УДК 539.3 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-03

ОРТОТРОПНИЙ ПРЯМОКУТНИК ПІД ВПЛИВОМ ПЛОСКОГО ШТАМПА

О. В. Белова, І. В. Щербина

Національна металургійна академія України
okbelova@rambler.ru, sherbinaiv@ukr.net

Ключові слова:
асимптотичний метод, метод малого параметра, ортотропний матеріал, прямолінійна анізотропія, модельна задача.

Механізми пошкодження композиційних і анізотропних матеріалів суттєво відрізняються від механізмів пошкодження однорідних та ізотропних матеріалів. Застосування методів лінійної механіки руйнування до композитів обмежене із-за анізотропії і неоднорідності структури таких матеріалів. Асимптотичний аналіз дозволяє спрогнозувати подальшу поведінку матеріалу або конструкції, обрати найкращий обчислювальний метод та розібратися у числовому матеріалі. Такий аналіз особливо ефективний в тих областях значень параметрів, де машинні обчислення зустрічають серйозні утруднення. Згідно з таким підходом асимптотичний аналіз рівнянь теорії пружності для ортотропних тіл виконується з використанням параметрів, що характеризують анізотропію. При цьому вихідні задачі теорії пружності зводяться до рекурентної послідовності крайових задач теорії потенціалу. Розв'язана задача про втискання плоского штампа в пружну ортотропну напівплощину центральною прикладеною силою. Передбачалось, що на середній ділянці має місце зчеплення штампа із пружною півплощиною. На бічних ділянках області контакту має місце ковзання, причому як з тертям, так й без тертя. Довжина ділянки зчеплення невідома та підлягає визначенню. Наведена нижче задача розв'язується авторами методом збурень [3].

CONTACT INTERACTION OF THE STAMP WITH THE RECTANGULAR PLATE

O. V. Belova, I. V. Shcerbina

National Metallurgical Academy of Ukraine
okbelova@rambler.ru, sherbinaiv@ukr.net

Key words:
asymptotic method, small parameter method, orthotropic material, rectilinear anisotropy, model problem.

Mechanisms of damage of composite and anisotropic materials essentially differ from mechanisms of damage of homogeneous and isotropic materials. Application of a method of linear mechanics of destructions to aggregates is limited because of anisotropy and heterogeneity of structure of such materials. The asymptotic analysis allows to predict the further behaviour of a material or a consruction, to choose the best computing method and to understand a numerical material. Such analysis is especially effective in those areas of value of parameters where computer evaluations are inconvenient. According to such approach the asymptotic analysis of the equations of the theory of an elasticity for orthotropic skew fields is fulfilled with application of the parameters describing anisotropy. Thus initial problems of the theory of an elasticity are reduced to recurrent sequence of boundary value problems of a potential theory.

Appreciable interest of researchers already enough long time is caused with contact problems in view of coupling and slippage. The problem about indentation of a flat die in resilient orthotropic half plane is solved is central by the enclosed force. It was supposed, that on an average site coupling a die with resilient half plane takes place. On lateral sites of area of contact sliding, and, both with friction [1], and without friction [2] takes place. The length of a site of coupling is unknown and is a subject to definition. In the further this problem was studied by many authors and various methods [3; 4]. The mentioned below problem is solved authors a method of indignations.

Вступ. Сьогодні особливий інтерес інженерів викликають конструкції з сучасних композиційних матеріалів. Проблеми контакту тіл з таких матеріалів визначають процеси міцності і довговічності споруд. Завдяки цьому можна обґрунтовано визначати доцільність застосування того чи іншого матеріалу в певних умовах експлуатації (при деформації, руйнуванні, дії зовнішніх сил). Наприклад, конструкцій з алюмінію, титану, сталі, армованих металевими волокнами композитів. Але сильно виражена анізотропія багатьох видів композитів призводить до значних складнощів при обчисленні основних характеристик їх напружено-деформованого стану.

Значний інтерес дослідників уже досить тривалий час викликають контактні задачі з урахуванням зчеплення та ковзання. Розв'язана задача про вдавлення плоского штампа в пружну ізотропну напівплощину центрально прикладеною силою. Передбачалося, що на середній ділянці має місце зчеплення штампа з пружною напівплощиною. На бічних ділянках області контакту має місце ковзання, причому як з тертям [1], так і без тертя [2]. Довжина ділянки зчеплення невідома і підлягає визначенню. Надалі ця задача вивчалася багатьма авторами і різними методами [3, 4]. Наведене нижче завдання вирішується авторами методом збурень [3].

Постановка задачі. Нехай пружний ортотропний прямокутник $0 \le x \le h,\ |y| \le b$ закріплений по краях $y = \pm b$. Головні напрямки анізотропії матеріалу прямокутника збігаються з декартовими осями координат $x,\ y$. У вільну грань прямокутника $x = 0,\ |y| \le b$ втискається жорсткий штамп з плоскою основою ширини $2l\ \ (l < b)$ центральною силою P_0 (штамп рухається поступально, паралельно осі Ox). Передбачається, що в області контакту штампа з прямокутником існують дві ділянки ковзання, що примикають до кінцевих точок області контакту, і ділянка зчеплення, що розташована між ними. У зонах ковзання зсувні зусилля спрямовані в протилежні сторони. Граничні точки ділянки зчеплення $\pm a$, які заздалегідь невідомі і повинні бути визначені в результаті виконання задачі, розташовані симетрично щодо осі Ox. Напруження в цих точках повинні бути безперервними. Протилежна грань прямокутника $x = h,$ $|y| < b$ залишається вільною. Прямокутник є пластиною товщини δ, працюючою в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Потрібно визначити закон розподілу напружень під штампом, в прямокутнику і розмір ділянки зчеплення.

Поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги прямокутника

$$B_1 u_{xx} + G u_{yy} + G\left(1 + \nu_2 B_1 / G\right) v_{xy} = 0,$$

$$G v_{xx} + B_2 v_{yy} + G\left(1 + \nu_1 B_2 / G\right) u_{xy} = 0$$

при наступних граничних умовах:

$$\sigma_{12} = \sigma_{11} = 0 \quad (x = h,\ |y| < b),$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \quad (x = 0,\ l < |y| < b),$$

$$u = const \quad (x = 0,\ |y| < l),$$

$$v = 0 \quad (x = 0,\ |y| < a),$$

$$u = v = 0 \quad (y = \pm b).$$

Метод розв'язання і результати. Математичні труднощі не дозволяють отримати точний аналітичний розв'язок такої задачі навіть для пружної ізотропної напівплощини. Тому для дослідження сформульованої задачі застосуємо асимптотический метод [2], який дозволяє розчленувати напружено-деформований стан пластини на дві складові. Кожна з цих складових знаходиться при послідовному розв'язанні крайових задач теорії потенціалу.

Установлено зв'язок між розмірами ділянки зчеплення в області контакту, коефіцієнтом тертя і жорсткостними характеристиками матеріалу пластини, причому вона виявляється такою ж, як і для напівсмуги. Це пояснюється характером даного напруженого стану (напружений стан типу граничного шару), який швидко змінюється в напрямку осі Ox.

На ділянці зчеплення отримаємо:

$$v_{x_2}^{2,0}=-\frac{2P_0}{2C_1\mu}\frac{\eta\sqrt{\alpha_*^2-\eta^2}}{\pi l_1\sqrt{GB_2}}\left(\sqrt{\frac{G}{B_1}}\frac{1}{\left(1-\eta^2\right)\left(\alpha_*^2-\eta^2\right)}\left[\left(1-\alpha_*^2\right)\Pi\left(\varphi,\frac{\alpha_*^2-\eta^2}{1-\eta^2},\alpha_*\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(1-\eta^2\right)F\left(\varphi,\alpha_*\right)\right]+\frac{\rho}{\left(1-\eta^2\right)}\Pi_1\left(\frac{1-\alpha_*^2}{1-\eta^2},\alpha_*'\right)\right),\quad \eta=\eta_2/l_2\,, \tag{1}$$

де $\Pi_1\left(\vartheta,\alpha_*'\right)$ – повний еліптичний інтеграл третього роду, $\Pi\left(\varphi,s,\alpha_*\right)$ – неповний еліптичний інтеграл третього роду, $\varphi=\arcsin\left(\left(c^2-1\right)/\left(c^2-\alpha_*^2\right)\right)^{1/2}$. Дотичне напруження під штампом $\left(x=0,\,|y|<l\right)$ в першому наближенні знаходиться за формулами

$$\sigma_{12}=sign\left(y\right)\rho\sigma_{11}^{1,0}\quad (a<|y|<l),$$

$$\sigma_{12}=Gv_x^{2,0}=\left(\sqrt{GB_2}/l\right)v_{x_2}^{2,0}\quad (|y|<a).$$

Відзначимо, що при коефіцієнті тертя $\rho=0$ маємо $q=0$, $\alpha=0$, тобто ділянка зчеплення зникає. З ростом ρ ділянка зчеплення зростає. Розмір ділянки зчеплення залежить також від характеристик жорсткості матеріалу пластини. Причому зі зменшенням $\left(G/B_1\right)^{1/2}$ при постійному $\rho\neq 0$ ділянка зчеплення збільшується.

При скінченних, але досить великих значеннях β в обчисленнях $v_{x_2}^{2,0}$ за формулою (1) можна використовувати розміри α_*, знайдені із співвідношень

$$q=e^{-\pi\chi},$$

$$\alpha=4\left(\left[\sum_{n=0}^{\infty}q^{\left(n+1/2\right)^2}\right]\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\right]^{-1}\right)^2,$$

$$K=\frac{\pi}{2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\right). \tag{2}$$

Дійсно, оскільки $\left(c^2-1\right)/\left(c^2-\alpha_*^2\right)=$ $=1-\left(1-\alpha_*^2\right)/\left(c^2-\alpha_*^2\right)$, то при $\alpha_*<1$, $c>1$ $\left(1-\alpha_*^2\right)/\left(c^2-\alpha_*^2\right)<1$ і отримуємо

$$\varphi=\arcsin\sqrt{\frac{c^2-1}{c^2-\alpha_*^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1-\alpha_*^2}{c^2-\alpha_*^2}\right)^{1/2}-O\left(\left(\frac{1-\alpha_*^2}{c^2-\alpha_*^2}\right)^{3/2}\right).$$

Значення $\alpha_*=\alpha$, відповідне $\varphi=\pi/2$, знаходиться із співвідношень (1). Значення α_*, відповідне $\varphi\approx 1/c$, виявляється незначним і в першому наближенні ним можна знехтувати.

Результати розв'язання zзадачі, чисельний аналіз. Тиск під штампом ($x=0$, $|y|<\ell$) у розкладанні розв'язку по параметру $\varepsilon^{1/2}$ [3] після перших двох наближень визначається наступним чином:

$$\sigma_{11}=\sigma_{11}^{1,0}+\varepsilon^{1/2}\sigma_{11}^{1,1}+o\left(\varepsilon\right),$$

де $\varepsilon=G/B_1$, $\sigma_{11}^{1,1}=B_1\left(u_x^{2,0}+u_x^{1,1}\right)$, $u_x^{2,0}=0$, а $u_x^{1,1}$ виражається співвідношенням:

$$u_x^{1,1}=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{G}{B_1}}\frac{1}{\ell}\frac{m\rho P_0}{2\sqrt{B_1B_2}c_1\mu}\frac{1}{\sqrt{\ell_1^2-\eta_1^2}}\ln\frac{\ell_1+\eta_1}{\ell_1-\eta_1}.$$

Отже, тиск під штампом набуває вигляду

$$\sigma_{11}=-\frac{P_0}{\pi\ell}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\gamma\times$$

$$\times\left(1+\varepsilon^{1/2}\frac{m\rho}{\pi}\sqrt{\frac{G}{B_2}}\ln\frac{1+t}{1-t}+o\left(\varepsilon\right)\right),$$

$$t=\eta_1/\ell_1,\quad \gamma=\pi/\left(2c_1\mu\ell_1\right). \tag{3}$$

Із співвідношення (3) отримаємо, що вплив границь прямокутника в порівнянні з напівплощиною виражається лише множником γ [1]. При врахуванні першого наближення по параметру ℓ_1/c_2 маємо

$$arctg\frac{2\sqrt{\left(\ell_1^2-\eta_2^2\right)\left(c_2^2-\ell_1^2\right)}}{c_2^2+\eta_2^2-2\ell_1^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\left(\ell_1^2-\eta_2^2\right)}}{c_2}+o\left(\frac{\ell_1^2}{c_2^2}\right);$$

$$\ln\frac{c_2^2+\eta_2^2-2\ell_1^2-2\sqrt{\left(\eta_2^2-\ell_1^2\right)\left(c_2^2-\ell_1^2\right)}}{c_2^2-\eta_2^2}=$$
$$=-\frac{2\sqrt{\left(\eta_2^2-\ell_1^2\right)}}{c_2}+o\left(\frac{\ell_1^2}{c_2^2}\right).$$

Тому на границі напівплощини $(\xi_2=0)$ отримаємо:

при $|\eta_2|<\ell_1$, $u_x^{2,0}=-\dfrac{mG}{B_1\ell}\dfrac{P_0}{\pi\sqrt{B_1B_2c_1c_2\mu}}$;

при $\ell_1<|\eta_2|<c_2$, $u_x^{2,0}=-\dfrac{mG}{B_1\ell}\times$

$$\times\left(\frac{\rho P_0}{\pi\sqrt{GB_2}c_1\mu}\frac{1}{\sqrt{\eta_2^2-\ell_1^2}}+\frac{P_0}{\pi\sqrt{B_1B_2c_1c_2\mu}}\right);$$

при $|\eta_2|>c_2$, $u_x^{2,0}=-\dfrac{mG}{B_1\ell}\dfrac{\rho P_0}{\pi\sqrt{GB_2}c_1\mu}\times$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\eta_2^2-\ell_1^2}}.$$

Тоді функція $\varphi_1^1\left(\zeta_1\right)$ матиме вигляд

$$\varphi_1^1=\frac{1}{\pi i}\frac{m\rho P_0}{2\sqrt{B_1B_2}c_1\mu}\frac{1}{\sqrt{\zeta_1^2-\ell_1^2}}\ln\frac{\ell_1+\zeta_1}{\ell_1-\zeta_1}+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\frac{m}{\pi}\sqrt{\frac{G}{B_1}}\frac{P_0}{\sqrt{B_1B_2c_1c_2\mu}}\left(2i\left[\frac{\pi}{2}-arctg\sqrt{\frac{\ell_1^2-\zeta_1^2}{c_2^2-\ell_1^2}}\right]+\right.$$
$$\left.+2\sqrt{\frac{\zeta_1+\ell_1}{\zeta_1-\ell_1}}\ln\frac{c_2+\sqrt{c_2^2-\ell_1^2}}{\ell_1}\right).\qquad(4)$$

При цьому враховується, що $\ln(-1)=i\pi$ та при $\ell_1<|\eta_2|<c_2$

$$arctg\left(i\sqrt{\frac{h_1^2-\ell_1^2}{c_2^2-\ell_1^2}}\right)=$$
$$=-\frac{i}{2}\ln\frac{\sqrt{c_2^2-\ell_1^2}-\sqrt{h_1^2-\ell_1^2}}{\sqrt{c_2^2-\ell_1^2}+\sqrt{h_1^2-\ell_1^2}}.$$

У цьому випадку тиск під штампом визначається виразом

$$\sigma_{11}=-\frac{P_0}{\pi\ell}\gamma\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left\{1+\varepsilon^{1/2}\frac{m}{\pi}\sqrt{\frac{G}{B_2}}\left[\rho\ln\frac{1+t}{1-t}+\right.\right.$$
$$+\sqrt{\frac{G}{B_1}}\frac{4\sqrt{1-t^2}}{\pi c_2}\left(arctg\sqrt{\frac{1-t^2}{c_2^2-1}}+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\left(c_2+\sqrt{c_2^2-1}\right)\right)\right]+o(\varepsilon)\right\}.\qquad(5)$$

При $h\to\infty$ маємо відповідну задачу для напівсмуги. У цьому випадку

$$\gamma=\pi/2K\left(\sin\left(\pi/2\beta\right)\right)\ell_1,$$
$$\ell_1=\left(2\beta/\pi\right)\sin\left(\pi/2\beta\right),$$
$$c_2=1/\sin\left(\pi/2\beta\right),\quad \beta=b/\ell.$$

Якщо при цьому і $b\to\infty$ $(\ell_1\to1,\ \gamma\to1,\ c_2\to\infty)$, то отримаємо розв’язок задачі для ортотропної напівплощини, а при $\rho=0$ – розв’язки відповідних задач для гладкого штампа. особливість напружень σ_{11} (5) в кутових точках штампа $|y|=\ell$ $\left(|t|=1\right)$ з урахуванням тертя така ж, як і для напівплощини, і є собою розкладанням у ряд по параметру $\varepsilon^{1/2}$ точної особливості [3]. Для гладкого штампа особливість у (5) співпадає с точною.

Тепер вплив границь прямокутника на тиск під штампом у порівнянні з напівплощиною виражається не тільки множником γ, як у (4), але і другим доданком у квадратних дужках рівності (5).

У таблиці 1 наведена залежність коефіцієнта γ від висоти прямокутника h^* при $\beta=2$; у таблиці 2 наведена залежність коефіцієнта γ від β. Ці залежності носять зростаючий характер, а для півплощини γ стає рівним 1.

Табл. 1

h^*	4	6	8	10	∞
γ	0,8459	0,9179	0,9341	0,9435	0,9456

Табл. 2

β	1,01	1,05	1,5	2,0	3,0
γ	≈ 0	0,6381	0,8808	0,9456	0,9758
β	5,0	7,0	10,0	20,0	
γ	0,9919	0,9969	0,9995	0,9999	

Література

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва: Наука, 1980. 303 с.
2. Фалькович С. В. О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения. *Прикладная математика и механика*. 1945. Т. 9., Вып. 5. С. 425–432.
3. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. Киев: Вища школа, 1991. 131 с.
4. Моссаковський В. І., Бискуп А. Г. Застосування інтегралів типу Коші до розв’язання плоских контактних задач. *Проблеми нелінійної механіки і фізики матеріалів*. 1999. С. 211–216.

References

1. Halyn, L. A. (1980). Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity. Moscow: Nauka.
2. Falkovych, S. V. (1945). On the pressure of a hard stamp on an elastic half-plane in the presence of areas of adhesion and sliding. Prikladnaya matematika i mekhanika, Vol. 9, Issue 5, pp. 425–432.
3. Manevych, L. I. & Pavlenko, A. V. (1991). Asymptotic method in micromechanics of composite materials Kiev: Vishcha shkola.
4. Mossakovs′kyy, V. I. & Byskup, A. H. (1999). Application of Cauchy type integrals to solving planar contact problems. Problemy neliniynoyi mekhaniky i fizyky materialiv, pp. 211–216.