УДК 539.37 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-10

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНІЙ ОРТОТРОПНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ПРЯМОКУТНИМИ ОТВОРАМИ

Є. А. Сторожук, В. А. Максимюк, І. С. Чернишенко, В. Ф. Корнієнко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
stevan@ukr.net

Ключові слова:
композитна циліндрична оболонка, прямокутні отвори, статичне навантаження, нелінійно-пружний стан, концентрація напружень, метод скінченних елементів.

Дано постановку і розроблено чисельну методику розв’язання фізично нелінійних задач статики для композитної циліндричної оболонки, ослабленої декількома прямокутними отворами. Систему розв’язувальних рівнянь отримано на основі співвідношень теорії тонких оболонок Кірхгофа–Лява і деформаційної теорії пластичності анізотропних середовищ з використанням методів Ньютона, додаткових напружень і скінченних елементів. Досліджено вплив нелінійної пружності матеріалу і довжини перемички на концентрацію напружень в області двох однакових квадратних отворів на бічній поверхні ортотропної циліндричної оболонки, навантаженої осьовими розтягувальними силами.

STRESS CONCENTRATION IN A NON-LINEAR ELASTIC ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH RECTANGULAR HOLES

E. A. Storozhuk, V. A. Maksimyuk, I. S. Chernyshenko, V. F. Kornienko

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine
stevan@ukr.net

Key words:
composite cylindrical shell, rectangular holes, static load, nonlinear-elastic state, stress concentration, finite element method.

Thin cylindrical shells with holes of various shapes, as bearing elements of modern structures, are widely used in various areas of technology: aviation aircraft and rocket building, shipbuilding, chemical and petroleum engineering. Of particular interest are studies of the stress concentration near the holes in the shells, taking into account nonlinear factors (nonlinear elasticity, plastic deformations, finite deflections, etc.). The solution of nonlinear problems of stress concentration in cylindrical shells with holes is associated with considerable mathematical difficulties and is considered in a limited number of papers. From the analysis of publications on this issue, it follows that theoretical studies devoted to the study of the nonlinearly elastic state of anisotropic cylindrical shells with rectangular holes are currently lacking in the scientific literature. Therefore, the paper presents the formulation of two-dimensional static problems for composite cylindrical shells weakened by rectangular holes, taking into account the real properties of the material (nonlinear elasticity), describes the method for numerical solution of problems of this class and presents specific numerical results.

A thin cylindrical shell made of an orthotropic composite material and weakened by two or more rectangular holes is considered. It is assumed that at elevated levels of acting loads, the properties of the shell material are described by non-linear deformation diagrams.

Geometric relationships are written in vector form according to the theory of non-habitable shells, based on the Kirchhoff-Love hypotheses, and physical - based on the deformation theory of plasticity of anisotropic media. Physical relationships are essentially nonlinear and intractable analytically with respect to stresses. Therefore, in the work, the inversion of physical relations with respect to stresses is performed numerically - by the Newton method.

A numerical method was developed for solving static problems for orthotropic cylindrical shells weakened by rectangular holes, taking into account physical nonlinearity, based on the use of the method of additional stresses and the finite element method (FEM). The implementation of the method of additional stresses involves the representation of expressions for stresses, forces and moments as a sum of linear and non-linear terms. In each approximation of the method of additional stresses, nonlinear components of stresses, forces and moments are considered known from the previous approximation and do not vary. The resulting sequence of linearly elastic problems is solved by a modified FEM. The peculiarity of the proposed FEM is that the rotation angle vector is not determined using formulas, as is customary in traditional FEM for thin shells, but is approximated by a biquadratic serendip type polynomial with Kirchhoff-Love hypotheses at the nodes of the finite element.

Using the developed technique, the effect of nonlinear elasticity of the material and the length of the jumper on the stress concentration in the region of two identical square holes on the lateral surface of an organoplastic cylindrical shell loaded with axial tensile forces was investigated.

Вступ. Тонкі оболонки, як несучі елементи сучасних конструкцій, знаходять широке застосування в різних областях техніки: авіа- і суднобудуванні, ракетобудуванні, хімічному і нафтовому машинобудуванні. Досить часто з конструктивних або технологічних міркувань такі елементи мають отвори і вирізи найрізноманітнішої форми.

Підвищений інтерес викликають дослідження концентрації напружень біля отворів в оболонках з врахуванням нелінійних факторів (нелінійної пружності, пластичних деформацій, скінченних прогинів тощо). Більшість результатів з цієї проблеми отримано для оболонок обертання при вісесиметричному навантаженні. Розглянуті здебільшого сферичні та еліпсоїдальні оболонки з вільним або підкріпленим отвором, а також з’єднання оболонок різної форми.

Найбільшого поширення в інженерній практиці набули циліндричні оболонки. Розв’язання двовимірних нелінійних задач про концентрацію напружень у циліндричних оболонках з отворами на бічній поверхні спряжене із значними математичними труднощами і розглянуте в обмеженій кількості робіт. Майже всі результати в цих роботах отримані для випадку, коли оболонки виготовлені з металів або їх сплавів. Так, пружнопластичний стан циліндричної оболонки з круговим або прямокутним отвором досліджено в роботах [1, 2], а геометрично нелінійне деформування ізотропної циліндричної панелі з круговим або прямокутним вирізом – в [3, 4]. Розв’язки крайових задач для циліндричної оболонки, ослабленої криволінійним (круговим або еліптичним) отвором, при одночасному врахуванні фізичної та геометричної нелінійностей отримані в роботах [5, 6]. Також вивчено вплив нелінійних факторів на розподіл полів переміщень, деформацій і напружень навколо двох кругових [7] та двох або трьох прямокутних [8] отворів на бічній поверхні циліндричної оболонки, виготовленої з алюмінієвого сплаву. І лише в роботі [9] наведені конкретні числові результати розрахунку нелінійно-пружного деформування ортотропної циліндричної оболонки з круговим вирізом.

Тому в роботі дано постановку двовимірних задач статики для композитних циліндричних оболонок, ослаблених прямокутними отворами, з врахуванням реальних властивостей матеріалу (нелінійної пружності) і описано методику чисельного розв’язання задач даного класу. Представлено результати дослідження нелінійно-пружного стану органопластикової циліндричної оболонки з двома однаковими квадратними отворами при дії осьових розтягувальних сил.

Постановка задачі. Основні співвідношення. Розглянемо тонку циліндричну оболонку радіуса R і товщини h, виготовлену з ортотропного композитного матеріалу (КМ) й ослаблену двома або більшою кількістю прямокутних отворів (рис. 1). Віднесемо серединну поверхню оболонки (Σ) до криволінійної ортогональної системи координат (x, y), де x і y – довжини твірної та дуги по напрямній. По нормалі до серединної поверхні відраховуватимемо координату γ.

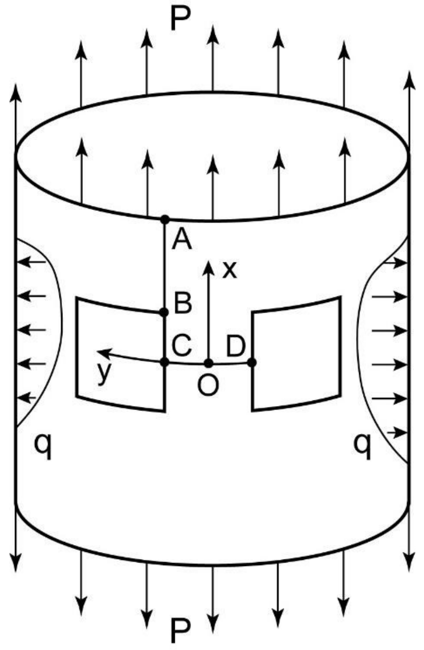

Рис. 1. Циліндрична оболонка з прямокутними отворами

Приймаємо, що при підвищених рівнях діючих поверхневих $\{p\}=\{p_1, p_2, p_3\}^T$ і крайових $\{m_k\}=\{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$ навантажень властивості матеріалу оболонки описуються нелінійними діаграмами деформування.

Геометричні співвідношення. Вважаємо, що геометричні та механічні характеристики оболонки, способи її закріплення й навантаження такі, що для опису процесу деформування можна застосувати варіант теорії непологих оболонок, яка базується на гіпотезах Кірхгофа–Лява [10]. Запишемо вирази для деформацій у векторній формі:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\cdot\vec{e}_x;\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\cdot\vec{e}_y;$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\cdot\vec{e}_y+\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\cdot\vec{e}_x;$$

$$\mu_{11}=-\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x}\cdot\vec{e}_x\ ;\quad \mu_{22}=-\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial y}\cdot\vec{e}_y;$$

$$2\mu_{12}=-\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x}\cdot\vec{e}_y-\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial y}\cdot\vec{e}_x; \qquad (1)$$

$$e_{11}=\varepsilon_{11}+\gamma\mu_{11};\quad e_{22}=\varepsilon_{22}+\gamma\mu_{22};$$

$$e_{12}=\varepsilon_{12}+2\gamma\mu_{12},$$

де ε_{ij} і μ_{ij} – компоненти мембранної і згинної деформацій оболонки; $\vec{u}=u\vec{e}_x+v\vec{e}_y+w\vec{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні; $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат (x, y, γ); $\vec{\varphi}=\varphi_x\vec{e}_x+\varphi_y\vec{e}_y$ – вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній, які визначаються за формулами:

$$\varphi_x=\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\cdot\vec{n}\ ;\quad \varphi_y=\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\cdot\vec{n}\,. \qquad (2)$$

Фізичні співвідношення. Припускаючи, що навантаження просте, скористаємося нелінійними фізичними співвідношеннями деформаційної теорії пластичності анізотропних середовищ, у якій прийнята умова пластичності виду [11]:

$$f=\frac{1}{2}\left(q_{1111}\sigma_{11}^2+q_{2222}\sigma_{22}^2+\right.$$

$$\left.+2q_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22}+4q_{1212}\sigma_{12}^2\right)=f_s. \qquad (3)$$

Тут f_s – додатна матеріальна константа.

Також приймемо, що матеріал зміцнюється тільки тоді, коли виконується робота пластичних деформацій

$$W_p=\int_0^{e_{11}^p}\sigma_{11}de_{11}^p+\int_0^{e_{22}^p}\sigma_{22}de_{22}^p+\int_0^{e_{12}^p}\sigma_{12}de_{12}^p\,, \qquad (4)$$

тобто при $f\ge f_s$

$$f=f(W_p)\ \text{та}\ W_p=W_p(f)\,. \qquad (5)$$

Залежності між компонентами напружень і деформацій для плоского напруженого стану у випадку збігу напрямків ортотропії матеріалу з напрямками осей координат (x, y, γ) мають вигляд [11]:

$$e_{11}=\left(\frac{1}{E_{11}}+\Psi q_{1111}\right)\sigma_{11}+\left(-\frac{\nu_{12}}{E_{22}}+\Psi q_{1122}\right)\sigma_{22};$$

$$e_{22}=\left(-\frac{\nu_{21}}{E_{11}}+\Psi q_{2211}\right)\sigma_{11}+\left(\frac{1}{E_{22}}+\Psi q_{2222}\right)\sigma_{22};$$

$$e_{12}=\left(\frac{1}{G_{12}}+4\Psi q_{1212}\right)\sigma_{12}, \qquad (6)$$

де E_{11}, E_{22}, G_{12}, ν_{12}, ν_{21} – пружні сталі композита; q_{1111}, q_{2222}, q_{1122}, q_{1212} – компоненти тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей КМ; $\Psi\left(f\right)$ – функція, яка описує нелінійне деформування матеріалу і обчислюється за формулою [11]:

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{f}}\int_{f_s}^{f}\frac{W_p'}{\sqrt{f}}df .$$

Відзначимо, що функція зміцнення $W_p = W_p(f)$ і значення параметрів q_{1111}, q_{2222}, q_{1122}, q_{1212} визначаються за допомогою методики, викладеної в роботах [10, 11].

Методика розв'язання фізично нелінійних крайових задач для композитних циліндричних оболонок з прямокутними отворами. Викладемо чисельну методику розв'язання задач статики для ортотропних циліндричних оболонок, ослаблених отворами, з врахуванням фізичної нелінійності, яка базується на використанні методу додаткових напружень, методу Ньютона і методу скінченних елементів (МСЕ).

Реалізація методу додаткових напружень передбачає подання виразів для напружень у вигляді суми лінійних (σ_{ij}^0) і нелінійних (σ_{ij}^H) доданків:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^H ; \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^H ;$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \sigma_{12}^H ;$$
$$\sigma_{11}^0 = c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22}; \quad \sigma_{22}^0 = c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22};$$
$$\sigma_{12}^0 = c_{33}e_{12} ; \qquad (7)$$
$$\sigma_{11}^H = \sigma_{11} - \sigma_{11}^0 ; \quad \sigma_{22}^H = \sigma_{22} - \sigma_{22}^0 ;$$
$$\sigma_{12}^H = \sigma_{12} - \sigma_{12}^0 ;$$
$$c_{11} = \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{22} = \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}};$$
$$c_{21} = c_{12} = \frac{E_{11}\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{33} = G_{12} .$$

Для внутрішніх зусиль і моментів $\left\{m\right\} = \left\{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\right\}^T$ з врахуванням рівностей (7) маємо вирази:

$$\left\{m\right\} = \left\{m^0\right\} + \left\{m^H\right\}; \quad \left\{m^0\right\} = \left[D\right]\left\{\varepsilon\right\}; \quad (8)$$
$$T_{ij}^H = \int_{h/2}^{h/2}\sigma_{ij}^H d\gamma ;$$
$$M_{ij}^H = \int_{h/2}^{h/2}\sigma_{ij}^H \gamma\, d\gamma \quad \left(i, j = 1,2\right),$$

де $\left\{\varepsilon\right\} = \left\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \mu_{11}, \mu_{22}, 2\mu_{12}\right\}^T$ – вектор компонентів мембранної та згинної деформацій оболонки; $\left[D\right]$ – матриця жорсткостей оболонки, елементи якої обчислюються за формулами:

$$d_{kl} = c_{kl}h; \quad d_{3+k,l} = d_{k,3+l} = 0 ;$$
$$d_{3+k,3+l} = c_{kl}h^3/12 \quad (k,l = 1,2,3). \qquad (9)$$

Систему розв'язувальних рівнянь отримаємо з варіаційного рівняння Лагранжа

$$\iint_{\Sigma}\delta\left\{\varepsilon\right\}^T\left[D\right]\left\{\varepsilon\right\}d\Sigma =$$
$$= \delta A_p - \iint_{\Sigma}\delta\left\{\varepsilon\right\}^T\left\{m^H\right\}d\Sigma . \qquad (10)$$

Тут A_p – робота зовнішніх сил.

Вважаючи, що в рівнянні (10) нелінійні складові зусиль і моментів $\left\{m^H\right\}$ відомі з попереднього наближення і не варіюються, вихідну фізично нелінійну задачу методом додаткових напружень зводимо до послідовності лінійно-пружних задач. У кожному наближенні методу додаткових напружень при обчисленні нелінійних членів $\left\{m^H\right\}$ необхідно попередньо виразити напруження через відомі деформації, використовуючи рівності (6). Фізичні співвідношення (6) є суттєво нелінійними й нерозв'язними аналітично відносно напружень. Запишемо рівняння (6) у вигляді:

$$F_i\left(\left\{\sigma\right\},\left\{e\right\}\right) = 0 \quad (i = 1,2,3) , \qquad (11)$$

де $\left\{\sigma\right\} = \left\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\right\}^T$, $\left\{e\right\} = \left\{e_{11}, e_{22}, e_{12}\right\}^T$ – вектори напружень і деформацій у довільній точці оболонки.

Розв'яжемо нелінійну систему (11) відносно напружень методом Ньютона

$$F_i + \frac{\partial F_i}{\partial\left\{\sigma^j\right\}}\left\{\Delta\sigma^j\right\} = 0 \quad (i = 1,2,3) ;$$
$$\left\{\sigma^{j+1}\right\} = \left\{\sigma^j\right\} + \left\{\Delta\sigma^j\right\} , \qquad (12)$$

вибираючи за початкове наближення напруження для лінійно-пружного тіла $\left\{\sigma^0\right\}$.

Після чисельного обернення рівнянь (6) відносно напружень матимемо залежності виду

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}\left(e_{11}, e_{22}, e_{12}\right); \; \sigma_{22} = \sigma_{22}\left(e_{11}, e_{22}, e_{12}\right);$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{12}\left(e_{11}, e_{22}, e_{12}\right). \qquad (13)$$

Послідовність лінійно-пружних задач розв’язується модифікованим МСЕ. Особливість запропонованого варіанта МСЕ полягає в тому, що вектор кутів повороту $\vec{\varphi}$ не визначається за допомогою формул (2) для φ_x і φ_y, як це прийнято в традиційному МСЕ для тонких оболонок, а апроксимується біквадратичним поліномом серендипового типу з виконанням гіпотез Кірхгофа–Лява у вузлах скінченного елемента [7, 12].

Застосовуючи МСЕ, з рівняння Лагранжа (10) одержимо систему алгебраїчних рівнянь, яка моделює нелінійно-пружне деформування композитної циліндричної оболонки, ослабленої прямокутними отворами:

$$[K]\{q\}=\{P\}-\{\Omega\}, \tag{14}$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості лінійно-пружної оболонки; $\{q\}$, $\{P\}$, $\{\Omega\}$ – глобальні вектори вузлових ступенів свободи, навантажень і нелінійностей.

Відзначимо, що для елемента (e) матриця жорсткості та вектори навантажень і нелінійностей обчислюються за формулами:

$$\left[K^{(e)}\right]=\iint\limits_{\Sigma^{(e)}}\left[B^{(e)}\right]^T[D]\left[B^{(e)}\right]d\Sigma;$$

$$\left\{P^{(e)}\right\}=\iint\limits_{\Sigma_p^{(e)}}\left[f^{(e)}\right]^T\{p\}d\Sigma; \tag{15}$$

$$\left\{\Omega^{(e)}\right\}=\iint\limits_{\Sigma^{(e)}}\left[B^{(e)}\right]^T\left\{m^H\right\}d\Sigma.$$

Тут $\left[f^{(e)}\right]$, $\left[B^{(e)}\right]$ – матриці функцій форми переміщень і деформацій.

Числові результати і їх аналіз. Дослідимо нелінійно-пружний стан композитної циліндричної оболонки постійної товщини h і радіуса $R/h=100$, ослабленої двома однаковими квадратними отворами зі стороною $a/h=20$, центри яких знаходяться на спільній напрямній. Довжина оболонки становить $L/h=200$, а відстань між контурами отворів (довжина перемички CD) при виконанні розрахунків змінювалася в межах: $10\le d/h\le 80$. Оболонка виготовлена з ортотропного органопластика, для якого на основі діаграм деформування в [10, 11] побудована функція зміцнення

$$W_p=\begin{cases}0, & f\le f_s;\\ c\left[\left(f/f_s\right)^n-1\right], & f>f_s;\end{cases}$$

$$c=0{,}137\,\text{МПа};\quad n=3;\quad f_s=0{,}4\cdot 10^6\,\text{МПа}$$

і визначені фізико-механічні параметри, які характеризують лінійну та нелінійну стадії деформування:

$$E_{11}=38{,}4\,\text{ГПа};\quad E_{22}=25{,}3\,\text{ГПа};$$

$$G_{12}=7{,}6\,\text{ГПа};\quad \nu_{12}=0{,}238;$$

$$q_{1111}=4{,}2;\quad q_{2222}=2{,}0;$$

$$q_{1122}=0{,}33;\quad q_{1212}=13{,}0.$$

З використанням розробленої методики розв’язані лінійні (ЛЗ) і нелінійні (НЗ) задачі при дії на торцях оболонки розтягувальних зусиль інтенсивності $\tilde{P}=1400$ ($P/h=\tilde{P}\cdot 10^5$ Па).

На рис. 2 показана залежність максимальних напружень $\tilde{\sigma}_{\max}$ ($\sigma_{\max}=\tilde{\sigma}_{\max}\cdot 10^5$ Па) від зведеної довжини перемички $\tilde{d}=d/a$. Пунктирна крива відповідає розв’язку лінійно-пружної задачі, а суцільна – розв’язку нелінійної задачі.

У табл. 1 наведені значення найбільших напружень ($\tilde{\sigma}_x$) у центрі перемички (у точці O) для ряду значень її довжини: $\tilde{d}=0{,}5;1{,}0;\ldots;4{,}0$. Дані отримані при розв’язанні задач у лінійній і нелінійній постановках.

Із отриманих результатів випливає, що найбільші напруження в оболонці мають місце в кутовій точці B на зовнішній поверхні, а в центрі перемички (в точці O) – на внутрішній поверхні. Зі зменшенням довжини перемички найбільші напруження в центрі перемички збільшуються у 2,8 раза як для ЛЗ, так і НЗ, а в кутовій точці B – у 1,9 раза для ЛЗ і в 1,5 раза для НЗ.

Врахування фізичної нелінійності приводить до зменшення максимальних напружень в оболонці у порівнянні з результатами лінійно-пружного розв’язку, відповідно, на 19,2% для $d/a=0{,}5$, на 5,5% для $d/a=2{,}0$ і на 2,8% для $d/a=4{,}0$. Водночас максимальні напруження у центрі перемички, отримані з розв’язків ЛЗ і НЗ, для всіх значень довжини перемички d практично збігаються.

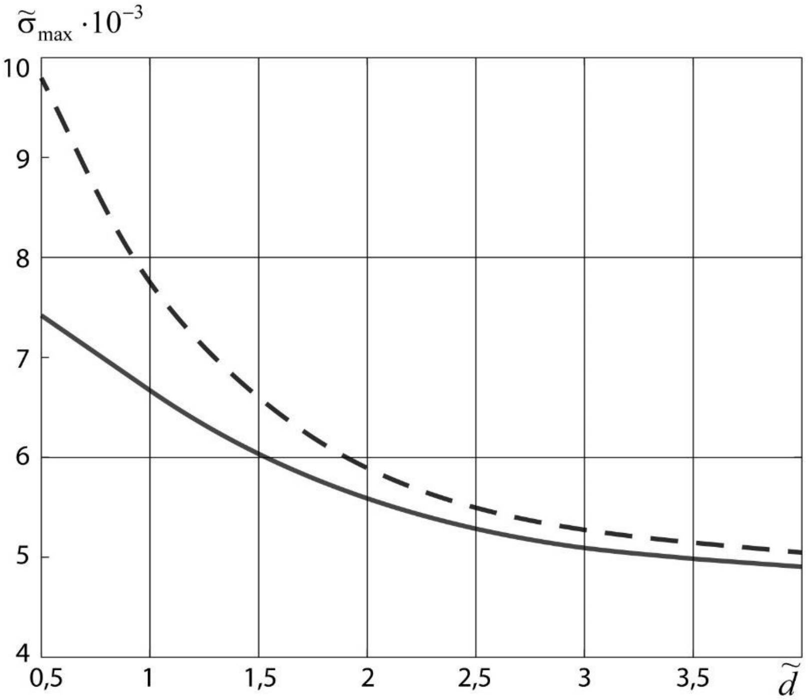

Рис. 2. Залежність максимальних напружень від довжини перемички

Табл. 1. Максимальні напруження в центрі перемички (в точці О)

$\tilde{d}$		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$\tilde{\sigma}_x$	ЛЗ	4112	3041	2521	2183	1927	1728	1576	1466
	НЗ	4101	3039	2520	2183	1927	1728	1576	1466

Аналіз представлених результатів також дозволяє зробити висновок про те, що при дослідженні напружено-деформованого стану (НДС) композитних циліндричних оболонок, ослаблених двома квадратними або прямокутними отворами, з врахуванням нелінійних властивостей матеріалу для довжини перемички, яка перевищує чотири довжини сторони отвору ($d/a \geq 4$), взаємним впливом контурів отворів можна знехтувати.

Висновки. Отже, у роботі розроблено чисельну методику розв’язання двовимірних нелінійно-пружних задач статики для тонких циліндричних оболонок, виготовлених з композитних матеріалів і ослаблених декількома прямокутними отворами. Побудована методика базується на використанні варіаційного рівняння Лагранжа, методу Ньютона, методу початкових напружень і модифікованого МСЕ. Особливість запропонованого варіанта МСЕ полягає у використанні векторної форми геометричних співвідношень і дискретній реалізації геометричної частини гіпотез Кірхгофа–Лява. З використанням розробленої методики і складених прикладних програм досліджено осьовий розтяг нелінійно-пружної циліндричної оболонки з двома квадратними отворами. Представляє подальший інтерес вивчення НДС композитних оболонок з прямокутними отворами при сумісному врахуванні фізичної та геометричної нелінійностей.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Література

1. Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Упруго-пластические деформации цилиндрической оболочки с круговым отверстием. *Теория оболочек и пластин*. Москва: Наука, 1973. С. 180–184.
2. Демидов А. И. К вопросу о применимости теории малых упруго-пластических деформаций при расчете оболочек при неупругом поведении материала. *Металлические конструкции*. 2014. Т. 20, № 4. С. 221–234.
3. Зацепина М. В., Хазанов Х. С. Вариационные уравнения для цилиндрической оболочки с круглым отверстием при больших прогибах. *Тр. Куйбышев. авиац. ин-та*. 1971. Вып. 48. С. 274–279.
4. Корнишин М. С., Петухов Н. П. К расчету на изгиб гибких пластин и пологих панелей со сложным очертанием контура методом блочной итерации. *Труды семинара по теории оболочек. Казанский физ.-техн. ин-т АН СССР*. 1975. Вып. 6. С. 34–39.
5. Chernyshenko I. S., Storozhuk E. A. Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with a Curvilinear Hole. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42, No 12. P. 1414–1420.
6. Chernyshenko I. S., Storozhuk E. A., Kadyrov F. D. Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with an Elliptic Hole. *Int. Appl. Mech*. 2007. Vol. 43, No 5. P. 512–518.
7. Guz A. N., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Elastoplastic State of Flexible Cylindrical Shells with Two Circular Holes. *Int. Appl. Mech*. 2004. Vol. 40, No 10. P. 1152–1156.
8. Hudramovich V. S., Hart E. L., Klimenko D. V., Rjabokon' S. A. Mutual influence of the cuts on the strength of the shell structures at the plastic deformation. *Strength of Materials*. 2013. Vol. 45, No 1. P. 1–9.
9. Maksimyuk V. A., Chernyshenko I. S. Stress State around Holes in Orthotropic Cylindrical Shells with Allowance for Nonlinearly Elastic Material Properties. *Int. Appl. Mech*. 1991. Vol. 27, No 10. P. 991–995.
10. Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. Механика композитов: монография: в 12 т. Киев: «А.С.К.», 1998. Т. 7. Концентрация напряжений. 387 с.
11. Ломакин В. А. О теории пластичности анизотропных сред. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика.* 1964. № 4. С. 49–53.
12. Areias P. M. A., Song J.-H., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints. *Int. J. Numer. Meth. Eng*. 2005. Vol. 64, No 9. P. 1166–1206.

REFERENCES

1. Saveliev, L. M. & Khazanov, Kh. S. (1973). Elastic plastic deformations of a cylindrical shell with a circular hole. In: Theory of shells and plates (pp. 180–184). Moskow: Nauka (in Russian).
2. Demidov, A. I. (2014). Revisting the pertinence of theory of little elasto-plastic strain when calculating shells in the process of inelastic behavior of material. Metallicheskie konstrukcii, Vol. 20, No. 4, pp. 221–234 (in Russian).
3. Zatsepina, M. V. & Khazanov, Kh. S. (1971). Variational equations for a cylindrical shell with a round hole with large deflections. Trudy Kujbyshevskogo aviacionnogo instituta, Iss. 48, pp. 274–279 (in Russian).
4. Kornishin, M. S. & Petukhov, N. P. (1975). For the calculation of the bending of flexible plates and flat panels with a complex contour using the block iteration method. Trudy seminara po teorii obolochek. Kazanskiy fiziko-tehnicheskiy institut AN SSSR, Iss. 6, pp. 34–39 (in Russian).
5. Chernyshenko, I. S. & Storozhuk, E. A. (2006). Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with a Curvilinear Hole. Int. Appl. Mech, Vol. 42, No. 12, pp. 1414–1420.
6. Chernyshenko, I. S., Storozhuk, E. A. & Kadyrov, F. D. (2007). Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with an Elliptic Hole. Int. Appl. Mech, Vol. 43, No. 5, pp. 512–518.

7. Guz, A. N., Storozhuk, E. A. & Chernyshenko, I. S. (2004). Elastoplastic State of Flexible Cylindrical Shells with Two Circular Holes. Int. Appl. Mech, Vol. 40, No. 10, pp. 1152–1156.

8. Hudramovich, V. S., Hart, E. L., Klimenko, D. V. & Rjabokon', S. A. (2013). Mutual influence of the cuts on the strength of the shell structures at the plastic deformation. Strength of Materials, Vol. 45, No. 1, pp. 1–9.

9. Maksimyuk, V. A. & Chernyshenko, I. S. (1991). Stress State around Holes in Orthotropic Cylindrical Shells with Allowance for Nonlinearly Elastic Material Properties. Int. Appl. Mech., Vol. 27, No. 10, pp. 991–995.

10. Guz, A. N., Kosmodamianskii, A. S. & Shevchenko, V. P. (1998). Mechanics of Composite Materials. (vol. 7) Stress Concentration. Kyiv: A.S.K. (in Russian).

11. Lomakin, V. A. (1964). On the theory of anisotropic plasticity. Vestnik Moskovskogo universiteta. Serija 1. Matematika. Mekhanika, No. 4, pp. 49–53 (in Russian).

12. Areias P. M. A., Song J.-H., Belytschko T. (2005). A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints. Int. J. Numer. Meth. Eng, Vol. 64, No. 9, pp. 1166–1206.