

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-08

## ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ З В'ЯЗКОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ

**В. І. Козлов, Л. П. Зінчук, О. Ю. Шевченко**

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ*

*thermo\_imech@ukr.net, zinchuk\_imech@ukr.net, shevalie@ua.fm*

**Ключові слова:**

нестационарні коливання, в'язкопружний матеріал, перетворення Лапласа, метод скінченних елементів.

У даній роботі розглянуто задачу про динамічну поведінку тривимірного тіла обертання з в'язкопружного ортотропного матеріалу при деформації, що викликана механічним навантаженням, яке діє на частині поверхні тіла. Для побудови розв'язку використовується принцип мінімуму перетвореної за Лапласом потенційної енергії. Варіаційна задача механіки розв'язується методом скінченних елементів з використанням ізопараметричних шестигранних елементів з квадратичною апроксимацією компонент вектора переміщень у межах елемента. Для розв'язання отриманої системи інтегро-диференціальних рівнянь використовується метод розкладу компонент вектора переміщень за власними формами у поєднанні з методом усереднення Крилова-Боголюбова. На основі запропонованого підходу проведено чисельний аналіз динамічної поведінки двошарового в'язкопружного порожнистого циліндра у випадку, коли механічні параметри матеріалу шарів відрізняються на декілька порядків.

## NUMERICAL MODELING OF NON-STATIONARY VIBRATIONS OF LAYERED BODIES OF ROTATION FROM VISCOELASTIC MATERIAL

**V. I. Kozlov, L. P. Zinchuk, O. Yu. Shevchenko**

*S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*

*thermo\_imech@ukr.net, zinchuk\_imech@ukr.net, shevalie@ua.fm*

**Key words:**

non-stationary vibrations, viscoelastic material, Laplace transform, finite element method.

The study of the propagation of non-stationary vibrations in layered viscoelastic media presents a considerable scientific and practical interest. If the stress-strain state of structural elements under static load can be calculated using well-developed analytical and numerical methods, then the analysis of the propagation of non-stationary oscillations in inelastic bodies is a complicated mathematical problem. It should be noted that significant achievements in solving specific non-stationary problems are obtained as a result of the combination of numerical methods that allow the study of bodies of complex form and consider heterogeneity of material, with different analytical methods used to solve the received ordinary differential and integro-differential equations relative to the functions of time.

In this paper we consider the problem of the dynamic behavior of a three-dimensional body of rotation from a viscoelastic orthotropic material during deformation caused by mechanical load acting on a part of the body surface. To construct the solution, the principle of the minimum of transformed by Laplace the potential energy was used. The variational problem of mechanics is solved by the finite element method using 24-node hexahedral isoparametric elements with quadratic approximation of components of the vector of displacements within the element. To solve the obtained system of integro-differential equations, the modal superposition method in combination with the Krylov-Bogolyubov averaging method are used.

Computer simulation showed that the use of the Krylov-Bogolyubov method for solving integro-differential equations with respect to time makes it possible to obtain fairly exact numerical results on the distribution of stresses in space and time. On the basis of the proposed approach, a numerical analysis of the dynamic behavior of a two-layer viscoelastic hollow cylinder was performed in the case that the mechanical parameters of the material of the layers differ by several orders of magnitude.

**Вступ.** У зв'язку з широким використанням полімерних матеріалів у різних галузях сучасної техніки значний інтерес представляють дослідження нестационарних процесів в елементах конструкцій із в'язкопружних матеріалів при екстремальних умовах їх експлуатації.

Широке застосування в різних галузях механіки суцільного середовища, у тому числі і в теорії в'язкопружності, отримав метод скінченних елементів у варіаційній постановці [1, 2]. Основним недоліком варіаційних методів в теорії в'язкопружності є відсутність екстремальних властивостей відповідних функціоналів. Значний прогрес у розробці варіаційних методів механіки суцільного середовища було досягнуто після праць Гуртіна [3, 4], який відмовився від традиційного представлення скалярного добутку та ввів новий скалярний добуток у вигляді згортки. Це дозволило сформулювати достатньо загальний варіаційний принцип. Проте при цьому відповідні функціонали приймають на розв'язках динамічних задач не мінімальні, а лише стаціонарні значення. У роботі [4] показано, що властивість мінімальності має лише перетворена за Лапласом потенційна енергія. Існування мінімуму перетвореного функціоналу дозволило довести ряд теорем стосовно збіжності наближених і чисельних методів, що використовуються при розв'язанні динамічних задач. Варто зазначити, що значні досягнення при розв'язанні конкретних нестационарних задач отримані в результаті поєднання чисельних методів, які дозволяють досліджувати тіла складної форми і враховувати неоднорідність матеріалу, з різними аналітичними методами, що використовуються для розв'язання отриманих звичайних диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій часу.

Суттєвим кроком у розвитку методів розв'язання динамічних задач в'язкопружності варто вважати розробку методу усереднення Крилова-Боголюбова для розв'язання систем інтегро-диференціальних та інтегральних рівнянь [5]. Детальний виклад методу усереднення для динамічних задач в'язкопружності представлено у праці [6].

Розв'язанню ряду нестационарних задач в'язкопружності з використанням варіаційних принципів і різних методів розв'язку диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій часу присвячені наукові праці [7-14].

У даній роботі розглядається задача про динамічну поведінку тривимірного тіла обертання з в'язкопружного матеріалу при деформації, що викликана механічним навантаженням, яке діє на частині поверхні тіла. Варіаційна задача механіки розв'язується методом скінченних елементів з використанням ізопараметричних шестигранних елементів з квадратичною апроксимацією компонент вектора переміщень у межах елемента. Для розв'язання отриманої системи інтегро-диференціальних рівнянь використовується метод розкладу компонент вектора переміщень за власними формами коливань у поєднанні з методом усереднення Крилова-Боголюбова.

**Постановка задачі.** Розглянемо тіло обертання з ортотропного в'язкопружного матеріалу при деформації, що викликана дією поверхневих сил  $P_n$  на частині поверхні  $S_1$ . При цьому навантаження може бути функцією координат і часу. У цьому випадку динамічна задача зводиться до розв'язку системи тривимірних рівнянь в'язкопружності в циліндричній системі координат  $(z, r, \theta)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\sigma_{z\theta})}{\partial \theta} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\sigma_{r\theta})}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\sigma_{\theta\theta})}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

при наступних початкових умовах

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (t = 0) \end{aligned} \quad (2)$$

та граничних умовах на поверхні  $S_1$

$$P_{n\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} l_{\beta n}. \quad (3)$$

Тут  $w, u, v$  – осьова, радіальна і колова компоненти вектора переміщень,  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = z, r, \theta$ ) – компоненти тензора напружень,  $\rho$  – густина матеріалу,  $P_{n\alpha}$  – проекції зовнішніх поверхневих сил на осі циліндричної системи координат,  $l_{\beta n}$  ( $\alpha, \beta = r, z, \theta$ ) – напрямні косинуси зовнішньої нормалі  $\mathbf{n}$  до поверхні  $S_1$ .

Тензор малих деформацій пов'язаний з вектором переміщень співвідношеннями Коші

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Зв'язок між компонентами напружень і деформацій для ортотропного в'язкопружного матеріалу, коли напрямки координатних осей збігається з головними напрямками анізотропії, задається визначальними рівняннями виду

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= C_{zz} * \varepsilon_{zz} + C_{zr} * \varepsilon_{rr} + C_{z\theta} * \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{rr} &= C_{rz} * \varepsilon_{zz} + C_{rr} * \varepsilon_{rr} + C_{r\theta} * \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{\theta z} * \varepsilon_{zz} + C_{\theta r} * \varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta} * \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{zr} &= 2G_{zr} * \varepsilon_{zr}, \quad \sigma_{z\theta} = 2G_{z\theta} * \varepsilon_{z\theta}, \\ \sigma_{r\theta} &= 2G_{r\theta} * \varepsilon_{r\theta},\end{aligned}\quad (5)$$

де введено оператор згортки

$$\begin{aligned}C_{ij} * \varepsilon_{ij} &= C_{ij}(0)\varepsilon_{ij} - \int_0^t R_{ij}(t-\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau, \\ G_{ij} * \varepsilon_{ij} &= G_{ij}(0)\varepsilon_{ij} - \int_0^t S_{ij}(t-\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau \\ &(i, j = z, r, \theta),\end{aligned}$$

а  $C_{ij}(0), G_{ij}(0)$  – миттєві характеристики матеріалу,  $R_{ij}(t), S_{ij}(t)$  – функції, що описують релаксаційні властивості матеріалу.

Знаходження аналітичного розв'язку задачі (1)-(5) пов'язане зі значними математи-

чними труднощами, внаслідок чого для дослідження подібних задач застосовуються чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів.

**Методика розв'язання задачі.** Для розв'язання даної задачі використовується сформульований в [15] принцип мінімуму потенційної енергії в зображеннях (застосовується інтегральне перетворення Лапласа)

$$\delta \bar{\mathcal{E}} = 0, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2} \int_V [\bar{C}_{zz} \bar{\varepsilon}_{zz}^2 + \bar{C}_{rr} \bar{\varepsilon}_{rr}^2 + \bar{C}_{\theta\theta} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^2 + \\ &+ 2(\bar{C}_{zr} \bar{\varepsilon}_{zr} \bar{\varepsilon}_{rr} + \bar{C}_{z\theta} \bar{\varepsilon}_{z\theta} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + \bar{C}_{r\theta} \bar{\varepsilon}_{r\theta} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}) + \\ &+ 4(\bar{G}_{zr} \bar{\varepsilon}_{zr}^2 + \bar{G}_{z\theta} \bar{\varepsilon}_{z\theta}^2 + \bar{G}_{r\theta} \bar{\varepsilon}_{r\theta}^2) + \\ &+ \rho s^2 (\bar{w}^2 + \bar{u}^2 + \bar{v}^2)] dV - \\ &- \int_{S_1} (\bar{P}_{nz} \bar{w} + \bar{P}_{nr} \bar{u} + \bar{P}_{n\theta} \bar{v}) dS.\end{aligned}\quad (7)$$

$\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{C}_{ij}, \bar{G}_{ij}, \bar{P}_{ni}$  – зображення відповідно до компонент вектора переміщень та тензора деформацій, в'язкопружних характеристик матеріалу і компонент вектора зовнішнього навантаження;  $s$  – параметр інтегрального перетворення

$$\begin{aligned}(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{C}_{ij}, \bar{G}_{ij}, \bar{P}_{ni}) &= \\ &= \int_0^\infty (w, u, v, \varepsilon_{ij}, C_{ij}, G_{ij}, P_{ni}) e^{-sx} dx.\end{aligned}$$

Варіаційна задача механіки  $\delta \bar{\mathcal{E}} = 0$  у тривимірній постановці розв'язується методом скінченних елементів з використанням 24 вузлових шестигранних ізопараметричних елементів. За глобальну систему координат, у якій об'єднуються усі скінченні елементи, обирається циліндрична система координат  $(z, r, \theta)$ . Як локальна система координат, у якій визначаються апроксимуючі функції і виконується інтегрування, використовується допоміжна нормалізована система координат. Для побудови базисних функцій, що апроксимують складові вектора переміщень у межах елемента, використовуються алгебраїчні і тригонометричні поліноми. При цьому припускається, що перетворені за Лапласом амплітуди компонент

вектора переміщень апроксимуються виразами

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{w}_i, \quad \bar{u} = \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{u}_i, \\ \bar{v} &= \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{v}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут  $\bar{w}_i, \bar{u}_i, \bar{v}_i$  – вузлові значення перетворених за Лапласом компонент вектора переміщень, а  $N_i$  – апроксимуючі функції, які являють собою комбінації алгебраїчних  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) і тригонометричних  $H_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) поліномів виду

$$\begin{aligned} N_i &= L_i H_1 \quad (i = \overline{1, 8}), \quad N_i = L_{i-8} H_2 \quad (i = \overline{9, 16}), \\ N_i &= L_{i-16} H_3 \quad (i = \overline{17, 24}), \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), \\ L_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \\ L_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta+1), \\ L_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \\ L_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad L_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi), \\ L_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad L_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi), \\ H_1(\theta) &= \frac{\sin(\theta-\theta_2) - \sin(\theta-\theta_3) + \sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_2) - \sin(\theta_1-\theta_3) + \sin(\theta_2-\theta_3)}, \\ H_2(\theta) &= \frac{\sin(\theta-\theta_3) - \sin(\theta-\theta_1) + \sin(\theta_3-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_3) - \sin(\theta_2-\theta_1) + \sin(\theta_3-\theta_1)}, \\ H_3(\theta) &= \frac{\sin(\theta-\theta_1) - \sin(\theta-\theta_2) + \sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_1) - \sin(\theta_3-\theta_2) + \sin(\theta_1-\theta_2)}. \end{aligned}$$

Апроксимуючі функції вибирались таким чином, щоб алгебраїчні поліноми  $L_j$  описували напружено-деформований стан у площині  $(z, r)$ , а тригонометричні функції  $H_k$  – по коловій координаті  $\theta$ . Функції форми  $N_i$ , які входять до виразів (8), задовольняють умові  $\sum_{i=1}^{24} N_i = 1$ .

Зв'язок між локальними координатами  $\xi, \eta$  та циліндричними координатами  $r, z$  встановлюється за допомогою виразів

$$r = \sum_{i=1}^8 L_i r_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 L_i z_i.$$

Представлення компонент тензора деформацій можна знайти за методикою, описаною в [13].

Механічні навантаження, що входять у (7), також апроксимуються функціями форми в межах кожного скінченного елемента

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nz} &= \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{P}_{nz,i}, \quad \bar{P}_{nr} = \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{P}_{nr,i}, \\ \bar{P}_{n\theta} &= \sum_{i=1}^{24} N_i \bar{P}_{n\theta,i}. \end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля першу варіацію функціонала (7), можна переконатися, що рівняння Ейлера і природні граничні умови функціонала  $\bar{\mathcal{E}}$  збігаються з перетвореними за Лапласом рівняннями (1) і (3).

Мінімізуючи функціонал (7) з урахуванням апроксимуючих функцій (9), для визначення перетворених за Лапласом компонент вектора вузлових переміщень у глобальній системі координат отримаємо систему рівнянь

$$\mathbf{M}\bar{U}S^2 - \bar{C}\bar{U} + \mathbf{K}\bar{U} = \bar{P}, \quad (10)$$

де  $\mathbf{M}$  – матриця мас,  $\mathbf{K}$  – матриця жорсткості,  $\bar{C}$  перетворена за Лапласом матриця втрат ( $\bar{C}(\bar{R}_{ij}, \bar{S}_{ij})$ ),  $\bar{P}$  – перетворений за Лапласом вектор зовнішнього навантаження, в компоненти якого входять значення механічного навантаження у поверхневих вузлових точках,  $\bar{U}$  – вектор перетворених за Лапласом вузлових переміщень  $\bar{w}_i, \bar{u}_i, \bar{v}_i$ .

Виконавши зворотне перетворення Лапласа, для визначення компонент вектора переміщень в вузлових точках отримаємо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} - \mathbf{C}(R_{ij}(t), S_{ij}(t)) \mathbf{U} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}. \quad (11)$$

Математично рівняння (11) являє собою систему лінійних інтегро-диференціальних рівнянь другого порядку. Методи розв'язування рівняння (11) діляться на дві групи: методи прямого інтегрування і розкладання за власними формами (метод суперпозиції

гармонік). До прямих методів інтегрування відносяться наступні чисельні методи: метод скінчених різниць, метод Гальоркіна, метод Хаболта, метод Вільсона, метод Ньюмарка та його модифікації [1, 16].

При використанні прямих методів інтегрування розв'язок рівняння (11) знаходиться за допомогою чисельної покрокової процедури, яка дозволяє отримати розв'язок не в будь-який момент часу  $t$ , а тільки на окремих відрізках часу  $\Delta t$ , тобто отримати розв'язок у дискретних точках інтервалу. Наведений аналіз розв'язків у цих роботах показує, що використання прямих методів інтегрування ефективно, якщо потрібно знайти розв'язок на порівняно короткому часовому інтервалі. Це пояснюється тим, що прямі методи є неявними умовно стійкими методами другого порядку. У праці [17] пропонується для збільшення точності розв'язку використовувати абсолютно стійкі методи більш високого порядку точності.

Алгоритми розв'язання нестационарних задач теплопровідності, механіки деформованого твердого тіла, механіки рідини та ін. методом суперпозиції гармонік у поєднанні з методом скінчених елементів описано в [2, 16].

Розв'язок рівняння (10) представимо у формі нескінченного ряду

$$\bar{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(s) \mathbf{W}_n(z, r, \theta). \quad (12)$$

При цьому вектор власних функцій  $\mathbf{W}_n(z, r, \theta)$  визначається з розв'язку відповідної задачі про вільні коливання пружного тіла обертання з миттєвими характеристиками матеріалу

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \mathbf{W}_n(z, r, \theta) = 0, \quad (13)$$

де  $\omega_n$  – власні частоти коливань.

Зауважимо, що вектор власних функцій  $\mathbf{W}_n(z, r, \theta)$  складається з компонентів векторів власних функцій кожної із складових вектора зміщень у вузлових точках

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}_n(z, r, \theta) = \\ & = \mathbf{W}_n(w_n(z, r, \theta), u_n(z, r, \theta), v_n(z, r, \theta)). \end{aligned}$$

Відповідно до рівняння (13) вектори  $\mathbf{W}_n$  ортогональні до матриць  $\mathbf{K}$  та  $\mathbf{M}$ . При цьому

$$\mathbf{W}_n^T \mathbf{M} \mathbf{W}_m = 0, \quad \mathbf{W}_n^T \mathbf{K} \mathbf{W}_m = 0 \quad (14)$$

при  $n \neq m$ ,

але ці добутки не дорівнюють нулеві у випадку, коли  $n = m$ .

Кожний ортонормований власний вектор відповідно до умов ортогональності задовольняє співвідношенням

$$\mathbf{W}_n^T \mathbf{M} \mathbf{W}_n = 1, \quad \mathbf{W}_n^T \mathbf{K} \mathbf{W}_n = \omega_n^2. \quad (15)$$

Підставляючи вираз (12) у перетворене за Лапласом рівняння (10) і домножуючи ліву і праву частини рівняння на транспонований вектор власних функцій, отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь у просторі зображень

$$\begin{aligned} s^2 \mathbf{W}_m^T \mathbf{M} \mathbf{W}_n \bar{f}_n(s) + \mathbf{W}_m^T \mathbf{K} \mathbf{W}_n \bar{f}_n(s) = \\ = \mathbf{W}_m^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{W}_n \bar{f}_n(s) + \mathbf{W}_m^T \bar{\mathbf{P}} \end{aligned} \quad (n, m = 1, 2, \dots),$$

яку з урахуванням співвідношень (14)-(15) запишемо у вигляді

$$s^2 \bar{f}_n(s) + \omega_n^2 \bar{f}_n(s) = \bar{\mathbf{D}}_{mn} \bar{f}_m(s) + \bar{\mathbf{Q}}_n(s), \quad (16)$$

де  $\bar{\mathbf{D}}_{mn} = \mathbf{W}_m^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{W}_n$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}_n = \mathbf{W}_n^T \bar{\mathbf{P}}$ .

Для широкого класу в'язкопружних матеріалів одним з ефективних методів розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь, що відповідає алгебраїчній системі (16), є метод усереднення Крилова–Боголюбова [5, 6].

Відповідно до методики [7-9] представимо розв'язок алгебраїчної системи (16) у вигляді суми квазістатичної і динамічної складових

$$\bar{f}_n(s) = \bar{f}_n^{st}(s) + \bar{f}_n^d(s), \quad (17)$$

де  $\bar{f}_n^{st}(s)$  – розв'язок нескінченної системи алгебраїчних рівнянь

$$\omega_n^2 \bar{f}_n^{st}(s) = \bar{\mathbf{D}}_{mn} \bar{f}_m^{st}(s) + \bar{\mathbf{Q}}_n(s). \quad (18)$$

Система (18) отримується при розв'язанні квазістатичної задачі варіаційним методом. Припустимо, що розв'язок квазістатичної задачі відомий. Тоді, розкладаючи його у ряд за власними функціями  $\mathbf{W}_n$ , отримаємо

$$U^{st} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{st}(t) W_n(z, r, \theta). \quad (19)$$

Динамічну складову знаходимо з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь

$$(s^2 + \omega_n^2) \overline{f_n^d}(s) = \overline{D_{mn}} \overline{f_m^d}(s) - s^2 \overline{f_n^{st}}(s). \quad (20)$$

Безпосередньо розв'язати систему рівнянь (20) доволі складно, тому відповідно до підходу в [8, 9] розглянемо допоміжну систему рівнянь

$$(s^2 + \omega_n^2) \overline{g_n}(s) = \overline{D_{mn}} \overline{g_m}(s) - s. \quad (21)$$

$$g_n(t) = e^{-\alpha_{1n} t} \left[ \cos(\omega_n - \alpha_{2n}) t + \frac{\alpha_{1n}}{\omega_n - \alpha_{2n}} \sin(\omega_n - \alpha_{2n}) t \right]. \quad (24)$$

Коефіцієнти  $\alpha_{1n}$  і  $\alpha_{2n}$  в (24) є функціями інтегральних характеристик матеріалу і визначаються виразами

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} &= \frac{1}{2\omega_n} \int_0^{\infty} D_{mn}(t) \sin \omega_n t dt, \\ \alpha_{2n} &= \frac{1}{2\omega_n} \int_0^{\infty} D_{mn}(t) \cos \omega_n t dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Використовуючи теорему про згортки, розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь, що відповідає алгебраїчній системі (20), можна представити у вигляді [9]

$$f_n^d(t) = -f_n^{st}(t) + \int_0^t f_n^{st}(\tau) h_n(t-\tau) d\tau, \quad (26)$$

$$h_n(t) = \frac{\alpha_{1n}^2 + (\omega_n - \alpha_{2n})^2}{\omega_n - \alpha_{2n}} e^{-\alpha_{1n} t} \sin(\omega_n - \alpha_{2n}) t.$$

У разі застосування описаного вище підходу виникає необхідність у розв'язанні квазістатичної задачі в'язкопружності. Одним з найбільш простих і ефективних методів є метод Шепері [6,18]. У даній роботі з метою значного спрощення обчислень розв'язок квазістатичної задачі знаходиться з використанням миттєвих значень характеристик матеріалу (розв'язується пружна задача), а для опису в'язкопружних властивостей матеріалу при знаходженні розв'язку динамічної задачі використовується ядро релаксації, яке визначається дробово-експотенціальною функцією А. Р. Ржаніцина [19]

У просторі оригіналів їй відповідає нескінченна система інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 g_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 g_n(t) = D_{mn} g_m(t) \quad (22)$$

з початковими умовами

$$g_n(0) = -1, \quad \frac{dg_n(0)}{dt} = 0. \quad (23)$$

Для розв'язання нескінченної системи (22) при початкових умовах (23) використаємо метод усереднення Крилова–Боголюбова [5, 6]. У результаті отримаємо

$$R = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (27)$$

де  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – деякі додатні числа,  $0 < \alpha < 1$ .

У цьому випадку вирази (25) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} &= \frac{A\Gamma(\alpha)\omega_n}{2(\beta^2 + \omega_n^2)^{\alpha/2}} \sin\left(\alpha \arctg \frac{\omega_n}{\beta}\right), \\ \alpha_{2n} &= \frac{A\Gamma(\alpha)\omega_n}{2(\beta^2 + \omega_n^2)^{\alpha/2}} \cos\left(\alpha \arctg \frac{\omega_n}{\beta}\right), \end{aligned}$$

де  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функція.

У роботі [19] показано, що залежно від значень параметрів  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ядро Ржаніцина дає можливість описати в'язкопружні властивості широкого класу полімерних матеріалів.

**Аналіз чисельних результатів.** З використанням розробленої методики було розв'язано задачу про динамічну поведінку порожнистого двошарового циліндра, що перебуває під дією внутрішнього тиску  $P_r = P_0 H(t)$  ( $H(t)$  – одинична функція Гевісайда). Припускалось, що шари циліндру припасовані один до одного таким чином, що впродовж усього процесу деформування між ними виконуються умови ідеального механічного контакту.

У цьому випадку загальний розв'язок нестационарної задачі можна записати у вигляді

$$U(w, u, v) = U^{st} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_0}{\omega_n^2} \mathbf{W}_n(w_n, u_n, v_n) f_n(t),$$

де

$$f_n(t) = e^{-\alpha_{1n} t} \times \left[ \cos(\omega_n - \alpha_{2n})t + \frac{\alpha_{1n}}{\omega_n - \alpha_{2n}} \sin(\omega_n - \alpha_{2n})t \right].$$

При розв'язанні квазістатичної задачі та узагальненої задачі на власні значення припускали, що зовнішній шар циліндра (оболонку) виготовлено з циліндрично ортотропного матеріалу, а внутрішній шар – з ізотропного матеріалу. Ортотропний матеріал мав наступні характеристики [20]:  $E_{zz} = 0,46 \cdot 10^{10}$  Па,  $E_{rr} = E_{\theta\theta} = 2,5 \cdot 10^{10}$  Па,  $G_{zr} = G_{z\theta} = 0,33 \cdot 10^{10}$  Па,  $G_{r\theta} = 1,14 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_{zr} = \nu_{z\theta} = 0,11$ ;  $\rho_0 = 0,27 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>. Для внутрішнього ізотропного шару прийнято, що  $E_{zz} = 0,5 \cdot 10^7$  Па,  $\nu = 0,45$ ;  $\rho_0 = 0,12 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>. Чисельні розрахунки проводилися для циліндра довжиною 2 м з

внутрішнім радіусом 0,1 м, зовнішнім радіусом 0,5 м та товщиною зовнішнього шару (оболонки) 0,025 м.

Для дослідження впливу в'язкості матеріалу на характер розподілу динамічних напружень в обох шарах використовувалося ядро А.Р. Ржаніцина (27) при таких значеннях сталих:  $A = 0,03; 0,1$  та  $\alpha = 0,1$ ;  $\beta = 0,003$ . Стала у виразі для тиску  $P_0 = 0,1 \cdot 10^5$  Па.

При скінченно-елементному моделюванні половину меридіонального перерізу тіла розбивали на 680 шестиграних скінченних елементів з 5100 вузловими точками. При розкладанні розв'язку за гармоніками використовувалося 11 членів ряду.

На рис. 1, 2 показано розподіл радіальних та колових напружень уздовж радіуса циліндра при  $z = 0$  та  $t = 1$  с. Суцільні криві відповідають квазістатичному розв'язку задачі, а штрихові та штрих-пунктирні криві – розв'язку динамічної задачі відповідно при  $A = 0,1$  та  $A = 0,03$ .

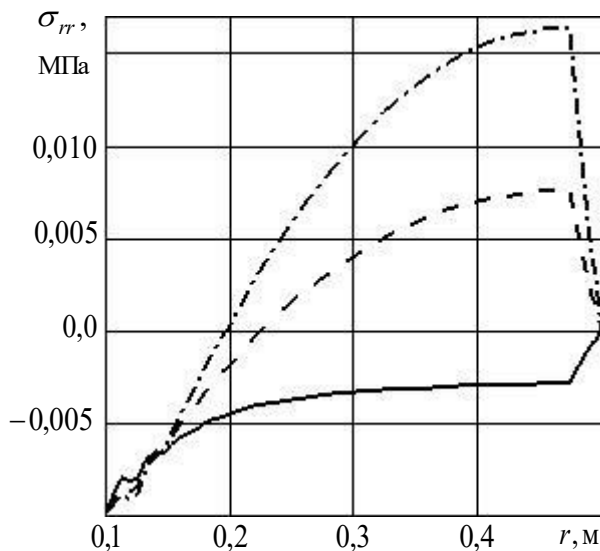


Рис. 1. Розподіл радіальних напружень  $\sigma_{rr}$  уздовж радіуса

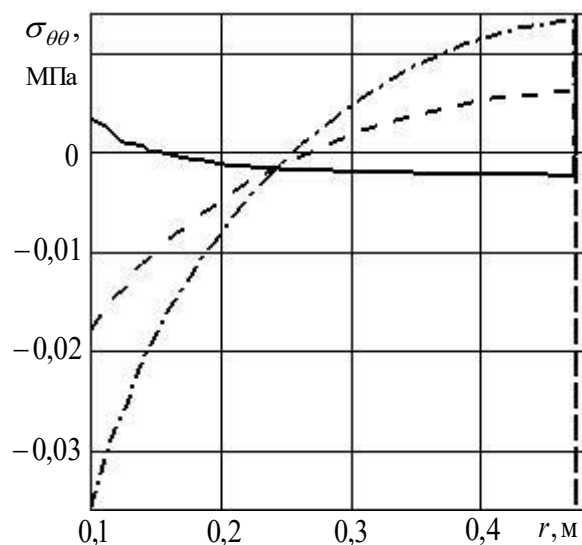
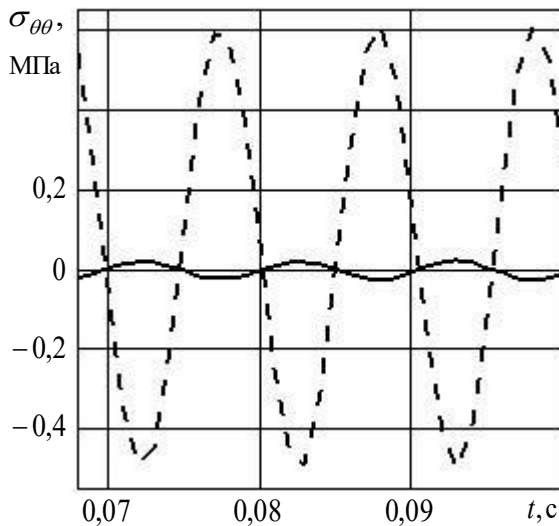


Рис. 2. Розподіл колових напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  уздовж радіуса



**Рис. 3.** Розподіл колових напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  залежно від часу в околі контакту шарів

Аналізуючи отримані чисельні результати, можна зробити висновок про достатньо хороше виконання граничних умов для радіальних напружень  $\sigma_{rr}$  на поверхнях циліндра та рівність радіальних напружень в області контакту шарів циліндра.

Розподіл колових напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  залежно від часу в околі контакту шарів при  $z = 0$  представлено на рис. 3. Суцільна крива відповідає розв’язку для внутрішнього шару ( $r = 0,472\text{ м}$ ), а пунктирна показує зміну напружень у зовнішньому тонкому шарі ( $r = 0,477\text{ м}$ ). Наведені на цьому рисунку графіки ілюструють розподіл напружень на границі двох шарів у випадку, коли механі-

чні характеристики матеріалів відрізняються на декілька порядків. Отже, наведені результати вказують на суттєвий вплив неоднорідності матеріалу на розподіл напружень в тілі.

**Висновки.** У роботі на основі варіаційного принципу мінімуму перетвореної за Лапласом потенційної енергії та методу скінченних елементів запропоновано підхід до розв’язку тривимірних задач в’язкопружності для достатньо загальних моделей в’язкопружної поведінки матеріалу.

Виокремлення квазістатичної та динамічної складових задачі та використання методу суперпозиції гармонік для розв’язку динамічної задачі дозволило отримати систему інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій часу.

Комп’ютерне моделювання показало, що використання методу Крилова-Боголюбова для розв’язання інтегро-диференціальних рівнянь відносно часу дає можливість отримати достатньо точні чисельні результати про розподіл напружень у просторі та часі. На основі запропонованого підходу проведено чисельний аналіз динамічної поведінки двошарового в’язкопружного порожнистого циліндра у випадку, коли механічні параметри матеріалу шарів відрізняються на декілька порядків.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

### Література

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Москва: Стройиздат, 1982. 447 с.
2. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Ленинград: Судостроение, 1979. 263 с.
3. Gurtin M. E. Variational principles for linear elastodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. Iss. 1. P. 34–50.
4. Benthien G., Gurtin M. E. A principle of minimum transformed energy in linear elastodynamics. *J. Appl. Mech.* 1970. Vol. 37. No.4. P. 1147–1149.
5. Митропольский Ю. А., Филатов А. Н. Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений. *Український математичний журнал*. 1972. Т. 24. Вып. 1. С.30–48.
6. Москвитин В. В. Сопротивление вязко-упругих материалов. Москва: Наука, 1972. 328 с.



7. Коваленко А. Д., Карнаухов В. Г., Козлов В. И. Динамические задачи термоупругости и термовязкоупругости. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. Киев: Наук. думка, 1973. Вып.13. С. 3–11.
8. Kozlov V. I., Kucher N. K. Dynamic behavior of multilayer cylindrical structures with transient loads. *Strength of Materials*. 1980. Vol. 12. Iss. 5. P. 639–648.
9. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наук. думка, 1982. – 258с.
10. Kozlov V. I., Motovilovets I. A. Numerical study of the dynamic behavior of a body of revolution. *Soviet Applied Mechanics*. 1985. Vol. 21. Iss. 4. P. 380–386.
11. Rasskazov A. O., Kozlov A. V. Nonaxisymmetric vibrations of a shell of revolution made of a viscoelastic material under nonstationary loading. *Strength of Materials*. 1999. Vol. 31. Iss. 3. P. 260–266.
12. Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В. Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин с помощью распределенных пьезоэлектрических включений. *Акустичний вісник*. 2002. Т.5. № 4. С. 15–32.
13. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Січко В. М., Завгородній А. В. Тривимірні задачі про коливання та дисипативний розігрів тіл обертання з пасивних і п'єзоактивних в'язкопружних матеріалів. Миколаїв: Ілліон, 2017. 126 с.
14. Дубенець В. Г., Савченко О. В., Деркач О. Л. Нестационарні коливання конструкцій з електров'язкопружними дисипативними накладками. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2015. № 1. С. 15–21.
15. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К. Принцип минимума преобразованной энергии в динамических задачах линейной теории вязкоупругости. *Док. АН УССР. Сер.А*. 1976. №8. С.712–715.
16. Bathe K. J. Finite element procedures. 2nd ed. Watertown, MA: K.J. Bathe, 2016. 1068 p.
17. Исаков Н. Ю., Исполов Ю. Г., Шабров Н. Н. Метод численного интегрирования уравнений динамики больших конечноэлементных моделей. *Проблемы прочности*. 1987. № 12. С. 91–95.
18. Schapery R. A. Thermomechanical behavior of viscoelastic media with variable properties subjected to cyclic loading. *J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32, No. 3. P. 611–619.
19. Koltunov A. A. Choice of kernels in solving problems involving creep and relaxation. *Polymer Mechanics*. 1966. Vol. 2. Iss. 4. P. 303–311.
20. Savchenko V. G., Shevchenko Yu. N. Nonaxisymmetric thermal stress state of laminated rotational bodies of orthotropic materials under nonisothermic loading. *Mechanics of Composite Materials*. 2004. Vol. 40. Iss. 6. P. 473–488.

### References

1. Batte, K. & Wilson, E. (1982). Numerical methods of analysis and the finite-element method. Moscow: Strojizdat.
2. Connor, J. J. & Brebbia, C. A. (1979). Finite element techniques in fluid mechanics. Leningrad: Sudostroenie.
3. Gurtin, M. E. (1964). Variational principles for linear elastodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Vol. 16, Iss. 1, pp. 34–50.
4. Benthien, G. & Gurtin, M. E. (1970). A Principle of Minimum Transformed Energy in Linear Elastodynamics. *J. Appl. Mech.*, 37(4), pp. 1147–1149.
5. Mitropolskiy, Yu. A. & Filatov, A. N. (1972). Averaging of integro-differential and integral equations. *Ukr. Mat. Zhurnal*, Vol. 24, Iss. 1, pp. 30–48.
6. Moskvitin, V. V. (1972). Resistance of viscoelastic materials. Moscow: Nauka.
7. Kovalenko, A. D., Karnaukhov, V. G. & Kozlov, V. I. (1973). Dynamic problems of thermoelasticity and thermoviscoelasticity. *Тепловыие napryazheniya v elementah konstruktsiy*, Issue 13, pp. 3–11.
8. Kozlov, V. I. & Kucher, N. K. (1980). Dynamic behavior of multilayer cylindrical structures with transient loads. *Strength of Materials*, Vol. 12, Iss. 5, pp. 639–648.

9. Karnaukhov, V. G. (1982). Coupled problems of thermoviscoelasticity. Kiev: Naukova Dumka.
10. Kozlov, V. I. & Motovilovets, I. A. (1985). Numerical study of the dynamic behavior of a body of revolution. *Soviet Applied Mechanics*, Vol. 21, Iss. 4, pp. 380–386.
11. Rasskazov, A. O. & Kozlov, A. V. (1999). Nonaxisymmetric vibrations of a shell of revolution made of a viscoelastic material under nonstationary loading. *Strength of Materials*, Vol. 31, Iss. 3, pp. 260–266.
12. Karnaukhov, V. G., Kozlov, A. V. & Pyatetskaya, E. V. (2002). Damping vibrations of viscoelastic plates using distributed piezoelectric inclusions. *Akustychnyi visnyk*, Vol. 5, No. 4, pp. 15–32.
13. Karnaukhov, V. G., Kozlov, V. I., Sichko, V. M. & Zavgorodniy, A. V. (2017). Three-dimensional problems of oscillation and dissipative heating of revolution bodies from passive and piezoactive viscoelastic materials. Mykolaiv: Illion.
14. Dubenets, V. G., Savchenko, O. V. & Derkach, O. L. (2015). Non-stationary oscillations of constructions with electro-visco-elastic dissipative overlays. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh*, No. 1, pp. 15–21.
15. Karnaukhov, V. G. & Senchenkov, I. K. (1976). The minimum principle of transformed energy in dynamic problems of the linear theory of viscoelasticity. *Dok. AN USSR. Ser. A*, No. 8, pp. 712–715.
16. Bathe, K. J. (2016). *Finite element procedures*, 2nd ed. Watertown, MA: K.J. Bathe.
17. Isakov, N. Yu., Ispalov, Yu. G. & Shabrov, N. N. (1987). A method of numerical integration of dynamic equations of large finite-element models. *Probl. Prochn.*, No. 12, pp. 91–95.
18. Schapery, R. A. (1965). Thermomechanical behavior of viscoelastic media with variable properties subjected to cyclic loading. *J. Appl. Mech*, Vol. 32, No. 3, pp. 611–619.
19. Koltunov, A. A. (1966). Choice of kernels in solving problems involving creep and relaxation. *Polymer Mechanics*, Vol. 2, Iss. 4, pp. 303–311.
20. Savchenko, V. G. & Shevchenko, Yu. N. (2004). Nonaxisymmetric thermal stress state of laminated rotational bodies of orthotropic materials under nonisothermic loading. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 40, Iss. 6, pp. 473–488.