УДК 539.371 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-09

ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ МАТРИЦЬ ТИПУ ГРІНА ТА МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ В ЗАДАЧІ ПРО СТАТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ КРУГЛИХ ПЛАСТИН ДИСКРЕТНО-ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

С. А. Левчук, А. А. Хмельницький, С. П. Швидка

Запорізький національний університет
kpmm.mf@znu.edu.ua

Ключові слова:
кругла пластина дискретно-змінної товщини, крайова та складена задача, складена конструкція, матриця типу Гріна, матрична алгебра.

Мета роботи. Побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв’язку задачі про статичне деформування круглих пластин дискретно-змінної товщини за допомогою апарату функцій Гріна та матричної алгебри.

Методи дослідження. Методи гранично-складених задач та матриць типу Гріна, матрична алгебра.

Отримані результати. Побудовано компактний обчислювальний алгоритм розв’язку задачі про статичне деформування круглих пластин дискретно-змінної товщини за допомогою апарату функцій Гріна та матричної алгебри.

Наукова новизна. У даній роботі застосування апарату функцій Гріна та матричної алгебри дозволило побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв’язку розглянутої задачі при практично довільній кількості секцій у складеному тілі, яке застосовувалося при моделюванні.

Практичне значення. Досліджувана у роботі задача моделює явища, які відбуваються, зокрема, при деформуванні елементів вулканізаційного обладнання. Одержані результати дозволяють виявити особливості роботи елементів конструкції складної структури і, зрештою, підвищити її ефективність шляхом оптимізації параметрів складових частин.

THE USED MATRIX OF GREEN TYPE AND ALGEBRA OF MATRIX IN THE PROBLEM OF STATIC DEFORMATION OF THE CIRCULAR PLATES WITH DISCRETE-VARIABLE THICKNESS

S. A. Levchuk, A. A. Hmelnitskiy, S. P. Shvydka

Zaporizhzhia National University
kpmm.mf@znu.edu.ua

Key words:
circular plate with discrete-variable thickness, boundary-compound problem, compound construction, matrix of Green type, algebra of matrix.

Purpose of work. To build the compact computational algorithm of decision of task about static deformation of round plates of discrete-variable thickness by the vehicle of functions of Grin and matrix algebra. This article is devoted to the simulation of static deformation of discrete-variable thickness circles. This approach is not new. Previously, he was developed in a number of works (see literature). However, in this paper, the use of the Green’s functions and the matrix algebra enabled us to construct a compact computational algorithm for solving a given problem in a practically arbitrary number of sections in a folded body, which was used in modelling. The aforementioned approach was implemented in full in the previous work of the author, but for a ring plate of variable thickness. In this paper, the investigated method of calculation was developed in terms of increasing practical results.

Research methods. Methods of border-component tasks and matrices of type of Grin, matrix algebra. It should be noted that in the numerical find of an inverse matrix whose elements are necessary for the construction of appropriate matrices of the Green type, it will be necessary to solve systems, each of which consists of a certain number of algebraic equations, which depends on the number of sections in the composite object. When solving these systems, using one of the exact methods (for example, the Gauss method with the choice of the main element), often encounter problems of computational nature, because with a sufficiently large dimension of systems of equations, the error of computation of unknowns becomes unsatisfactory. The use of the same iterative methods for the solution of systems of algebraic equations in the cases considered is extremely difficult, since it is necessary to prepare the matrices of coefficients for unknowns at a large size of matrix data. Therefore, it should be noted that the resulting matrices have a so-called ribbon structure, that is, they contain a large number of zero elements (quasi-diagonal matrices). It is well known that when solving a system of equations with a quasidiaginal matrix, the number of arithmetic operations and the amount of computer memory involved can be significantly reduced, which leads to an increase in the accuracy of the calculations.

Got results. The compact computational algorithm of decision of task is built about static deformation of round plates of discrete-variable thickness by the vehicle of functions of Grin and matrix algebra. The constructed computational algorithm allowed to deal with calculations of non-matrix coefficients for unknown large sizes, but with matrices in size four to four. This avoids many computational complexities.

Scientific novelty. In this work application of vehicle of functions of Grin and matrix algebra allowed to build the compact computational algorithm of decision of the considered task at the practically arbitrary amount of sections in a component body which was used for a design. It should also be noted that when solving this problem there are features in the form of improper integrals of a function that is discontinuous at the left end of the integration segment. Applying the theory of boundaries is easy to show that these integrals will be convergent (in any case, if the function is a constant, or has a power character).

Practical value. The task probed in process designs the phenomena which take place, in particular, at deformation of elements of vulcanization equipment. The got results allow to expose the features of work of elements of construction of difficult structure and promote its efficiency by optimization of parameters of component parts.

Вступ. Дана стаття присвячена моделюванню статичного деформування круглих пластин дискретно-змінної товщини. Застосований метод розрахунку попередньо був розвинутий у роботах [1–7]. Проте в даній роботі застосування апарату функцій Гріна та матричної алгебри дозволило побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв'язку розглянутої задачі при практично довільній кількості секцій у складеному тілі, яке застосовувалося при моделюванні. Згаданий підхід був реалізований у повному обсязі у роботі [4], але для кільцевої пластини змінної товщини, і у [7]. У даній роботі був розвинений досліджуваний метод розрахунку з точки зору збільшення практичних результатів.

Матеріали та методика досліджень. Розглянемо круглу пластину дискретно-змінної товщини (рис. 1).

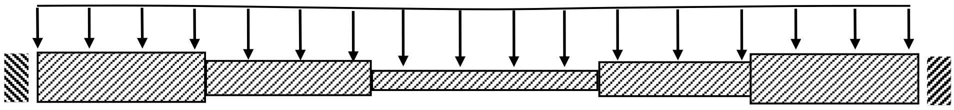

Рис. 1. Осьовий переріз круглої пластини дискретно-змінної товщини

Розрахункова схема для такої моделі може бути визначена таким чином. Вісесиметричний нормальний прогин $W = W(r)$ повинен задовольняти рівнянню [8]:

$$\Delta\Delta\, W = F\,, \tag{1}$$

де $F = q/D$, $q = q(r)$ – інтенсивність зовнішнього нормального навантаження, D – циліндрична жорсткість матеріалу, Δ – вісесиметричний оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}. \quad (2)$$

З огляду на осьову симетрію розв'язок досить визначити тільки вздовж радіуса пластини, яку можна розглядати як складений об'єкт, який складається з круглої пластини радіуса R_1 і деякої кількості кільцевих пластин, для яких $R_i \le r \le R_{i+1}$ $(i = 1,2,..., n-1)$ відповідно.

Фундаментальною системою розв'язків відповідного однорідного рівняння можуть бути системи функцій [8]:

1) для круглої пластини ($0 \le r \le R_1$):

$$W^{(1)} = 1, \quad W^{(2)} = r^2; \quad (3)$$

2) для кілець ($R_i \le r \le R_{i+1}$) $(i = 1,2,..., n-1)$:

$$W^{(1)} = 1, \quad W^{(2)} = \ln(r),$$
$$W^{(3)} = r^2, \quad W^{(4)} = r^2\ln(r). \quad (4)$$

Таким чином, загальні розв'язки рівняння (1) можуть бути записані у вигляді:

$$W_1(r) = C_1(r) + C_2(r)r^2,$$
$$W_k = C_j(r) + C_{j+1}(r)\ln(r) +$$
$$+C_{j+2}(r)r^2 + C_{j+3}(r)r^2\ln(r), \quad (5)$$

де $W_1(r)$ – нормальний прогин круглої пластини радіуса R_1, $W_k(r)$ – нормальний прогин k-ої кільцевої секції пластини, $(k = 2,3,..., n)$, а індекс j збільшується на чотири одиниці при збільшенні k на одну одиницю, причому $k = 2$ відповідає $j = 3$.

Якщо розв'язок далі здійснювати методом варіації довільних сталих, то визначивши C_j і підставивши їх вирази у (5) неважко отримати залежності (з точністю до сталих інтегрування):

$$W_1(r) = \overline{C}_1 + \overline{C}_2 r^2 +$$
$$+\int_0^r F_1(\xi)\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2 + r^2\right)\ln\frac{r}{\xi} + \xi^2 - r^2\right\}d\xi; \quad (6)$$
$$W_k(r) = \overline{C}_j + \overline{C}_{j+1}\ln(r) +$$
$$+\overline{C}_{j+2}r^2 + \overline{C}_{j+3}r^2\ln(r) +$$
$$+\int_0^r F_k(\xi)\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2 + r^2\right)\ln\frac{r}{\xi} + \xi^2 - r^2\right\}d\xi.$$

Для визначення сталих $\overline{C_j}$ $(j = 1,2,...,4n-2)$ у формулах (6) варто скористатися крайовими умовами, наприклад умовами жорсткого затиснення краю складеної пластини:

$$W_n\big|_{r=R_n} = 0; \quad \frac{dW_n}{dr}\bigg|_{r=R_n} = 0 \quad (7)$$

та умовами з'єднання елементів складеної конструкції [3]:

$$W_i\big|_{r=R_i} = W_{i+1}\big|_{r=R_i}; \quad \frac{dW_i}{dr}\bigg|_{r=R_i} = \frac{dW_{i+1}}{dr}\bigg|_{r=R_i};$$
$$M_i\big|_{r=R_i} = M_{i+1}\big|_{r=R_i}; \quad Q_i\big|_{r=R_i} = Q_{i+1}\big|_{r=R_i}, \quad (8)$$

де $i = 1,2,..., n-1$, а через M_i і Q_i позначені згинальний момент та поперечна сила відповідно (нижніми індексами тут і далі позначені номери секцій у складеній конструкції), для яких мають місце вирази [8]:

$$M_i(r) = -\frac{E_i h_i^3}{12\left(1-\sigma_i^2\right)}\left\{\frac{d^2 W_i}{dr^2} + \frac{\sigma_i}{r}\frac{dW_i}{dr}\right\};$$
$$Q_i(r) = -\frac{E_i h_i^3}{12\left(1-\sigma_i^2\right)}\frac{d}{dr}\Delta W_i, \quad (9)$$

де h_i – товщини секцій, σ_i – коефіцієнт Пуассона, E_i – модуль Юнга.

Підставляючи (6), (9) в (7), (8), отримаємо систему $4n-2$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\overline{C_j}$ з матрицею коефіцієнтів при невідомих $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{4n-2}$.

Теоретичні результати та їх аналіз. Розв'язавши дану систему і підставляючи знайдені вирази для $\overline{C_j}$ $(j = 1,2,...,4n-2)$ у (6), матимемо [2]:

$$W_k(r) = \sum_{l=1}^{n}\int_0^{R_l} G_l(r,\xi)\overline{F_l}(\xi)d\xi, \quad (10)$$

де $\overline{F}_l(\xi) = \left(F_l(\xi) \;\; F_{l+1}(\xi)\right)^T$, $\overline{F}_n(\xi) = F_n(\xi)$, $G_l(r,\xi) = \left(G_{l1}(r,\xi) \;\; G_{l2}(r,\xi)\right)$, $l = 1,2,..,n-1$; $k = 1,2,..,n$; $G_l(r,\xi)$ – побудовані матриці типу Гріна для даної задачі.

Якщо через $\overline{A}=\left\{\overline{a}_{ij}\right\}_{i,j=1}^{4n-2}$ позначити матрицю, обернену до матриці $A=\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{4n-2}$, що згадувалася вище, а також ввести наступні позначення:

$$t_{l1}^{j}\left(\xi\right)=-\overline{a}_{ji}\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2+R_l^2\right)\ln\frac{R_l}{\xi}+\xi^2-R_l^2\right\}-\overline{a}_{ji+1}\frac{\xi}{4}\left\{2R_l\ln\frac{R_l}{\xi}+\frac{\xi^2}{R_l}-R_l\right\}+$$
$$+\overline{a}_{ji+2}D_l\frac{\xi}{4}\left\{2\left(1+\sigma_l\right)\ln\frac{R_l}{\xi}+\left(\sigma_l-1\right)\frac{\xi^2}{R_l^2}+1-\sigma_l\right\}+\overline{a}_{ji+3}D_l\frac{\xi}{R_l};\qquad(11)$$
$$t_{l2}^{j}\left(\xi\right)=\overline{a}_{ji}\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2+R_l^2\right)\ln\frac{R_l}{\xi}+\xi^2-R_l^2\right\}+\overline{a}_{ji+1}\frac{\xi}{4}\left\{2R_l\ln\frac{R_l}{\xi}+\frac{\xi^2}{R_l}-R_l\right\}-$$
$$-\overline{a}_{ji+2}D_{l+1}\frac{\xi}{4}\left\{2\left(1+\sigma_{l+1}\right)\ln\frac{R_l}{\xi}+\left(\sigma_{l+1}-1\right)\frac{\xi^2}{R_l^2}+1-\sigma_{l+1}\right\}-\overline{a}_{ji+3}D_{l+1}\frac{\xi}{R_l};$$
$$t_{n}^{j}\left(\xi\right)=-\overline{a}_{j4n-3}\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2+R_n^2\right)\ln\frac{R_n}{\xi}+\xi^2-R_n^2\right\}-\overline{a}_{j4n-2}\frac{\xi}{4}\left\{2R_n\ln\frac{R_n}{\xi}+\frac{\xi^2}{R_n}-R_n\right\},$$

де $j=1,2,..,4n-2$; $l=1,2,..,n-1$, а індекс i збільшується на чотири одиниці при збільшенні l на одну одиницю, причому $l=1$ відповідає $j=1$, то компоненти побудованих матриць типу Гріна $G_l\left(r,\xi\right)$ набудуть вигляду:

при $k=1$:

$$G_{l1}\left(r,\xi\right)=\begin{cases}t_{l1}^{1}\left(\xi\right)+t_{l1}^{2}\left(\xi\right)r^2, & npu\ l\neq 1;\\ t_{l1}^{1}\left(\xi\right)+t_{l1}^{2}\left(\xi\right)r^2+I_1\left(r,\xi\right), & npu\ l=1,\quad I_1\left(r,\xi\right)=0\quad npu\ \xi>r;\end{cases}$$
$$G_{l1}\left(r,\xi\right)=t_{l2}^{1}\left(\xi\right)+t_{l2}^{2}\left(\xi\right)r^2,$$

при $k\neq 1$:

$$G_{l1}\left(r,\xi\right)=\begin{cases}t_{l1}^{j}\left(\xi\right)+t_{l1}^{j+1}\left(\xi\right)\ln\left(r\right)+t_{l1}^{j+2}\left(\xi\right)r^2+t_{l1}^{j+3}\left(\xi\right)r^2\ln\left(r\right), & npu\ l\neq k;\\ t_{l1}^{j}\left(\xi\right)+t_{l1}^{j+1}\left(\xi\right)\ln\left(r\right)+t_{l1}^{j+2}\left(\xi\right)r^2+t_{l1}^{j+3}\left(\xi\right)r^2\ln\left(r\right)+I_l\left(r,\xi\right), & npu\ l=k,\\ I_l\left(r,\xi\right)=0\quad npu\quad \xi>r;\end{cases}$$
$$G_{l2}\left(r,\xi\right)=t_{l2}^{j}\left(\xi\right)+t_{l2}^{j+1}\left(\xi\right)\ln\left(r\right)+t_{l2}^{j+2}\left(\xi\right)r^2+t_{l2}^{j+3}\left(\xi\right)r^2\ln\left(r\right);\qquad(12)$$
$$G_{n}\left(r,\xi\right)=\begin{cases}t_{n}^{4n-5}\left(\xi\right)+t_{n}^{4n-4}\left(\xi\right)\ln\left(r\right)+t_{n}^{4n-3}\left(\xi\right)r^2+t_{n}^{4n-2}\left(\xi\right)r^2\ln\left(r\right), & npu\ l\neq k;\\ t_{n}^{4n-5}\left(\xi\right)+t_{n}^{4n-4}\left(\xi\right)\ln\left(r\right)+t_{n}^{4n-3}\left(\xi\right)r^2+t_{n}^{4n-2}\left(\xi\right)r^2\ln\left(r\right)+I_n\left(r,\xi\right), & npu\ l=k,\\ I_n\left(r,\xi\right)=0\quad npu\quad \xi>r,\end{cases}$$

де $l=1,2,..,n-1$; $k=2,3,..,n$, а індекс j збільшується на чотири одиниці при збільшенні k на одну одиницю, причому $k=2$ відповідає $j=3$,

$$I_k\left(r,\xi\right)=\frac{\xi}{4}\left\{\left(\xi^2+r^2\right)\ln\frac{r}{\xi}+\xi^2-r^2\right\}.$$

Необхідно зазначити також, що при розв'язуванні даної задачі виникають особливості у вигляді невласних інтегралів від функції, що розривна на лівому кінці відрізка інтегрування:

$$\int_0^r F\left(\xi\right)\xi^3\ln\frac{r}{\xi}d\xi;\quad \int_0^r F\left(\xi\right)\xi\ln\frac{r}{\xi}d\xi.$$

Застосовуючи теорію границь, неважко показати, що дані інтеграли будуть збіжні (у всякому разі, якщо функція $F\left(\xi\right)$ – константа, чи має степеневий характер).

Таким чином, функція (10) з компонентами (11), (12) є розв'язком розглянутої задачі (1), (7), (8). Отримані результати узгоджуються з відомими [9], одержаними за допомогою теорії функції комплексної змінної.

Варто зазначити, що при чисельному знаходженні оберненої матриці A^{-1}, елементи якої необхідні при побудові відповідних матриць типу Гріна, необхідно буде розв'язати $4n$ систем, кожна з яких складається з $4n$ алгебраїчних рівнянь з $4n$ невідомими, де n – кількість секцій у складеному об'єкті.

При розв'язуванні даних систем за допомогою одного з точних методів (наприклад, методу Гаусса з вибором головного елемента) часто стикаємося з проблемами обчислювального характеру, оскільки при достатньо великому n похибка обчислень невідомих стає незадовільною. Застосування ж ітераційних методів розв'язку систем алгебраїчних рівнянь у випадках, які розглядаються, вкрай утруднено, оскільки потрібна попередня підготовка матриць коефіцієнтів при невідомих при великому розмірі даних матриць.

Тому варто звернути увагу на те, що одержані матриці мають так звану стрічкову структуру, тобто містять велику кількість нульових елементів (квазідіагональні матриці). Загальновідомо, що при розв'язуванні системи рівнянь із квазідіагональною матрицею число арифметичних операцій і об'єм задіяної пам'яті ЕОМ можуть бути суттєво зменшені, що приводить до підвищення точності обчислень.

Розрахункова схема для знаходження оберненої матриці A^{-1}, із застосуванням вказаного вище підходу, може виглядати таким чином.

Виходячи з відомої матричної рівності

$$A^{-1}A = E,$$

де $A^{-1} = \left\{\overline{a}_{ij}\right\}_{i,j=1}^{4n}$ – матриця, обернена до заданої матриці $A = \left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,j=1}^{4n}$, E – одинична матриця, бачимо, що для знаходження невідомих елементів оберненої матриці A^{-1} необхідно розв'язати $4n$ систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned}&\left(\overline{a}_{i1} \quad \overline{a}_{i2} \quad \dots \quad \overline{a}_{i4n}\right)A = \\ &= \left(0 \quad 0 \quad 1_i \quad 0 \quad \dots \quad 0\right),\end{aligned}$$

де i – номер рядка оберненої матриці $\left(i = 1,2,\ldots,4n\right)$, 1_i – означає, що одиниця є i-тою компонентою вектора вільних членів.

У випадку трьох секцій у складеному об'єкті $\left(n = 3\right)$ у матричному вигляді згадана система подається таким чином (для кожного i):

$$\begin{aligned}A^{11}C^1 + A^{12}C^2 &= F^1,\\ A^{22}C^2 + A^{23}C^3 &= F^2,\\ A^{33}C^3 &= F^3.\end{aligned} \tag{13}$$

Далі із системою (13) для визначення векторів невідомих C^i $\left(i = 1,2,3\right)$ можна зробити наступне.

Із першого і другого рівнянь системи (13) знайдемо, використовуючи правила матричної алгебри, C^2 і C^3 відповідно:

$$\begin{aligned}C^2 &= \left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^1 - A^{11}C^1\right),\\ C^3 &= \left(A^{23}\right)^{-1}\left(F^2 - A^{22}C^2\right),\\ A^{33}C^3 &= F^3.\end{aligned} \tag{14}$$

Підставляючи далі вираз для C^2 із (14) у вираз для C^3 із цієї ж системи і одержані представлення для C^3 – в останнє рівняння системи (14), матимемо:

$$\begin{aligned}&C^2 = \left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^1 - A^{11}C^1\right),\\ &C^3 = \left(A^{23}\right)^{-1}\left\{F^2 - A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^1 - A^{11}C^1\right)\right\},\\ &A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1}\left\{F^2 - A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^1 - A^{11}C^1\right)\right\} = F^3.\end{aligned} \tag{15}$$

Перетворивши останнє з рівнянь (15), одержимо:

$$\begin{aligned}&A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1}A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}A^{11}C^1 = \\ &= F^3 - A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1}F^2 + \\ &+ A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1}A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}F^1.\end{aligned} \tag{16}$$

Останнє рівняння є, у розгорнутому вигляді, системою двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно такої ж кількості невідомих.

Підставляючи знайдене з (16) C^1 у (15), визначимо C^3 і C^2 і у такий спосіб закінчимо розв'язок задачі.

У загальному вигляді, якщо розглядати складену кільцеву пластину, яка складається з n секцій, матимемо наступну розрахункову схему.

Система для визначення елементів оберненої матриці також запишеться у вигляді, аналогічному (13):

$$A^{11}C^{1}+A^{12}C^{2}=F^{1},$$

$$A^{22}C^{2}+A^{23}C^{3}=F^{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^{n-1n-1}C^{n-1}+A^{n-1n}C^{n}=F^{n-1},$$

$$A^{nn}C^{n}=F^{n}. \qquad (17)$$

Розв'язувальна система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих компонентів векторів C^{1} запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}&(-1)^{n+1}A^{nn}(A^{n-1n})^{-1}A^{n-1n-1}\left(A^{n-2n-1}\right)^{-1}\ldots A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}A^{11}C^{1}=\\&=F^{n}-A^{nn}(A^{n-1n})^{-1}F^{n-1}+\\&+A^{nn}(A^{n-1n})^{-1}A^{n-1n-1}\left(A^{n-2n-1}\right)^{-1}F^{n-2}+\ldots+\\&+(-1)^{n+1}A^{nn}(A^{n-1n})^{-1}A^{n-1n-1}\left(A^{n-2n-1}\right)^{-1}\ldots A^{33}\left(A^{23}\right)^{-1}A^{22}\left(A^{12}\right)^{-1}F^{1}.\end{aligned} \qquad (18)$$

Вектори C^{2}, C^{3}, …, C^{n} визначаються за рекурентними співвідношеннями:

$$C^{2}=\left(A^{12}\right)^{-1}\left(F^{1}-A^{11}C^{1}\right),$$

$$C^{3}=\left(A^{23}\right)^{-1}\left(F^{2}-A^{22}C^{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C^{n-1}=\left(A^{n-2n-1}\right)^{-1}\left(F^{n-2}-A^{n-2n-2}C^{n-2}\right),$$

$$C^{n}=\left(A^{n-1n}\right)^{-1}\left(F^{n-1}-A^{n-1n-1}C^{n-1}\right). \qquad (19)$$

Як бачимо, при розрахунках доводиться мати справу не з матрицями коефіцієнтів при невідомих розміром $4n\times 4n$, а з матрицями розміром 4×4. Це дозволяє уникнути багатьох обчислювальних складностей.

Розрахункові результати. За викладеною вище схемою було отримано деякі розрахункові результати (рис. 2 – 4). При розрахунках було прийнято: $n=3$; $E=2\cdot 10^{5}$ МПа; $\nu=0{,}25$; $h_1=0{,}01$ м; $h_2=0{,}02$ м; $h_3=0{,}03$ м; $R_1=0{,}1$ м; $R_2=0{,}2$ м; $R_3=0{,}3$ м. Розрахунок здійснювався для наступних варіантів навантаження (криві 1, 2, 4, 5 відповідно): $\bar{q}^{1}=(1{,}1{,}1)$ МПа, $\bar{q}^{2}=(1{,}1{,}0)$ МПа, $\bar{q}^{3}=(1{,}0{,}1)$ МПа, $\bar{q}^{4}=(0{,}1{,}1)$ МПа, $\bar{q}^{5}=(0{,}1{,}0)$ МПа (у дужках вказані інтенсивності навантажень на першій, другій і третій секціях відповідно).

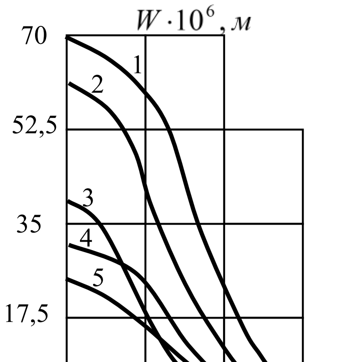

Рис. 2. Нормальні прогини

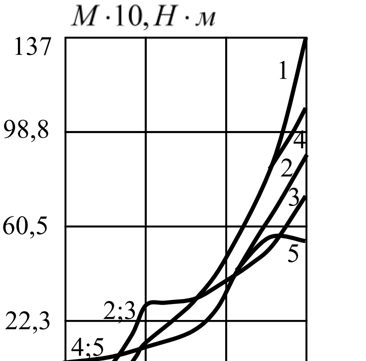

Рис. 3. Згинальні моменти

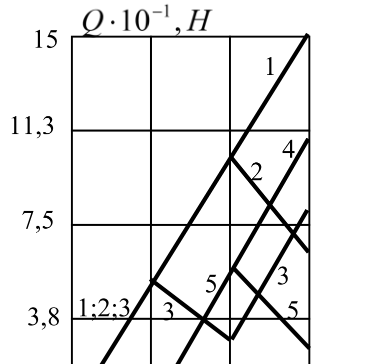

Рис.4. Поперечні сили

Література

1. Гавеля С. П., Левчук С. А., Ищенко О. А. Расчет упругого деформирования круглой пластины дискретно-переменной толщины. Запорожье, 1992. 10 с. Деп. в УкрИНТЭИ 08.06.92, № 845, Ук92.
2. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь та систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл : дис. … канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04. Запоріжжя, 2002. 150 с.
3. Левчук С. А. Матриця типу Гріна круглої пластини дискретно-змінної товщини. *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки.* 1999. № 2. С. 66–69.
4. Левчук С. А., Сисоєв Ю. О. Про деякі способи апроксимації круглих пластин різних профілів. *Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки.* 2008. № 1. С. 113–117.
5. Крашановська М. О., Левчук С. А., Хмельницький А. А. Про деякі способи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з квазідіагональними матрицями. *Актуальні проблеми математики та інформатики*: зб. тез доп. шостої регіон. наук. конф. молодих дослідників, присвяч. 90–річчю НАН України. Запоріжжя, 2008. С. 30–31.
6. Рибалко О. О., Левчук С. А., Хмельницький А. А. Про розвиток методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з квазідіагональними матрицями. *Актуальні проблеми математики та інформатики*: зб. тез доп. Першої Всеукр., восьмої регіон. наук. конф. молодих дослідників, присвяч. 80-річчю Запорізького нац. ун-ту. Запоріжжя, 2010. С. 36–38.
7. Levchuk S. A. Applying the apparatus' of Green matrixes and matrix algebra to the issue of static deformation of circular plates with discretely variable thickness. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні.* 2014. № 1. С. 104–108.
8. Биргер М. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания: в 3 т. Москва: Машиностроение, 1968. Т. 1. 832 с.
9. Вайнберг Д. В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 420 с.

References

1. Gavela, S. P., Levchuk, S. A. & Ishenko, O. A. (1992). Calculation of the elastic deformation of a circular plate of discrete-variable thickness. Dep. v UkrINTEI, №845-Uk92, 10 p.
2. Levchuk, S. A. (2002). Grin's matrixes the equations and systems of the elliptical type for study the static deformation composite bodies. Abstract for Cand. Sc. (Physical and mathematical), 01.02.04, National University, Zaporizhzha, Ukraine.
3. Levchuk, S. A. (1999). Green's type matrix of a circular plate of discrete-variable thickness, Visnik Zaporizkogo derzavnogo universitetu. Fiziko-matematichny nauki, No. 2, pp. 66–69.
4. Levchuk, S. A. & Sisoev, U. O. (2008). About some methods of approximation of round plates of different profiles. Visnik Zaporizkogo derzavnogo universitetu. Fiziko-matematichny nauki, No. 1, pp. 113–117.
5. Krashanovskaja, M. O., Levchuk, S.A. & Hmelnitskiy, A. A. (2008). About some ways to solve systems of linear algebraic equations with quasi-diagonal matrices. Proceeding of the Sixth regional scientific conference of young researchers dedicated to the 90th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine Actual problems of mathematics and computer science, (pp. 30–31), Zaporizhzha.
6. Ribalko, O. O., Levchuk, S. A. & Hmelnitskiy, A. A. (2010). About the development of methods for solving systems of linear algebraic equations with quasi-diagonal matrices. Proceeding of the eighth regional scientific conference of young researchers dedicated to the 90th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine Actual problems of mathematics and computer science, (pp. 36–38), Zaporizhzha.
7. Levchuk, S. A. (2014). Applying the apparatus' of Green matrixes and matrix algebra to the issue of static deformation of circular plates with discretely variable thickness. Novi materialy i tekhnolohiyi v metalurhiyi ta mashynobuduvanni, No. 1, pp. 104–108.
8. Birger, M. N. & Panovko, Ia. G. (1968). Strength, stability, oscillations. Moskow: Mashynostroenye.
9. Vainberg, D. V. (1952). Stress state of composite discs and plates. Kiev: Publishing house of the National Academy of Sciences of Ukraine.