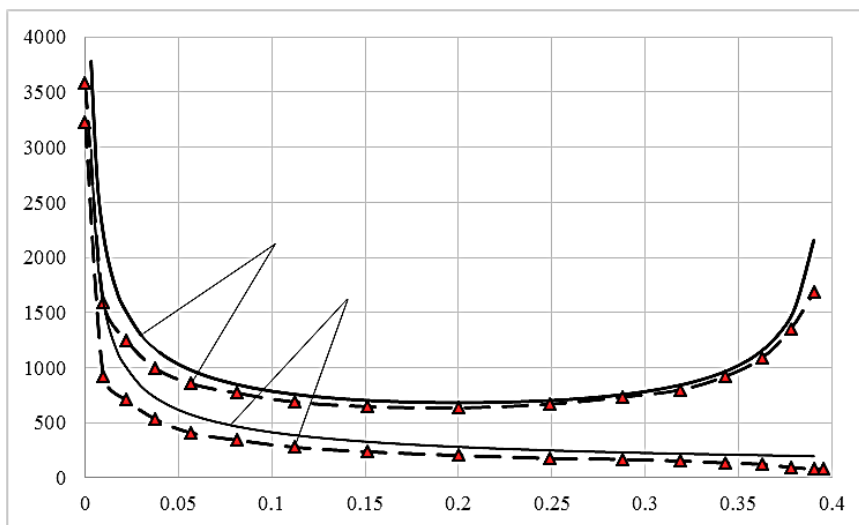
$$\text{де } \Omega = \frac{1}{16 \text{ch}^2(\pi\varepsilon)} \left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right).$$

**Числові результати та їх аналіз.** Для чисельної реалізації отриманих результатів вибиралися матеріали з такими характеристиками:  $E_1 = 10^5 \text{ Па}$ ,  $E_2 = 10^9 \text{ Па}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ . Положення відкритої тріщини не змінювалось, тобто вибиралось  $c = -2$ ,  $a = 0$ .

На рис. 2 наведено графіки дотичного  $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$  та нормального  $\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0)$  напружень на відріжку  $(a, b)$  при положенні вершин закритої тріщини  $b = 0.4$ ,  $d = 3$  і  $\sigma^\infty = 100 \text{ Па}$ ,  $\tau^\infty = 200 \text{ Па}$ .

Графіки отримано як за формулою (12), яка описує аналітичний розв'язок, так і за допомогою багатоцільового скінченно-елементного комплексу для інженерного аналізу ABAQUS. В останньому випадку область розглядалась як скінченна, але її розмір був набагато більшим, ніж довжина тріщинуватої області. Проводилось згущення сітки біля тріщини і особливо біля її вершин. Суцільні криві відповідають точному аналітичному розв'язку, а пунктирні криві з трикутними маркерами побудовані за числовими значеннями, які отримані за допомогою пакету ABAQUS. Видно, що результати аналітичного і чисельного аналізів добре узгоджуються, що свідчить про достовірність отриманого розв'язку.

Проаналізовано залежність стрибка переміщення  $\langle u_2(x_1, 0) \rangle$  при варіюванні дотичного напруження на нескінченності  $\tau^\infty = 200, 400, 600 \text{ Па}$  (криві I, II, III відповідно) для  $\sigma^\infty = 100 \text{ Па}$  і фіксованих значень  $b=1$ ,  $d=3$ . Також наведено графік стрибка переміщення  $\langle u_2(x_1, 0) \rangle$  для випадку, коли закрита тріщина знаходиться досить далеко від відкритої, а саме:  $b = 8$ ,  $d = 10$ . При цьому  $\tau^\infty = 200 \text{ Па}$ ,  $\sigma^\infty = 100 \text{ Па}$ . На рис. 3 цей графік представлено пунктирною лінією. Видно, що збільшення дотичного напруження на нескінченності  $\tau^\infty$  призводить до значної модифікації розкриття тріщини і навіть до зміни його знаку в деякій частині області тріщини. Це вказує на необхідність використання контактної моделі тріщини для таких випадків зовнішнього навантаження.



**Рис. 2.** Графіки дотичного  $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$  та нормального  $\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0)$  напружень на відріжку  $(a, b)$  при положенні вершин закритої тріщини  $b = 0.4$ ,  $d = 3$  і  $\sigma^\infty = 100 \text{ Па}$ ,  $\tau^\infty = 200 \text{ Па}$

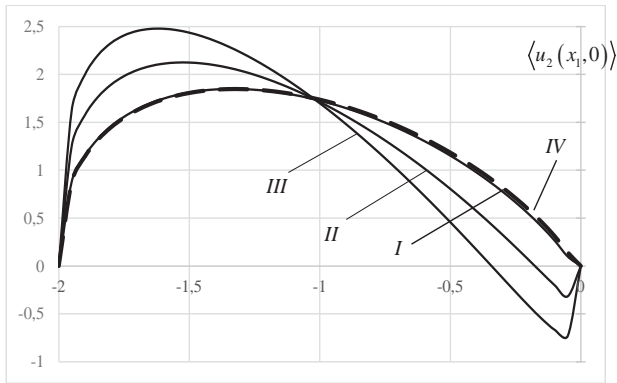


Рис. 3. Стрибки переміщення  $\langle u_2(x_1, 0) \rangle$  на відріжку  $[c, a]$

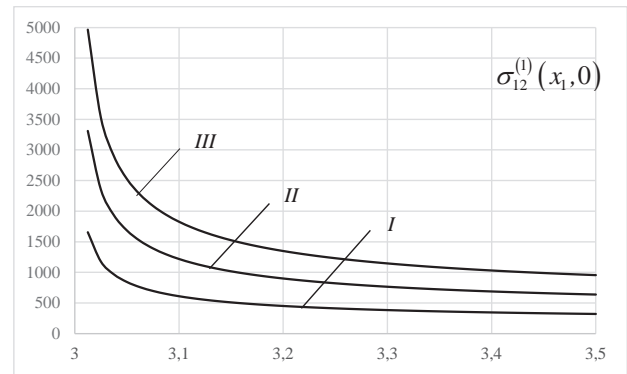


Рис. 4. Дотичне напруження  $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$  в правому околі закритої тріщини

Графіки дотичного напруження  $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$  в правому околі закритої тріщини наведено на рис. 4 для тих же значень параметрів, що і на рис. 3.

Як видно з отриманих результатів, зі збільшенням дотичного напруження  $\tau^\infty$  на нескінченності пропорційно збільшуються і значення дотичного напруження  $\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$ .

**Висновки.** Розглянуто взаємодію відкритої і закритої тріщин на межі поділу ізотропних матеріалів. Для розв'язання задачі використані одержані раніше представлення напружень та похідних від стрибків переміщень через кусково-аналітичну функцію. В результаті проблему зведено до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана, для якої представлено точний аналітичний розв'язок. На основі цього розв'язку знайдені досить прості вирази для напружень на межі поділу матеріалів, а також коефіцієнти інтенсивності напружень та

швидкість звільнення енергії біля вершин тріщин. Показано, що має місце осцилююча коренева особливість у вершинах відкритої тріщини і звичайна коренева особливість у вершинах закритої тріщини. Поведінка напружень та переміщень представлена графічно. Виявлено, що для досить інтенсивного поля зовнішніх зсувних напружень береги тріщини починають перетинатись, що вказує на необхідність використання контактної моделі тріщини для таких випадків.

Подібну задачу, але для біматеріального тіла скінчених розмірів, змодельовано і розв'язано за допомогою студентської версії кінцево-елементного пакету ABAQUS. Порівняння отриманих аналітичних формул із результатами за методом скінчених елементів продемонструвало їх гарне узгодження та додатково підтвердило правильність застосованих у цій роботі методів та отриманих розв'язків.

#### ЛІТЕРАТУРА

- Williams M.L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1959. V. 49. P. 199–204.
- Моссаковский В.И., Рыбка М.Т. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела. *Прикладная математика и механика*. 1964. № 6. С. 1061–1069.
- Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. *Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1962. № 1. С. 131–137.
- England A.N. A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*. 1965. V. 32. P. 400–402.
- Comninou M. The interface crack. *Trans. ASME. Ser. E, J. Applied Mechanics*. 1977. V. 44. № 4. P. 631–636.
- Симонов И.В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений. *Механика композитных материалов*. 1985. № 6. С. 969–976.
- Лобода В.В. Об одном эффекте в теории межфазной трещины. *Доповіди АН УРСР*. 1989. № 8. С. 39–43.
- Острик В.И., Улітко А.Ф. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2000. Т. 43. № 2. С. 119–126.
- Loboda V.V., Sheveleva A.E. On the quasi-invariant phenomena in the axisymmetrical interface crack problem and its application to fixed end cylinder investigation. *International Journal of Solids and Structures*. 1995. V. 32. № 1. P. 117–125.
- Rice J.R., Sih G.C. Plane problem of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*. 1965. V. 32. P. 418–423.
- Parihar K.S., Garg A.C. An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes. *Eng. Fract. Mech.* 1975. V. 7. № 4. P. 751–759.

12. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М., Рывкин М.Б. Деформация составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой произвольно нагруженных щелей. *Прикладная математика и механика*. 1981. Т. 45, № 6. С. 1088–1094.
13. Лобода В.В., Харун І.В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил та моментів. *Мат. методи та фізико-механічні поля*. 2002. Т. 45. № 2. С. 103–113.
14. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом. *Прикладная математика и механика*. 1986. Т. 50 (4). С. 663–673.
15. Shih C.F., Asaro R.J. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part 1 – small scale yielding. *J. Appl. Mech.* 1988. V. 55. P. 299–316.
16. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 707 с.

#### REFERENCES

1. Williams M. L. (1959) The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 49, pp. 199–204.
2. Mossakovskiy V. I., Rybka M. T. (1964) Obobshchenie kriteriya Griffitsa-Sneddona na sluchay neodnorodnogo tela [Generalization of the Griffiths-Sneddon criterion to the case of an inhomogeneous body]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, no. 6, pp. 1061–1069.
3. Cherepanov G. P. (1962) O napryazhenom sostoyanii v neodnorodnoy plastinke s razrezami [On the stress state in an inhomogeneous plate with cuts]. *Izv. AN SSSR. OTN. Mekhanika i mashinostroyeniye*, no. 1, pp. 131–137.
4. England A. N. (1965) A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 32, pp. 400–402.
5. Comninou M. (1977) The interface crack. *Trans. ASME. Ser. E, J. Applied Mechanics*, vol. 44, no 4, pp. 631–636.
6. Simonov I. V. (1985.) Treshchina na granitse razdela v odnorodnom pole napryazheniy [Crack at the interface in a uniform stress field]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, no. 6, pp. 969–976.
7. Loboda V. V. (1989) Ob odnom effekte v teorii mezhfaznoy treshchiny [About one effect in the interface crack theory]. *Dopovidi AN URSR*, no. 8, pp. 39–43.
8. Ostryk V. I., Ulitko A. F. (2000) Trishhyna na mezhi rozdilu pivploshhyn z riznykh materialiv [Crack at the interface between half-planes of different materials]. *Mat. metody ta fizyko-mekhanichni polja*, vol. 43, no. 2, pp. 119–126.
9. Loboda V. V., Sheveleva A. E. (1995) On the quasi-invariant phenomena in the axisymmetrical interface crack problem and its application to fixed end cylinder investigation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, no. 1, pp. 117–125.
10. Rice J. R., Sih G. C. (1965) Plane problem of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 32, pp. 418–423.
11. Parihar K. S., Garg A. C. (1975) An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 7, no. 4, pp. 751–759.
12. Nakhmeyn E. L., Nuller B. M., Ryvkin M. B. (1981) Deformatsiya sostavnoy uprugoy ploskosti, oslablennoy periodicheskoy sistemoy proizvol'no nagruzhennykh shcheley [Deformation of a compound elastic plane weakened by a periodic system of arbitrarily loaded slots]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 45, no. 6, pp. 1088–1094.
13. Loboda V. V., Kharun I. V. (2002) Mizhfazni trishhyny z zonamy kontaktu v poli zoseredzhenykh syl ta momentiv [Interface cracks with contact zones in the field of concentrated forces and moments]. *Mat. metody ta fizyko-mekhanichni polja*, vol. 45, no. 2, pp. 103–113.
14. Nakhmeyn E. L., Nuller B. M. (1986) Kontakt uprugoy poluploskosti s chastichno otsloivshimsya shtampom [Contact of an elastic half plane and a particularly unbonded stamp]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 50 (4), pp. 663–673.
15. Shih C. F., Asaro R. J. (1988) Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part 1 – small scale yielding. *J. Appl. Mech.*, vol. 55, pp. 299–316.
16. Muskhelishvili N. I. (1977) *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow: Nauka. (in Russian)