УДК 539.3 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-11

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ЦИЛІНДРІ З ПОКРИТТЯМ ПРИ ЗМІШАНОМУ НАГРІВАННІ

Г. Т. Сулим[1], І. М. Турчин[1,2], Г. В. Василько[1]

[1]Львівський національний університет ім. Івана Франка,
[2]Університет Казимира Великого
ihorturchyn@gmail.com

Ключові слова:
нестаціонарна задача теплопровідності, змішані крайові умови, поліноми Лагерра, парні інтегральні рівняння.

З використанням інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є побудовано розв'язок осесиметричної нестаціонарної задачі теплопровідності для циліндра з покриттям, на границі якого в кільці задана температура, а зовні відбувається теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок систем парних інтегральних рівнянь, отриманих при розгляді змішаних умов нагріву граничної поверхні, будується з використанням методу рядів Неймана. Отримані в результаті безмежні системи алгебраїчних рівнянь дозволяють обґрунтувати застосування до їх розв'язування методу редукції. Остаточно розв'язок подається у вигляді ряду за поліномами Лагерра з коефіцієнтами, що визначаються з отриманих в роботі рекурентних співвідношень.

UNSTEADY HEAT CONDUCTIVITY PROBLEM FOR COATED CYLINDER UNDER MIXED BOUNDARY HEATING CONDITIONS

H. T. Sulym[1], I. M. Turchyn[1,2], G. V. Vasylko[1]

[1]Ivan Franko National University of Lviv,
[2]Kazimierz Wielki University
ihorturchyn@gmail.com

Key words:
unsteady heat conductivity problem; mixed boundary conditions; Laguerre polynomials; dual integral equations.

Analysis of thermal stresses in bodies with coatings is important for many engineering researches. Taking into account the actual operating conditions of these structures frequently leads to mixed heating condition. The steady problem of thermoelasticity with mixed boundary conditions currently is sufficiently investigated. However, the corresponding transient problem, despite its relevance, is poorly understood. This is due to mathematical difficulties that arise in applying the integral Laplace transform. The authors of this paper developed a new effective method of constructing solutions of mixed boundary-value non-stationary problems.

In this work consider the cylinder with a coating on the surface of which on the band width it is known temperature distribution and outside this area the heat transfer by Newton's law is performed. On the surface separation of materials of cylinder and covering the conditions of ideal thermal contact are satisfied. The initial temperature of the coating and cylinder is equal to zero.

To the nonstationary heat conductivity problem it is applied the Laguerre integral transformation in time variables and integral Fourier transformation in spatial variable. As a result the triangular sequence of ordinary differential equations is obtained. The general solution of these sequences is obtained in the form of algebraic convolution. Taking into account the mixed boundary conditions leads to dual integral equations. For solution of this problem it is proposed the method of Newton's series. By this method the problem is reduced to the infinite system of algebraic equations, for which the convergence of reduction procedure is proved.

Вступ. При математичному моделюванні процесів теплопереносу, що відбуваються в елементах конструкцій та приладах із урахуванням реальних умов експлуатації чи виготовлення, часто виникає потреба врахування нестаціонарності процесу та змішаних крайових умов у вихідних модельних побудовах. Особливо це стосується випадків, коли дія зовнішніх чинників зводиться до змінюваного в часі високоінтенсивного нагрівання граничних поверхонь [1].

Класичним аналітичним методом побудови розв'язків просторових нестаціонарних задач теплопровідності є метод інтегрального перетворення Лапласа [2]. Проте за наявності змішаних крайових умов [3], особливо для неоднорідних тіл циліндричної форми пряме використання цього перетворення створює значні труднощі при знаходженні навіть трансформант за Лапласом, не кажучи вже про математично обґрунтований перехід до оригіналів.

Метою даної роботи є розробка ефективної аналітичної методики побудови розв'язку нестаціонарних задач теплопровідності для циліндрично-шаруватих тіл за змішаних умов нагрівання, яка ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Лагерра [4-6] і дослідження на її основі перехідних температурних полів у циліндрі із покриттям, зумовлених умовами локального нагрівання змішаного типу.

Формулювання задачі. Розглянемо безмежний неоднорідний циліндр, що складається із суцільного циліндра радіуса R_1 та нанесеного покриття, яке вважатимемо порожнистим циліндром із внутрішнім радіусом R_1 та зовнішнім радіусом R_2. З моменту часу $t>0$ на поверхні покриття $r=R_1+R_2$ задається розподіл температури $T_c(z,t)=T^*(z)\left(1-\exp(-t_0 t)\right)$, симетрично розподіленої в кільці ширини $2d$. Зовні цього кільця відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури. Вважається, що початкова температура неоднорідного циліндра рівна нулю, а на поверхні поділу його матеріалів виконуються умови ідеального теплового контакту.

Зважаючи на всі перелічені вище умови, сформулюємо нестаціонарну задачу теплопровідності в знерозміреному вигляді наступним чином:

рівняння нестаціонарної теплопровідності для внутрішнього і зовнішнього циліндрів

$$\partial^2_{\rho\rho}T^{(i)}+\rho^{-1}\partial_\rho T^{(i)}+\partial^2_{\gamma\gamma}T^{(i)}=\tilde{a}_T^{(i)}\partial_\tau T^{(i)},$$

$$i=1,2; \tag{1}$$

початкові умови

$$T^{(i)}(\rho,\gamma,0)=0,\quad i=1,2; \tag{2}$$

умова на осі $\rho=0$ внутрішнього циліндра

$$\lim_{\rho\to 0}T^{(1)}(\rho,\gamma,\tau)\neq\infty; \tag{3}$$

змішані умови нагрівання зовнішнього циліндра

$$\begin{gathered} T^{(2)}(\rho_2,\gamma,\tau)=T_c(\gamma,\tau),\quad |\gamma|\le 1;\\ \partial_\rho T^{(2)}(\rho_2,\gamma,\tau)+\\ +BiT^{(2)}(\rho_2,\gamma,\tau)=0,\quad |\gamma|>1; \end{gathered} \tag{4}$$

умови ідеального теплового контакту

$$\begin{gathered} T^{(1)}(\rho_1,\gamma,\tau)=T^{(2)}(\rho_1,\gamma,\tau);\\ \tilde{\lambda}_T\partial_\rho T^{(1)}(\rho_1,\gamma,\tau)=\partial_\rho T^{(2)}(\rho_1,\gamma,\tau). \end{gathered} \tag{5}$$

Тут $\rho=r/d$, $\gamma=z/d$ - безрозмірні змінні циліндричної системи координат, $\tau=a_T^{(2)}t/d^2$, $\tilde{a}_T^{(i)}=a_T^{(2)}/a_T^{(i)}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)}=\lambda_T^{(i)}/\lambda_T^{(2)}$, $\mathrm{Bi}=\kappa d/\lambda_T^{(1)}$, $\rho_1=R_1/d$, $\rho_2=R_2/d$, $\lambda_T^{(i)}$, $a_T^{(i)}$ – відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності зовнішнього $(i=2)$ та внутрішнього $(i=1)$ циліндрів; κ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття, $T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)$ – температурне поле у внутрішньому $(i=1)$ і зовнішньому $(i=2)$ циліндрах.

Побудова розв'язку задачі. Припустимо, що функції $T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)$ можна розвинути в ряд за поліномами Лагерра:

$$T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}T_n^{(i)}(\rho,\gamma)L_n(\lambda\tau), \tag{6}$$

де

$$T_n^{(i)}(\rho,\gamma)=$$
$$=\int_0^\infty \exp(-\lambda\tau)T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)L_n(\lambda\tau)d\tau, \tag{7}$$

а $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра.

Надалі формулу (7) розглядатимемо як інтегральне перетворення функції $T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)$, а ряд (6) – як формулу обернення цього перетворення.

Домножимо рівняння (1) на ядро перетворення $\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)$ і виконаємо почленне інтегрування отриманого виразу за змінною τ в інтервалі $[0,\infty)$. Згідно з рівністю (7) і формулою диференціювання поліномів Лагерра:

$$\partial_\tau\left[\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)\right]= =-\lambda\exp(-\lambda\tau)\sum_{k=0}^{n}L_k(\lambda\tau),$$

після інтегрування за частинами, враховуючи нульові початкові умови (2), одержимо

$$\partial_{\rho\rho}^2 T_n^{(i)}+\rho^{-1}\partial_\rho T_n^{(i)}+\partial_{\gamma\gamma}^2 T_n^{(i)}= =\lambda\tilde{a}_T^{(i)}\sum_{k=0}^{n}T_k^{(i)}. \qquad (8)$$

До рівняння (8), враховуючи фізичну симетрію розв'язку відносно площини $\gamma=0$, застосуємо також інтегральне $\cos$-перетворення Фур'є за змінною γ [7]. У результаті після перенесення доданку при $k=n$ з правої частини в ліву одержимо трикутну послідовність звичайних диференційних рівнянь

$$d_{\rho\rho}\bar{T}_n^{(i)}+\rho^{-1}d_\rho\bar{T}_n^{(i)}-\left(\xi^2+\beta_i\right)\bar{T}_n^{(i)}=\beta_i\sum_{m=0}^{n-1}\bar{T}_m^{(i)},\quad n=0,1,2,\ \ldots\ ,\ i=1,2, \qquad (9)$$

де $\bar{T}_n^{(i)}(\rho,\xi)=\int\limits_0^\infty\cos(\xi\gamma)\left[\int\limits_0^\infty\exp(-\lambda\tau)T_n^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)L_n(\lambda\tau)\,d\tau\right]d\gamma$ – трансформанта за Лагерром та Фур'є.

Загальний розв'язок послідовностей (9) знайдено у вигляді алгебричної згортки:

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi,\rho)=\sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}^{(i)}(\xi)G_j^{(i)}(\xi,\rho)+B_{n-j}^{(i)}(\xi)W_j^{(i)}(\xi,\rho)\right],\quad i=1,2, \qquad (10)$$

де $G_j^{(i)}(\xi,\rho)$, $W_j^{(i)}(\xi,\rho)$ - лінійно незалежні фундаментальні розв'язки послідовностей рівнянь (9), які мають вигляд

$$G_j^{(i)}(\xi,\rho)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}^{(i)}\rho^k\,\mathrm{I}_k(\omega_i\rho),$$

$$W_j^{(i)}(\xi,\rho)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}^{(i)}\left(-\rho^k\right)\mathrm{K}_k(\omega_i\rho). \qquad (11)$$

Тут введено позначення $\omega_i=\sqrt{\xi^2+\beta_i}$. Коефіцієнти $a_{j,k}^{(i)}$ після підстановки співвідношень (11) у рівняння одержуються із рекурентних рівнянь:

$$a_{j,k+1}^{(i)}=\frac{\lambda}{2\tilde{a}_i\omega_i(k+1)}\sum_{m=k}^{j-1}a_{m,k}^{(i)},\quad i=1,2 \qquad (12)$$

при довільних $a_{j,0}^{(i)}$ і $a_{j,k}^{(i)}\equiv 0$ при $k>j$. У подальших розрахунках покладено $a_{0,0}^{(i)}=1$, $a_{j,0}^{(i)}=0,\ j\geq 1,\ i=1,2$.

З умови (3) та властивостей функцій Макдональда знайдемо, що

$$B_i^{(2)}\equiv 0,\quad i=1,2,\ldots \qquad (13)$$

Решту невідомих $A_n^{(2)}(\xi)$, $B_n^{(2)}(\xi)$, $A_n^{(1)}(\xi)$ знайдемо з умов (4)-(5). Розглянемо спочатку змішані умови (4), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра набудуть вигляду

$$T_n^{(2)}(\rho_2,\gamma)=T_{cn}(\gamma),\quad |\gamma|\leq 1;$$

$$\partial_\rho T_n^{(2)}(\rho_2,\gamma)+BiT_n^{(2)}(\rho_2,\gamma)=0,\ |\gamma|>1. \qquad (14)$$

Безпосереднє застосування $\cos$-перетворення Фур'є до цих умов є неможливим внаслідок їх різнорідності, тому продовжимо другу умову (14) на всю вісь, увівши в розгляд невідому функцію $g_n(\gamma)$:

$$\partial_\rho T_n^{(2)}(\rho_2,\gamma)+BiT_n^{(2)}(\rho_2,\gamma)= =\begin{cases} g_n(\gamma), & |\gamma|\leq 1;\\ 0, & |\gamma|>1.\end{cases} \qquad (15)$$

Після застосування до (15) $\cos$-перетворення Фур'є одержимо

$$\partial_\rho\bar{T}_n^{(2)}(\rho_2,\gamma)+Bi\bar{T}_n^{(2)}(\rho_2,\gamma)=\bar{g}_n(\xi), \qquad (16)$$

де $\bar{g}_n(\xi)=\int\limits_0^1 g_n(\gamma)\cos(\xi\gamma)\,d\gamma$. Застосовуючи інтегральне перетворення Лагерра та

$\cos$-перетворення Фур'є до умов (5), одержимо:

$$\bar{T}_n^{(1)}(\xi,\rho_1)=\bar{T}_n^{(2)}(\xi,\rho_1);$$
$$\tilde{\lambda}_T d_\rho \bar{T}_n^{(1)}(\xi,\rho_1)=d_\rho \bar{T}_n^{(2)}(\xi,\rho_1). \quad (17)$$

Безпосередня підстановка розв'язків (8)-(9) в умови (13), (14) після виділення в лівій частині лише невідомих з нижнім індексом n приводить до систем алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \omega_2 I_1(\omega_2\rho_2)+BiI_0(\omega_2\rho_2) & -\omega_2 K_1(\omega_2\rho_2)+BiK_0(\omega_2\rho_2) & 0 \\ I_0(\omega_2\rho_1) & K_0(\omega_2\rho_1) & -I_0(\omega_1\rho_1) \\ -\omega_2 I_1(\omega_2\rho_1) & \omega_2 K_1(\omega_2\rho_1) & \tilde{\lambda}_T\omega_1 I_1(\omega_1\rho_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \\ A_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n,1} \\ c_{n,2} \\ c_{n,3} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

в яких права частина з ростом дискретної величини n поповнюється розв'язками, знайденими при її попередніх значеннях, і має вигляд:

$$c_{1,n}=\bar{g}_n(\xi)-\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j'^{(2)}(\xi,\rho_2)+B_{n-j}^{(2)}(\xi)W_j'^{(2)}(\xi,\rho_2)\right]-$$
$$-Bi\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j^{(2)}(\xi,\rho_2)+B_{n-j}^{(2)}(\xi)W_j^{(2)}(\xi,\rho_2)\right];$$
$$c_{2,n}=\sum_{j=1}^{n}A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j^{(1)}(\xi,\rho_1)-\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j^{(2)}(\xi,\rho_1)+B_{n-j}^{(2)}(\xi)W_j^{(2)}(\xi,\rho_1)\right];$$
$$c_{3,n}=\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j'^{(2)}(\xi,\rho_1)+B_{n-j}^{(2)}(\xi)W_j'^{(2)}(\xi,\rho_1)\right]-\tilde{\lambda}_T\sum_{j=1}^{n}A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j'^{(1)}(\xi,\rho_1),$$

де введено позначення $G_j'^{(i)}\equiv d_\rho G_j^{(i)}$, $W_j'^{(i)}\equiv d_\rho W_j^{(i)}$.

Розв'язок систем (18) можна знайти у вигляді

$$A_n^{(2)}=\frac{\Delta_1}{\Delta};\quad B_n^{(2)}=\frac{\Delta_2}{\Delta};\quad A_n^{(1)}=\frac{c_{3,n}+\omega_2 I_1(\omega_2\rho_1)A_n^{(2)}-\omega_2 K_1(\omega_2\rho_1)B_n^{(2)}}{\tilde{\lambda}_T\omega_1 I_1(\omega_1\rho_1)}, \quad (19)$$

де

$$\Delta=\tilde{\lambda}_T\omega_1\omega_2 I_1(\omega_1\rho_1)\left[I_1(\omega_2\rho_2)K_0(\omega_2\rho_1)+K_1(\omega_2\rho_2)I_0(\omega_2\rho_1)\right]+\tilde{\lambda}_T\omega_1\,\mathrm{Bi}\,I_1(\omega_1\rho_1)\left[I_0(\omega_2\rho_2)K_0(\omega_2\rho_1)-\right.$$
$$\left.-K_0(\omega_2\rho_2)I_0(\omega_2\rho_1)\right]+\omega^2{}_2 I_0(\omega_1\rho_1)\left[I_1(\omega_2\rho_2)K_1(\omega_2\rho_1)-K_1(\omega_2\rho_2)I_1(\omega_2\rho_1)\right]+$$
$$+\omega_2\,\mathrm{Bi}\,I_0(\omega_1\rho_1)\left[K_0(\omega_2\rho_2)I_1(\omega_2\rho_1)+I_0(\omega_2\rho_2)K_1(\omega_2\rho_1)\right],$$
$$\Delta_1=c_{1,n}\left(\tilde{\lambda}_T\omega_1 K_0(\omega_2\rho_1)I_1(\omega_1\rho_1)+\omega_2 K_1(\omega_2\rho_1)I_0(\omega_1\rho_1)\right)-$$
$$-\left(c_{n,3}I_0(\omega_1\rho_1)+c_{n,2}\tilde{\lambda}_T\omega_1 I_1(\omega_1\rho_1)\right)\left(-\omega_2 K_1(\omega_2\rho_2)+\mathrm{Bi}\,K_0(\omega_2\rho_2)\right),$$
$$\Delta_2=c_{n,1}\left(\omega_2 I_0(\omega_1\rho_1)I_1(\omega_2\rho_1)-\tilde{\lambda}_T\omega_1 I_0(\omega_2\rho_1)I_1(\omega_1\rho_1)\right)+$$
$$+\left(\tilde{\lambda}_T\omega_1 I_1(\omega_1\rho_1)c_{n,2}+I_0(\omega_1\rho_1)c_{n,3}\right)\left(\omega_2 I_1(\omega_2\rho_2)+\mathrm{Bi}\,I_0(\omega_2\rho_2)\right).$$

У розв'язки (19) входить уведена нами вище невідома функція $\bar{g}_n(\xi)$. Для її визначення повернемось до змішаних умов (14). Враховуючи подання (10) та формули обернення $\cos$-перетворення Фур'є, ці умови можна записати у вигляді послідовності парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty \bar{g}_n(\xi)\left[1+f(\xi)\right]\cos(\xi\gamma)\,d\xi=$$
$$=T_{cn}-\int_0^\infty F_n(\xi)\cos(\xi\gamma)d\xi,\ |\gamma|\le 1; \quad (20)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}_n(\xi)\cos(\xi\gamma)\,d\xi = 0,$$

$$|\gamma| > 1,\ n = 0,1,2,\ldots, \qquad (21)$$

де $\bar{g}_n(\xi)$ – шукана функція, а $f(\xi)$ та $F_n(\xi)$ - відомі функції, що складаються із комбінацій модифікованих функцій Беселя, функцій Макдональда та знерозмірених теплофізичних параметрів.

Для побудови розв'язку послідовностей парних інтегральних рівнянь (17), (18) скористаємось методикою, описаною в [5, 6]. Для цього шукатимемо функцію $\bar{g}_n(\xi)$ у вигляді ряду Неймана

$$\bar{g}_n(\xi) = \sum_{k=0}^\infty a_{n,k} J_{2k+1/2}(\xi). \qquad (20)$$

Безпосередньою підстановкою легко пересвідчитись, що рівняння (21) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах $a_{n,k}$, а з рівняння (20) після перетворень одержуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\tilde{a}_{n,k} + \sum_{m=0}^\infty \tilde{a}_{n,m} b_{m,k} = c_{n,k}, \qquad (21)$$

де

$$\tilde{a}_{n,k} = a_{n,k}(2k+1)^{-1/2};$$

$$b_{m,k} = 2\sqrt{2m+1}\sqrt{2k+1}\times$$

$$\times\int_0^\infty \xi^{-1} f(\xi) J_{2m+1}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi;$$

$$c_{n,k} = 2\sqrt{2k+1}\times$$

$$\times\int_0^\infty \left[-\xi^{-1/2}\bar{q}_n(\xi) + \xi^{-1} F_n(\xi)\right] J_{2k+1}(\xi) d\xi.$$

Використовуючи властивості рядів Неймана та розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна, можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^\infty \left(b_{m,k}\right)^2 < \infty,$$

$$\sum_{k=0}^\infty \left(c_{n,k}\right)^2 < \infty,\ n = 0,1,2,\ldots. \qquad (22)$$

Виконання умов (24) свідчить про квазірегулярність систем (21) і забезпечує збіжність числової процедури редукції.

Знаходження невідомих $\tilde{a}_{n,k}$ з систем (22) завершує побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності. При цьому температурне поле в покритті та циліндрі розраховується за формулою

$$T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau) =$$

$$= \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^\infty L_n(\lambda\tau)\int_0^\infty \bar{T}_n^{(i)}(\xi,\rho)\cos(\xi\gamma)\,d\xi. \qquad (23)$$

Висновок. Отже, у роботі отримано точний аналітичний розв'язок осесиметричної нестаціонарної задачі теплопровідності для системи двох циліндрів, що нагріваються на обмеженій частині граничної поверхні та охолоджуються поза неї. Розв'язок отримано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є у вигляді ряду за поліномами Лагерра. Коефіцієнти цього ряду знаходяться із рекурентних співвідношень. Обговорюються проблеми збіжності та стійкості числової реалізації запропонованого алгоритму.

Література

1. Springer Handbook of Nanomaterials / ed. R. Vajtai. Springer Science & Business Media, 2013. 1221 p.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наук. думка, 1992. 280 с.
3. Sneddon I. Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory. Amsterdam: North-Holl. Publ. Comp., 1966. 282 p.
4. Galazyuk V. A., Turchin I. M. Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. *International Applied Mechanics*. 1998. Vol. 34, No 9. P. 886–893.
5. Turchin I. M. Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2012. Vol. 85, Iss. 6. P. 1453–1462.

6. Turchin I.M. Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015. Vol. 88, Iss. 5. P. 1135–1144.
7. Sneddon I. Fourie transforms. New York: McCraw-Hill Book Company, 1951. 542 p.

References

1. Vajtai, R. (Ed.) (2013). Springer Handbook of Nanomaterials. Springer Science & Business Media.
2. Kolyano, Yu. M. (1992). Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela. Kiev: Naukova Dumka.
3. Sneddon, I. (1966). Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp.
4. Galazyuk, V. A. & Turchin, I. M. (1998). Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. International Applied Mechanics, Vol. 34, No. 9, pp. 886–893.
5. Turchin, I. M. (2012). Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Vol. 85, Issue 6, pp. 1453–1462.
6. Turchin, I. M., Timar, I. & Kolodiy, Yu. O. (2015). Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Vol. 88, Issue 5, pp. 1135–1144.
7. Sneddon, I. (1951). Fourier transforms. New York: McCraw-Hill Book Company.