УДК 539.3:534.1 10.26661/2413-6549-2019-1-06

ДИНАМІКА ПРУЖНИХ СИСТЕМ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ: МЕХАНІЧНІ, МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЇХ ОСОБЛИВОСТІ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ

А. Г. Дем'яненко, В. О. Гурідова, Д. В. Клюшник

Дніпровський державний аграрно-економічний університет
anatdem@ukr.net

Ключові слова:
динаміка, частота, рухоме інерційне навантаження, критична швидкість.

Відомо, що метод Фур'є належить до методів математичної фізики, які дають можливість отримати розв'язки певного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних. Лише у порівняно простих випадках маємо можливість побудувати явні розв'язки рівнянь у частинних похідних як суми часткових розв'язків у вигляді добутку відокремлених функцій. До таких рівнянь належать рівняння коливань струни, мембрани, балки та деякі інші. Пряме застосування такого методу до задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням у загальному випадку не є можливим. У зв'язку з цим зроблені спроби застосування цього методу шляхом його модифікації та узагальнення. Однією з перших відомих публікацій була праця H. Steuding [10], у якій показано, що загальний розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних, яке описує пружні коливання об'єкта за дії рухомого інерційного навантаження, являє лінійну комбінацію часткових розв'язків, які містять як симетричні, так і антисиметричні, зсунуті по фазі на прямий кут, форми коливань. Причому антисиметричні форми коливань обумовлені наявністю змішаної похідної непарної за часом, тобто силами інерції Коріоліса рухомого навантаження, і зв'язані через них з симетричними формами. Симетричні ж форми коливань при нерухомому навантаженні являють собою власні форми коливань навантаженої системи. Власне робота [10] започаткувала метод двохвильового подання коливань пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше була наведена О. О. Горошком [2]. При застосуванні до дослідження таких систем методу двохвильового подання коливань, який дозволяє у деяких випадках отримати точні розв'язки задач, загальний розв'язок диференціального рівняння подається у вигляді суми двох рядів, один з яких являє собою класичну частину розв'язку, а другий ту частину, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної, а саме – інерційністю рухомого навантаження, і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи названі власними формами, а форми другої групи – супровідними формами коливань пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише за наявності рухомого інерційного навантаження. У роботі розглянуто головні особливості математичних моделей задач динаміки пружних об'єктів за дії рухомого інерційного навантаження. Як приклад, застосовуючи метод двохвильового подання, досліджено коливання і стійкість натягнутої мембрани за дії розподіленого рухомого інерційного навантаження. За дії рівномірно розподіленого рухомого навантаження виявлена нова якість руху мембрани, яка не виявляється прямими методами математичної фізики, а саме – наявність другої критичної швидкості руху інерційного навантаження.

DYNAMICS OF ELASTIC OBJECTS UNDER MOVABLE INERTIAL LOADING-MECHANCAL, MATHEMATICAL MODELS, FEATURES AND RESEARCH

A. G. Demianenko, V. O. Guridova, D. V. Kliushnik

Dniprovsk State University of Agriculture and Economics of Ukraine
anatdem@ukr.net

Key words:
dynamics, frequency, mobile inertia load, critical speed.

As it is known, Fourier method of mathematical physics allows to get solutions of some class of partial differential equations. Only in relatively simple cases it is possible to build up the solutions of partial differential equations as a sum of particular solutions in the form of product of the separated functions. To those equations belong the equations of (eigen) oscillations of the string, the beam and some others. The direct applying of this method to the dynamic problem of elastic systems under movable inertia loading is not possible in general cases. That is why some authors tried to use this method by the way of its modifying and generalizing. One of the first publications was H. Steuding [10], where general solution of the partial differential equation of elastic oscillations under movable inertia loading could be obtained as a linear combination of particular solutions, those contain symmetric and antisymmetric forced forms shifted by 90 degrees in their phase. Moreover, antisymmetric forms occurred due to the mixed derivative odd-order by time and Coriolis' inertia forces caused by movable loading and related through them to symmetrical forced forms. The symmetrical forced forms under non-movable loading are matched to the eigenforms of the loaded system. Actually work [10] initiated a two-wave representation of oscillations of the elastic system under movable inertia loading and its physics interpretation had been provided by O. A. Goroshko [2]. Using the method of two-wave representation of the oscillations for research of those system, that allows in some cases to obtain analytical solutions, the general solution of the differential equations could be found as a sum of two infinity series the first series is a classical part of the solution and the second one is the part of the solution caused by presence of odd-order by time mixed derivative and inertia of movable loading, that could not be discovered by using of traditional direct methods of mathematical physics.The forms of the first group are called as eigenforms and the forms from the second group are accompanying oscillation forms of an elastic system. Accompanying oscillations could be non-trivial if the elastic system is loaded by movable inertia loading. The modes of the first group called eigenmodes, and the modes from the second one are called as accompanying modes of the elastic system oscillations. Accompanying modes are induced and non-trivial when the movable inertia loading is present. This paper describes some features of the mathematical models for the elastic elements with movable load. In these systems two forms of own oscillations – the own component and the accompanying one, displaced in phase to the right angle correspond to every frequency of the system. As an example, using the two-wave representation method, the oscillations and stability of the stretched membrane were investigated by the action of a distributed moving inertial load. Under the action of a uniformly distributed moving load, a new quality of the membrane motion, which is not detected by direct methods of mathematical physics, is found, namely, the presence of a second critical velocity of the inertial load.

Вступ. У травні 2019 року виповнилося 172 роки з дня виникнення та початку досліджень проблеми динамічної дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди. Приводом послужило руйнування Честерського мосту в Англії у травні 1847 року. У відомому огляді, присвяченому 100-річчю з дня виникнення проблеми, відомий фахівець з МТДТ Пановко Я. Г. писав

[4, 7]: «Проблема динамического действия подвижной нагрузки, столетний юбилей которой исполнился в 1947 году, до наших дней не утратила своей актуальности, жизнь продолжает ставить все новые задачи и тем вызывает дальнейшее движение теории вперед». У динамічному XX–XXI сторіччі суттєве збільшення мас і швидкостей руху ставить нові задачі, потребує їх вирішення, викликаючи своєю чергою появу нових підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження, які дозволяють більш повно виявити усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик процесу руху таких систем. Підвищений інтерес до цієї проблеми останнім часом обумовлений появою і застосуванням інформаційних технологій, які дозволяють більш повно та детально досліджувати математичні моделі та аналізувати отримані результати. Суттєво змінилося і традиційне уявлення про механічні системи з рухомим інерційним навантаженням. Простими прикладами таких систем є мости з рухомим потоком транспорту, трубопроводи, стержні, пластинки, оболонки під дією рухомого потоку рідини чи газу. До цього класу задач у рамках певних аналогій [2, 3] можна віднести об’єкти змінної за часом довжини та об’єкти, які рухаються у поздовжньому напрямку, такі як нитки, дроти, профільні стержні у прокатному виробництві, смугові та ланцюгові пили, паски пасових передач, канати шахтних підіймальних машин і таке інше.

Аналіз механічних моделей. Залежно від способу схематизації інерційних властивостей пружної конструкції і рухомого навантаження є чотири принципово різних варіанти постановки задачі про вплив рухомого навантаження на пружні конструкції та споруди [3, 4]. Найбільш складним з точки зору практики є четвертий варіант, де враховуються як сили інерції самої конструкції, так і сили інерції рухомого навантаження [4]. Багато задач динаміки деформівних систем з рухомим інерційним навантаженням відносяться до неконсервативних. У зв’язку з цим безпосереднє застосування класичних, прямих методів математичної фізики до дослідження динаміки консервативних механічних систем не завжди коректне для дослідження таких механічних систем. Теоретичні дослідження задач динаміки пружних деформівних систем у переважній більшості базуються на класичній теорії згину на основі гіпотези плоских перерізів Бернуллі–Ейлера, згідно з якою плоскі поперечні перерізи до деформації залишаються плоскими і нормальними поздовжніми волокнами в процесі деформації. Узагальнення класичної теорії поперечних коливань стержнів враховує інерцію повороту поперечних перерізів, що вперше було зроблено Дж. Релеєм, та водночас інерції повороту елементів стержня і деформації поперечного зсуву, що було зроблено С. П. Тимошенком. Диференціальне рівняння поперечних коливань стержня, отримане в основі гіпотези плоских перерізів, називають класичним рівнянням коливання балки, або рівнянням Бернуллі–Ейлера, рівняння з урахуванням тільки інерції повороту – рівнянням Релея, а з урахуванням водночас інерції повороту і деформацій зсуву – рівнянням Тимошенка, або рівнянням балки Тимошенка. Ціла низка задач динаміки деформівних систем з рухомим інерційним навантаженням відноситься до неконсервативних. У зв’язку з цим безпосереднє застосування класичних, прямих методів математичної фізики до дослідження динаміки консервативних механічних систем не завжди коректне для дослідження таких механічних систем. Для дослідження задач динаміки будівельної механіки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням найбільш часто застосовують математичні методи:

1. Метод Шаленкампа.
2. Метод Інгліса–Болотіна.
3. Метод А. П. Філіппова і С. С. Кохманюка.
4. Метод двохвильового подання коливань.
5. Метод інтегральних перетворень Лапласа і Фур’є.
6. Метод кінцевих елементів.

Математичні моделі, їх особливості та дослідження. Дослідження якісних та кількісних характеристик руху пружних деформівних систем за дії рухомого інерційного навантаження зводиться до аналізу математичної моделі

$$L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)w = L_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot q\left(x,t\right)$$

з відповідними крайовими і початковими умовами, де за сталої швидкості руху

$$q\left(x,t\right) = -\frac{q_0+q_1}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} -$$

$$-2\frac{q_1 v}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Основними особливостями математичних моделей таких задач, по-перше, є наявність у диференціальних рівняннях у тому чи іншому вигляді інерційного оператора $q\left(x,t\right)$, який визначає силову дію на пружний об'єкт рухомого масового навантаження. Характерним є той факт, що силова дія залежить як від інтенсивності $q_1\left(x,t\right)$ і швидкості руху v потока навантаження, так і від деформації пружного об'єкта $w\left(x,y,t\right)$, причому чітко видно залежність силової дії від прискорення деформації $w_{tt}\left(x,y,t\right)$, швидкості кутової деформації $w_{tx}\left(x,y,t\right)$ та зміни кривини пружної лінії об'єкта $w_{xx}\left(x,y,t\right)$, тобто в таких системах силова дія не є заздалегідь визначеною, а обумовлена поточним деформованим станом системи і є слідкуюча за ним. Це є другою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою суттєвою особливістю є наявність в математичній моделі у тій чи іншій формі непарної за часом змішаної похідної, яка обумовлена прискоренням Коріоліса рухомого масового навантаження і не дозволяє розділити просторову x і часову t змінні за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. Математичні моделі задач динаміки пружних тіл за дії рухомого інерційного навантаження, які мають цілу низку специфічних особливостей та суттєву значимість для практики, можна віднести до некласичних задач математичної фізики, а самі задачі складають самостійний і важливий розділ у будівельній механіці. У зв'язку з неможливістю прямого застосування класичного методу Фур'є до цих задач у загальному випадку зроблені спроби його модифікації та узагальнення [9, 10]. Саме для розвитку цього напрямку професор Горошко О. О. започаткував метод двохвильового подання коливань пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження та надав його чітку і прозору фізичну інтерпретацію [2]. При застосуванні до дослідження таких систем методу двохвильового подання коливань, який дозволяє у деяких випадках побудувати точні розв'язки [2-4], загальний розв'язок диференціального рівняння (1) отримуємо у вигляді суми двох рядів

$$w\left(x,t\right) = \sum_{i=1}^{n} a_n \varphi_n\left(x\right)\cos\left(\omega_n t + \beta_n\right) +$$

$$+\sum a_n \psi_n\left(x\right)\sin\left(\omega_n t + \beta_n\right),$$

один з яких – це класична частина розв'язку, а другий – частина, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної а саме інерційністю рухомого навантаження, і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики. Форми першої групи названі власними формами, а форми другої групи – супровідними формами коливань пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише за наявності рухомого інерційного навантаження або інших чинників системи [2-4]. Згодом розвиток таких методів з практичної площини перейшов у чисто фізико-математичну та набув узагальнень у працях школи П. І. Каленюка [5], які знаходять і без сумніву знайдуть своє подальше застосування. Більш повному та детальному дослідженню цього класу задач будівельної механіки методом двохвильового подання сприяють сучасні інформаційні технології. Як прозорий приклад застосування методу двохвильового подання коливань до задач динаміки пружних об'єктів за дії рухомого інерційного навантаження розглянемо коливання гнучких елементів, які знаходяться у полі дії сил інерції рухомого навантаження. Як самі елементи, так і рухоме інерційне навантаження можуть бути як однорідними, так і неоднорідними – з дискретними включеннями, наявністю зосереджених сил.

Коливання і стійкість мембрани. Математичні моделі, що відображають динамічну поведінку гнучких вантажних органів у неоднорідному полі масових та поверхневих сил, мають деякі особливості, які властиві тільки задачам цього класу. Головною особливістю є наявність у математичній моделі інерційного оператора, за яким визначаємо силову дію на орган зі сторони рухомого навантаження, яка не є заздалегідь визначеною, а залежить від деформації елемента, котра своєю чергою змінюється в залежності від дії рухомого інерційного навантаження. Інерційний оператор містить непарну за часом змішану похідну, яка виражає наявність сил інерції Коріоліса і не дозволяє відокремити в математичній моделі змінні за класичною схемою Фур'є. Розглянемо поперечні коливання прямокутної $a\times b$ мембрани, закріпленої по краях, вздовж якої паралельно стороні а, яка паралельна осі x, рухається зі сталою швидкістю v розподілене навантаження з дискретними регулярними включеннями інтенсивності

$$m_2(x)=m_1(x)+\sum_k m_k\delta(x-x_k),$$

де $m_1(x)$ – інтенсивність розподіленого навантаження, m_k – маса k-го дискретного включення. При дослідженні процесу коливань такої системи відносно квазістатичного стану приходимо до розв'язування наступного диференціального рівняння у частинних похідних [3, 8]

$$N\Delta u=m_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+$$
$$+m_2(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u \qquad (1)$$

з граничними

$$u(0,y,t)=0,\quad u(a,y,t)=0,$$
$$u(x,0,t)=0,\quad u(x,b,t)=0 \qquad (2)$$

та початковими умовами

$$u(x,y,0)=f_1(x,y),$$
$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=f_2(x,y), \qquad (3)$$

де m_0, $m_2(x)$ відповідно до інтенсивності мас одиниці площі мембрани і розподіленого рухомого навантаження, N, v – розтягуюча сила, швидкість руху навантаження вздовж осі x. Зауважимо, що поклавши $m_0=0$, отримаємо рівняння поперечних коливань неоднорідної мембрани, яка рухається у повздовжньому напрямку. Розв'язок диференціального рівняння (1) відшукуємо у вигляді [2, 6]

$$u(x,y,t)=\varphi(x,y)\cos\omega t+$$
$$+\psi(x,y)\sin\omega t. \qquad (4)$$

Розділивши змінні у рівнянні (1) за відомою схемою відокремлення змінних за допомогою виразу (4), отримаємо систему зв'язаних диференціальних рівнянь

$$N\Delta\varphi-2m_2v\omega\frac{\partial\psi}{\partial x}-m_2v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+$$
$$+(m_0+m_2)\omega^2\varphi=0,$$
$$N\Delta\psi+2m_2v\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x}-m_2v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+$$
$$+(m_0+m_2)\omega^2\psi=0, \qquad (5)$$

після застосування до якої методу комплексного згортання прийдемо до крайової задачі

$$c_1^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+c_2^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+2ib\omega\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\omega^2\Phi=0, \quad (6)$$

$$\Phi(0,y)=0,\quad \Phi(a,y)=0,$$
$$\Phi(x,0)=0,\quad \Phi(x,b)=0, \qquad (7)$$

яку розв'язуватимемо за класичною схемою відокремлення змінних, а саме – покладемо

$$\Phi(x,y)=X(x)\cdot Y(y) \qquad (8)$$

і підставивши вираз (8) в (6), отримаємо

$$c_1^2X''(x)+2ib\omega X'(x)+\lambda^2X=0, \qquad (9)$$
$$Y''(y)+\mu^2Y=0 \qquad (10)$$

при граничних умовах

$$X(0)=0;\quad X(a)=0,$$
$$Y(0)=0;\quad Y(b)=0, \qquad (11)$$

де сталі λ^2 і μ^2 зв'язані між собою співвідношенням

$$\mu^2 = \left(\omega^2 - \lambda^2\right) / c_2^2 . \qquad (12)$$

Таким чином, маємо задачу Штурма–Ліувілля на власні значення, де коефіцієнти рівнянь є функціями x

$$c_1^2 = \frac{N - m_2(x)v^2}{m_0 + m_2(x)}, \quad c_2^2 = \frac{N}{m_0 + m_2(x)},$$

$$b = \frac{m_2(x)v}{m_0 + m_2(x)}, \qquad (13)$$

$m_2(x) = m_1(x) + \sum_k m_k \delta(x - x_k)$, а тому записати їх розв'язки в загальному випадку не вдається. Знайдемо наближені розв'язки математичної моделі (1)-(3), які в подальшому можуть уточнюватися, наприклад, асимптотичним методом. Скористаємося для цього відомим способом [1], а саме – «розмажемо» розподілене рухоме навантаження до рівномірно розподіленого з інтенсивністю m_p по всій площі мембрани, при цьому прийдемо до крайової задачі (9), але зі сталими коефіцієнтами

$$c_1^2 = \frac{N - m_p v^2}{m_0 + m_p}, \quad b = \frac{m_p v}{m_0 + m_p},$$

$$m_p = \left(\int_0^a m_1(x)dx + \sum_k m_k \right) \Big/ a, \qquad (14)$$

або

$$c_1^2 = \frac{N}{m_n} - \varepsilon v^2, \quad c_2^2 = \frac{N}{m_n}, \quad b = \varepsilon v, \qquad (15)$$

де

$$\varepsilon = m_p / m_n, \quad m_n = m_0 + m_p . \qquad (16)$$

Розв'язками крайових задач (9), (10) з урахуванням (11) при такому наближенні будуть функції [3, 6]

$$X(x) = \exp\left(-i \frac{b\omega x}{c_1^2} \right) \sin \theta x, \quad Y(y) = \sin \mu y,$$

де

$$\theta^2 = \frac{\omega^2 b^2 + c_1^2 \lambda^2}{c_1^4}, \quad \mu^2 = \frac{\omega^2 - \lambda^2}{c_2^2}, \qquad (17)$$

а параметри θ і μ мають нескінченну множину значень, виходячи з крайових умов (11) $\theta = \frac{n\pi}{a}$, $\mu = \frac{m\pi}{b}$. Остаточно частинні розв'язки рівняння (6) отримуємо у вигляді

$$\Phi_{n,m}(x, y) = \exp\left(-\frac{ib}{c_1^2} \omega x \right) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y,$$

а загальний розв'язок рівняння (1) з умовами (2) при обмеженнях (14) набирає вигляду

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m} a_{n,m} \left[\varphi_{n,m}(x, y) \cos\left(\omega_{n,m} t + \alpha_{n,m}\right) + \right.$$
$$\left. + \psi_{n,m}(x, y) \sin\left(\omega_{n,m} t + \alpha_{n,m}\right) \right], \qquad (18)$$

де власні і супровідні форми коливань мають вигляд

$$\varphi_{n,m} = \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \cos \frac{b}{c_1^2} \omega_{n,m} x,$$

$$\psi_{n,m}(x, y) =$$
$$= -\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{b}{c_1^2} \omega_{n,m} x. \qquad (19)$$

Зауважимо, що супровідні форми коливань $\psi_{n,m}(x, y)$ обумовлені рухомим інерційним навантаженням і нетривіальні лише при його наявності. Для визначення частот поперечних коливань гнучкої натягнутої мембрани за дії рухомого інерційного навантаження отримаємо наступний вираз

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\frac{c_2^2 - \varepsilon v^2}{\left(c_2^2 - (1-\varepsilon)\varepsilon v^2\right)} \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(c_2^2 - \varepsilon v^2\right) + c_2^2 \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]}, \qquad (20)$$

звідки визначаємо два значення критичної швидкості руху навантаження

$$v_1^* = \sqrt{c_2^2 / \varepsilon}, \quad v_2^* = \sqrt{c_2^2 / (1-\varepsilon)\varepsilon}, \qquad (21)$$

при яких відбувається втрата стійкості мембрани [2, 3].

Аналіз результатів та висновки. Проведене дослідження математичної моделі показує, що для пружних гнучких об'єктів за дії рухомого інерційного навантаження маємо два значення критичної швидкості руху інерційного навантаження, чого не виявляється застосуванням прямих методів математичної фізики до задач цього класу. Рух гнучкої мембрани за дії рухомого інерційного навантаження, як видно з (18), відбувається у вигляді суперпозиції двох груп коливань – власних і супровідних, які зсунуті по фазі на прямий кут. Супровідні форми коливань обумовлені рухомим інерційним навантаженням і нетривіальні лише при його наявності. На основі наведеного методу двохвильового подання коливань можуть бути побудовані точні розв'язки та досліджені задачі про поперечні коливання зубчастого паска з натяжним роликом, завантаженої нерівномірно, з дискретними включеннями, конвеєрної стрічки, які рухаються у поздовжньому напрямку та інші задачі динаміки пружних систем за дії рухомого інерційного навантаження.

Література

1. Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. Москва: Наука, 1995. 223 с.
2. Горошко О. А. Собственные и сопровождающие колебания в системе с подвижными инерционными нагрузками: труды V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, (г. Киев, 1970 г.). Киев, 1970. С. 215–219.
3. Горошко О. О., Дем'яненко А. Г., Киба С. П. Двохвильові процеси в механічних системах. Київ: Либідь, 1991. 188 с.
4. Дем'яненко А. Г., Гурідова В. О. Короткий нарис досліджень динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням некласичним методом відокремлення змінних. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 47–57.
5. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. Львів: Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2002. 292 с.
6. Киба С. П., Дем'яненко А. Г. Узагальнення методу розділення змінних та деякі його застосування в механіці. Київ: НМК ВО МОУ, 1991. 120 с.
7. Пановко Я. Г. Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки. *Труды Ленинградского КВВИА*. 1946. Вып. 17. С. 54–69.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 724 с.
9. Steuding H. Die Schwingung von Tragern bei bewegten Lasten. *Jng. Acch*. 1934. P. 275–305.
10. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics. Trans ASME*. 1952. Vol. 19, No 2. P. 205–209.

References

1. Andrianov, I. V., Lesnichaya, V. A. & Manevich, L. I. (1995). Averaging method in statics and dynamics of ribbed shells. Moscow: Nauka.
2. Horoshko, O. A. (1970). Own and accompanying oscillations in a system with moving inertial loads. Proceedings of the V International Conference on Nonlinear Oscillations, (pp. 215–219). Kiev.
3. Horoshko, O. O., Demianenko, A. G. & Kiba S.P. (1991). Two-wave processes in mechanical systems. Kiev: Lybid.
4. Demianenko, A. G. & Guridova, V. O. (2017). A brief outline of the studies of the dynamics of elastic systems with moving inertial loading by the nonclassical method of separating the variables. Vìsnik Zaporìz'kogo nacìonal'nogo unìversitetu. Fìziko-matematičnì nauki, No. 2, pp. 47–57.
5. Kalenyuk, P. & Nytrebych, Z. (2002). Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method. Lviv: Vydavnytstvo Natsional'noho universytetu "L'vivs'ka politekhnika".
6. Kiba, S. P. & Demianenko, A. G. (1991). Generalization of the method of separation of variables and some of its application in mechanics. Kiev: NMK VO MOU.
7. Panovko, Ia. G. (1948). Historical essay on the development of the theory of dynamic action of a moving load. Trudy Leningradskogo KVVIA, Issue 17, pp. 8–38.
8. Tikhonov, A. N. & Samarskiy, A. A. (1966). Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka.
9. Steuding, H. (1934). Die Schwingung von Tragern bei bewegten Lasten. Jng. Acch., pp. 275–305.
10. Housner, G. W. (1952). Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics. Trans ASME, Vol. 19, No. 2, pp. 205–209.