УДК 512.643:517.952 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-02

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ВИРІШЕННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Ю. Н. Базилевич[1], І. А. Костюшко[2], О. С. Левчук[3]

[1]Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,
[2]Запорізький національний університет,
[3]Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»
bazilvch@ukr.net, kostushkoia5@gmail.com, olya.levchuck@gmail.com

Ключові слова:
системи лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку, приведення матриць, матриця перетворення.

Запропоновано новий підхід до вирішення систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. Використовуються методи одночасного приведення декількох матриць до діагонального або до блочно-діагонального вигляду шляхом застосування методу комутуючої матриці. Цей метод полягає в знаходженні в безлічі всіх матриць, комутуючих із заданими матрицями початкової системи диференціальних рівнянь, такої матриці, яка має як мінімум два різні власні значення.

Якщо система диференціальних рівнянь містить матриці другого порядку, кількість яких більше двох, то за умови існування комутуючої матриці наведена система диференціальних рівнянь поділяється на два незалежні лінійні диференціальні рівняння першого порядку і, таким чином, завжди має аналітичний розв’язок.

У випадку, коли порядок матриць вихідної системи більше двох, за допомогою матричного методу можна привести вихідні матриці порядку n до блочно-діагональної форми, тобто розділити початкову систему на дві підсистеми. Надалі застосовується той самий метод комутуючої матриці для отриманих підсистем. Якщо отримані підсистеми далі не поділяються на підсистеми, то навіть у такому вигляді завдання значно спрощене.

ABOUT ONE APPROACH TO THE SOLUTION OF LINEAR EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES OF THE FIRST ORDER

Yu. N. Bazilevich[1], I. A. Kostiushko[2], O. S. Levchuk[3]

[1]Prydniprovska State Academy of Civil Engineering and Architecture,
[2]Zaporizhzhia National University,
[3]National Technical University of Ukraine National Technical University of Ukraine
"Kyiv Igor Sikorsky Polytechnic Institute"
bazilvch@ukr.net, kostushkoia5@gmail.com, olya.levchuck@gmail.com

Key words:
systems of first-order linear differential equations in partial derivatives, matrix reduction, a transformation matrix.

The paper proposes a new approach to solving systems of linear first-order partial differential equations. We use the methods of simultaneous reduction of several matrices. Sometimes, this allows to get an analytical solution or significantly simplify the problem.

Systems of linear partial differential equations of the first order arise in various application areas. We well know the case when the system is described by two matrixes of coefficients. In this paper, we consider the case when there are over two matrices.

For simplicity, we first consider a system of two partial differential equations for two unknown functions: For simplicity, we first consider a system of two partial differential equations for two unknown functions: $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$:

$$A\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Here A, B and G are constant square matrixes of coefficients. Nondegenerate linear transformations of the system (1) are the replacement of variables and the multiplication of the system on the left by a non-singular matrix. Thus, transformations of matrices are reduced to their simultaneous multiplication on the left by one and on the right by another matrix.

When the matrix G is zero and one of the matrices (for example, B) is nondegenerate, the solution process corresponds to the reduction of the matrix pencil. The system is first multiplied on the left by the matrix inverse to B, and afterward, using a similarity transformation, the second matrix is reduced to its Jordan form. If this form is diagonal, we can divide the system into two independent equations and, thus, get a general solution of the system of equations. This case is analyzed in the literature. If the Jordan form is non-diagonal, the system can be reduced to a triangular form and one independent equation can be obtained, always integrable in quadrature. Substitution of this solution into the second equation allows us to get a general solution of the original system of differential equations.

If an equation of type (1) has over two matrices, then the similarity transformation applies to several matrices. We find the transformation using the method of the switching matrix. It consists in finding in the set of all matrices commuting with these matrices such a matrix T, which has at least two different eigenvalues. The columns of the desired similarity transformation matrix are the vectors of the canonical basis of the matrix T. Such a similarity transformation leads all the original matrices to the same block-diagonal form with two (at least) blocks on the main diagonal.

To find the set of all matrices that commute with these matrices, you can declare all the elements of the matrix as unknowns and make up the corresponding system of linear homogeneous algebraic equations. There are methods for finding a general solution to such a system of equations. If the dimension of the obtained general solution is greater than 1, then the splitting of the original system of equations is possible, otherwise, it is not. In the first case, we can divide the system into two independent equations and a general solution of the system of equations.

Next, we consider a system of equations with third-order matrices. First, we make an attempt using the commuting matrix method to bring the original matrices to a block-diagonal form, i.e. divide the equations into two subsystems of the first and second orders. Then - apply the same method for the obtained subsystem of the second order. If the subsystem of the second order is not divided into subsystems, then even in this form it considerably simplifies the task.

A similar approach is possible for higher order systems. Thus, the initial system of equations using matrix methods is divided into subsystems, which simplifies the process of their further solution.

Вступ. Системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку виникають у різних областях додатків. У разі, коли система описується двома матрицями коефіцієнтів, розв'язок може бути отриманим шляхом приведення пучка матриць. У роботі розглядається випадок, коли матриць більше двох, у тому числі коли і порядок матриць більше двох.

Для одночасного приведення декількох матриць до діагонального або до блочно-діагонального виду використовується метод комутуючої матриці.

Використання приведення пучка матриць. Система двох диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно двох невідомих функцій $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$ має вигляд:

$$A\begin{pmatrix}u_x\\ v_x\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}u_y\\ v_y\end{pmatrix} = G\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}. \quad (1)$$

Невироджені лінійні перетворення системи (1) – це:

а) заміна змінних $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}U\\ V\end{pmatrix}$, де S – неособлива матриця, U, V – нові функції змінних x, y;

б) множення системи ліворуч на неособливу матрицю H.

При цьому матриці A, B, G перетворяться до виду:

$$\hat{A} = HAS,\ \ \hat{B} = HBS,\ \ \hat{G} = HGS. \quad (2)$$

Випадок, коли матриця G – нульова і одна з матриць (наприклад, B) невироджена, загальновідомий. У цьому випадку процес рішення відповідає приведенню пучка матриць $A + \lambda B$. Систему (1) можно претворити до вигляду:

$$A_1 \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $A_1 = B^{-1}A$, E – одинична матриця. Надалі можна застосувати для матриць перетворення подібності, яке не міняє одиничну матрицю, а іншу матрицю приводить до її жорданової форми. Якщо ця форма діагональна, то можна розділити систему на два незалежні між собою рівняння і, таким чином, отримати загальний розв'язок системи рівнянь [7].

Якщо жорданова форма матриці A_1 недіагональна, то систему можна привести до трикутного виду і отримати одне незалежне рівняння, завжди інтегроване в квадратурі. Підстановка цього рішення в друге рівняння дозволяє отримати загальний розв'язок початкової системи диференціальних рівнянь.

Постановка задачі. У наведеній роботі розглядається рішення (чи спрощення) системи рівнянь (1) і аналогічних за допомогою перетворення (2) у випадку, коли матриць більше двох, у тому числі коли і порядок матриць більше двох.

Метод комутуючої матриці. Цей метод запропонований одночасно А. К. Лопатіним і Е. Д. Якубович [1, 2]. При цьому використовуються теореми теорії матриць [3]. Метод комутуючої матриці вже давно використовується для спрощення інших систем рівнянь [1, 2, 4, 6].

Розглянемо множину $\Lambda(B_\nu)$ усіх матриць, що комутують із заданими матрицями $B_\nu(\nu = \overline{1,m})$. Ця множина є алгеброю над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел і називається *централізатором* матриць $\{B_\nu\}$. Якщо існує матриця $T \epsilon \Lambda(B_\nu)$, що має хоча б два різні власні числа, то перетворення подібності $\tilde{B}_\nu = S^{-1} \cdot B_\nu \cdot S$ (де S — матриця, стовпцями якої є вектори канонічного базису матриці T) приводить усі матриці $\{B_\nu\}$ до однакового блочно-діагонального виду з двома (як мінімум) блоками на головній діагоналі.

Для знаходження централізатора (точніше кажучи, його базису) можна оголосити усі елементи матриці T невідомими і скласти систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, що відповідає матричним рівнянням

$$B_\nu T = TB_\nu, \quad \nu = \overline{1,m}.$$

Отримуємо νn^2 рівнянь с n^2 невідомими. Загальний розв'язок такої системи (при невеликому n) можна отримати відомими методами. Найбільш ефективні обчислювальні алгоритми запропоновано в [5].

Позначимо базис централізатора $\Lambda(B_\nu)$ через $W_1, W_2, \dots, W_r$. Якщо розмірність r централізатора дорівнює *1*, то увесь централізатор складається з матриць, кратних одиничній матриці. У цьому випадку приведення матриць B_ν до блочно-діагонального виду неможливо. Якщо $r > 1$, то в якості матриці T, яка використовується для знаходження перетворення, вибираємо матрицю базису W_k, що має хоч би два різні власні числа. Вектори її канонічного базису є стовпцями шуканої матриці S перетворення подібності. Особливий випадок, коли $r > 1$, але усі матриці басиза не мають різних власних чисел, розглянутий у [5].

Випадок, коли матриць більше двох. Для простоти викладання розглянемо застосування метода комутуючої матриці на наступному прикладі.

Розглядається система диференціальних рівнянь (1), у якій:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача полягає в спрощенні системи (1) шляхом «розщеплювання» її на два незалежні рівняння методом комутуючої матриці і подальшого отримання її загального розв'язку. Систему (1) помножимо ліворуч на матрицю B^{-1}, отримуємо нові матриці коефіцієнтів:

$$A_1 = B^{-1}A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_1 = B^{-1}G = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матриць A_1 і G_1знаходимо централізатор, тобто множину матриць T, що комутує одночасно з обома матрицями:

$$\begin{cases} A_1T = TA_1; \\ G_1T = TG_1. \end{cases} \qquad (3)$$

Загальний розв'язок (3) має вигляд:

$$T = aE + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де a і b – довільні сталі. У частинному випадку при $a = 0, b = 1$ матриця T стає наступною:

$$T^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Її власні числа дійсні і різні: $\lambda_{1,2} = \pm 1$, що означає можливість перетворення початкової системи (1) до двох незалежних рівнянь. Для цього складається матриця перетворення S, стовпцями якої є власні вектори матриці T^*:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Інакше кажучи, виконується заміна змінних:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U+V \\ U-V \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

де U, V – нові функції змінних x, y; система перетвориться до вигляду:

$$A_2\begin{pmatrix} U_x \\ V_x \end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} U_y \\ V_y \end{pmatrix} = G_2\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix},$$

де $A_2 = S^{-1}A_1S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G_2 = S^{-1}G_1S = = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отримана система містить два незалежні лінійні диференціальні рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} -U_x + U_y = -3U; \\ \quad V_y = -V. \end{cases}$$

Розв'язок цих рівнянь має вигляд: $U = = e^{3x} \cdot f(x+y)$; $V = \varphi(x) \cdot e^{-y}$, де f, φ – довільні функції вказаних аргументів.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

З урахуванням (4), отримуємо остаточний розв'язок системи рівнянь (1):

$$u = U + V = e^{3x} \cdot f(x+y) + \varphi(x) \cdot e^{-y};$$
$$v = U - V = e^{3x} \cdot f(x+y) - \varphi(x) \cdot e^{-y}.$$

Зауважимо, якщо метод комутуючої матриці показав неможливість розділення рівнянь системи рівнянь (1) на підсистеми, то ніяка заміна змінних не дозволяє розділити систему (1) [5].

Порядок матриць більше двох. У випадку системи диференціальних рівнянь третього (і більше) порядку спочатку можна спробувати за допомогою методу комутуючої матриці привести матриці коефіцієнтів до блочно-діагонального вигляду, тобто розділити рівняння на дві підсистеми менших порядків. Далі – застосувати той же метод для отриманих підсистем.

Як приклад розглянемо систему трьох диференціальних рівнянь відносно невідомих u, v, w – функцій незалежних змінних x, y, z:

$$E \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \\ w_x \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \\ w_y \end{pmatrix} + $$
$$+ B \cdot \begin{pmatrix} u_z \\ v_z \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

де

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 20 & 6 & -6 \\ 3 & 20 & -3 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Структура матриць централізатора T наступна:

$$T = \begin{pmatrix} a+b+c & b & -b \\ a & a+b+c & -a \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

тут a, b, c – довільні числа. Покладемо $a = 1$, $b = c = 0$, отримуємо комутуючу матрицю:

$$T^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

власні числа якої – дійсні і різні: $\lambda_1 = \lambda_2 = = 1$; $\lambda_3 = 0$.

Складемо матрицю перетворення S, стовпці якої – власні вектори матриці T^*:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Аналогічно до попереднього переходимо до нових невідомих функцій U, V, W з матрицею заміни змінних (6). Після цього система рівнянь приводиться до двох незалежних підсистем:

$$\begin{cases} U_x + 8U_y + 20U_z = 0; \\ V_x + 2U_y + 6V_y + 6U_z + 14V_z = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\{W_x + 7W_y + 17W_z = 0. \quad (8)$$

Розв'язок (8) має вигляд: $W(x, y, z) = = \vartheta(y - 7x, z - 17x)$, де ϑ – довільна функція своїх аргументів.

Для підсистеми (7) знову застосовуємо метод комутуючої матриці. Елемент централізатора для матриць $C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $F = = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$ може бути представлений наступним чином: $T^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді матриця заміни змінних має вигляд:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Від змінних U, V переходимо до нових невідомих функцій $\tilde{U}, \tilde{V}$ з матрицею заміни змінних (9). Після цього система рівнянь (7) приводиться до вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{U}_x + 8\tilde{U}_y + 20\tilde{U}_z = 0; \\ \tilde{V}_x + 6\tilde{V}_y + 14\tilde{V}_z = 0, \end{cases}$$

загальні розв'язки яких мають наступний вигляд:

$$\tilde{U}(x, y, z) = \varphi(y - 8x, z - 20x);$$
$$\tilde{V}(x, y, z) = \psi(y - 6x, z - 14x),$$

де φ, ψ – довільні функції вказаних аргументів.

Надалі переходимо до змінних U, V за допомогою матриці перетворення (9) та враховуємо розв'язок для функції W, отриманий раніше. Потім за допомогою матриці (6) отримуємо остаточний розв'язок вихідної системи (5):

$$u(x, y, z) = \varphi(y - 8x, z - 20x) + \\ +\psi(y - 6x, z - 14x);$$
$$v(x, y, z) = \varphi(y - 8x, z - 20x) + \\ +\vartheta(y - 7x, z - 17x);$$
$$w(x, y, z) = \varphi(y - 8x, z - 20x) + \\ +\psi(y - 6x, z - 14x) + \vartheta(y - 7x, z - 17x).$$

У ряді випадків повне розділення системи n диференціальних рівнянь на n незалежні рівняння неможливо, проте застосування цього підходу дозволяє значне спрощення початкової системи.

Розглянемо систему рівнянь (5), у якій

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 32 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для матриць A і B знаходимо комутуючу матрицю $T^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ і відповідну матрицю заміни змінних S:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вказана заміна змінних приводить матриці коефіцієнтів системи (5) до вигляду:

$$A_1 = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = S^{-1} \cdot B \cdot S = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 16 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, вихідна система (5) розбивається на дві підсистеми:

$$\begin{cases} U_x - 5U_z - V_z = 0, \\ V_x + 5V_y + 16U_z + 5V_z = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\{W_x + 11W_z = 0. \quad (11)$$

Розв'язок рівняння (11) має простий аналітичний вигляд: $W = F(11x - z; y)$, де F – довільна функція. Перша підсистема (10) другого порядку не розбивається на підсистеми, оскільки будь-яка матриця, що комутує з матрицями коефіцієнтів, кратна одиничній. Але навіть у такому вигляді завдання значно спрощене.

Висновки. Розглянуто новий підхід до рішення систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. За допомогою матричних методів початкова система розбивається на незалежні підсистеми, що значно спрощує процес їх подальшого рішення.

Література

1. Лопатин А. К. Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения.* 1968. Т. 4, № 3. С. 439–445.
2. Якубович Е. Д. Построение систем замещения для некоторого класса многомерных линейных систем автоматического управления. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1969. Т. 12, № 3. С. 362–377.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 576 с.
4. Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике: тезисы докладов 2-ой Моск. конф. / Под ред. Ю. Н. Павловского. Москва: ВЦ РАН, 2004. 213 с.
5. Базилевич Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики. Киев: Наук. думка, 1987. 156 с.
6. Базилевич Ю. Н., Костюшко И. А. О постановке задач точной декомпозиции линейных математических моделей. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2017. № 1. С. 77–82.
7. Колоколов И. В., Кузнецов Е. А., Мильштейн А. И. и др. Задачи по математическим методам физики. Москва: Эдиториал УРСС, 2000. 288 с.

References

1. Lopatin, A. K. (1968). The algebraic reducibility of systems of linear differential equations. I. Moskow: MAIK «Nauka /Interperiodika» Differentsialnyie uravneniya. Vol. 4, No. 3, pp. 439–445 (In Russian).
2. Yakubovich, E. D. (1969). Construction of replacement systems for a class of multidimensional linear automatic control systems. Izv. Vuzov, Radiofizika, Vol. 12, No. 3, pp. 362–377 (in Russian).
3. Gantmacher, F. R. (1977). The Theory of Matrices. Moskow: Nauka.
4. Pavlovskii, Yu. N. (Ed.). (2004). Decomposition methods in mathematical modeling and computer science. Tezisy dokladov 2-oy Moskovskoy konferentsii. Moskva: VTs RAN (in Russian).
5. Bazilevich, Yu. N. (1987). Numerical methods of decomposition in linear problems of mechanics Kiev: Naukova dumka (in Russian).
6. Bazilevich, Yu. N., & Kostyushko, I. A. (2017). On Formulation of Problems of Precise Decomposition of Linear Mathematical Models. Journal of Automation and Information Sciences, Vol. 49, No. 2, pp. 43–49.
7. Kolokolov, I. V., Kuznetsov, E. A., Milshteyn, A. I. et al. (2000). Tasks on mathematical methods of physics. Moscow: Editorial URSS. (In Russian).