УДК 517.944 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-12

НОВА ПОСТАНОВКА КРАЙОВОЇ 2π-ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В АСИМПТОТИЧНІЙ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Н. Г. Хома[1], С. Г. Хома–Могильська[1], Л. Г. Хохлова[2]

[1]Тернопільський національний економічний університет,
[2]Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира Гнатюка
khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Ключові слова:
крайова періодична задача, незбурене рівняння, властивості розв'язку, операторний метод.

До цього часу асимптотичними методами Крилова–Боголюбова–Митропольського–Мосеєнкова досліджувалися гіперболічні рівняння другого порядку з малим параметром ε у правій частині при умові, коли незбурене ($\varepsilon = 0$) рівняння має розв'язок у вигляді тригонометричного ряду Фур'є. Ці ж методи з припущенням мализни параметра ε дозволили будувати наближений розв'язок крайової періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку, права частина якого містить малий параметр ε , ліва частина – утворена оператором Даламбера. У процесі дослідження логічно виникає запитання, при яких умовах незбурене ($\varepsilon = 0$) рівняння має розв'язок у вигляді тригонометричного ряду Фур'є. Їх встановленню присвячена дана робота.

У першій частині роботи розглянуто незбурене рівняння, у лівій частині якого є оператор Даламбера, у правій частині – довільна функція $f(x,t)$. З використання операторного методу побудовано формальний розв'язок вказаного рівняння. Обґрунтовано ряд теорем і лем, які встановлюють умови існування класичного розв'язку крайової 2π -періодичної по змінній x задачі для незбуреного рівняння. При цьому визначено конкретний клас функцій $f(x,t)$, у якому вказана вище задача має класичний розв'язок. Виділено підклас функцій $f(x,t)$, у якому класичний розв'язок поставленої задачі є непарною функцією, а, отже, з врахуванням 2π -періодичності розкладається у тригонометричний ряд Фур'є по синусах.

Отримані результати дають можливість побудувати наближений розв'язок квазілінійної крайової 2π -періодичної по змінній x задачі для гіперболічного рівняння другого порядку, права частина якого є функція $\varepsilon F(x,t,u)$ з малим параметром ε . У другій частині роботи наведено схему побудови наближеного розв'язку. Як нульове наближення взято зображення класичного розв'язку крайової 2π -періодичної по змінній x задачі для незбуреного рівняння, встановленого в першій частині роботи.

NEW STATEMENT OF BOUNDARY-VALUE 2Π-PERIODIC PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC SECOND ORDER EQUATION IN THE ASYMPTOTIC THEORY OF NONLINEAR OSCILLATIONS

N. H. Khoma[1], S. H. Khoma-Mohylska[1], L. H. Khokhlova[2]

[1]Ternopil national economic university,
[2]Ternopil Volodymyr Hnatiuk national pedagogical university
khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Key words:
boundary-value periodic problem, undisturbed equation, solution properties, operator method.

Until now the hyperbolic second order equations with small parameter ε in right side have been researched by asymptotic methods of Krylov–Boholiubov–Mytropolskyi–Moseienkov provided that undisturbed ($\varepsilon = 0$)

equation had solution as trigonometric Fourier series. With the assumption of the parameter ε is very small these methods allow to build an approximate solution of the boundary-value periodic problem for hyperbolic second order equation in which right side has small parameter ε and left side is formed by the operator of D'Alembert. In the process of research a logical question arises under which conditions the undisturbed ($\varepsilon = 0$) equation has solution as trigonometric Fourier series. Our work is devoted to establishment of such conditions.

In the first part of the article we consider the undisturbed equation in the left part of which there is the D'Alembert operator and on the right side there is an arbitrary function $f(x,t)$. Using the operator method, a formal solution of this equation is constructed. The theorems and lemmas that establish the conditions for the existence of a classical solution to the boundary-value 2π-periodic in x problem for an undisturbed equation are proved. The specific class of functions $f(x,t)$ in which the above problem has a classical solution is defined. The subclass of functions in which the classical solution to the problem is an odd function and hence taking into account 2π-periodicity decomposes into a trigonometric sine series is selected.

The obtained results make it possible to construct an approximate solution to a quasilinear boundary-value 2π-periodic in x problem for a hyperbolic second order equation right side of which is a function $\varepsilon F(x, t, u)$ with small parameter ε. In the second part of the article the scheme of constructing an approximate solution is given. As a zero approximation, we take the representation of the classical solution to the boundary-value 2π-periodic in x problem for the undisturbed equation established in the first part of the article.

Вступ. Крайова 2π-періодична задача для гіперболічного рівняння другого порядку вигляду

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \lambda u + \varepsilon f\left(x, t, u, u_t, u_x\right), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x,t) \tag{3}$$

досліджувалась у деякому прямокутнику $\Pi_T = \{0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le 2\pi\}$ асимптотичними методами [1, 2] у припущенні, що її розв'язок існує і зображається рядом Фур'є

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t,\varepsilon)\sin kx, \tag{4}$$

який автоматично задовольняє крайовим умовам (2). Це пов'язано з тим, що основна ідея застосування асимптотичних методів для розв'язання крайової 2π-періодичної по t задачі (1)–(3) полягає у використанні теорії рядів Фур'є [3, 4]. Як відомо, для дослідження рівняння (1) спочатку розглядають незбурене рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \lambda u, \tag{5}$$

яке одержується з (1), коли $\varepsilon = 0$, з тими ж крайовими умовами (2). Далі, припускаючи, що $(ak)^2 - \lambda > 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots,$ за допомогою методу Фур'є [3] знаходять розв'язок рівняння (5) у вигляді ряду

$$u(x,t,0) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t\right)\sin kx, \tag{6}$$

де $\omega_k = \sqrt{(ak)^2 - \lambda}$ – частоти нормальних коливань, A_k і B_k – сталі величини. Вважаючи, що у зв'язку з мализною параметра ε форми коливань нормальних тонів при наявності збурення $(\varepsilon \ne 0)$ з великою точністю визначаться тими ж власними функціями $\sin kx$, розв'язок збуреного рівняння (1) шукають у вигляді ряду Фур'є (4), де $z_k(t,\varepsilon)$ – функції, які потрібно визначити. Саме такі кроки дослідження пропонувалися у минулому столітті [5–10] при вивченні крайових 2π-періодичних по t задач для різних видів гіперболічних рівнянь та систем.

Постановка проблеми. У даній роботі запропонована нова постановка крайової 2π-періодичної по змінній x задачі для більш загального гіперболічного рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t) + \varepsilon F(x,t,u). \quad (7)$$

Спочатку розглядається крайова 2π-періодична по x задача для лінійного неоднорідного рівняння вигляду

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \ x \in \mathbf{R}, \ 0 \le t \le T, \quad (8)$$

$$u(x,0) = u(x,\pi) = 0, \ x \in \mathbf{R}, \quad (9)$$

$$u(x+2\pi,t) = u(x,t), \ (x,t) \in \mathbf{R} \times [0,T] \quad (10)$$

і досліджується, для якого класу функцій $f(x,t)$ існує розв'язок, що володіє властивістю $u(-x,t) = -u(x,t)$. Далі за допомогою оператора, що породжує даний розв'язок, показано, як можна будувати послідовні наближення розв'язку крайової 2π-періодичної по x задачі для квазілінійного рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \varepsilon F(x,t,u).$$

Для цього використовуються такі простори і класи функцій:

C – простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbf{R} \times [0,T]$;

$C^{2,2}$ – простір функцій $u \in C$ таких, що $D_t^k D_x^l u \in C$;

$G_{\mathbf{R}}^x$ – простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbf{R} \times [0,T]$ разом із похідною по x, $G_{\mathbf{R}}^x \subset C^{1,0}$;

$Q_{2\pi}^x$ – простір функцій $f(x,t)$, які задовольняють на $\mathbf{R} \times [0,T]$ співвідношення $f(x+2\pi,t) = f(x,t)$;

$L(X,Y)$ – простір лінійних і обмежених відображень X в Y.

$$K_a = \{ f : f(x,t) = f(x+\pi,t) = f(x,\pi-t) = f(x+2\pi,t) \}.$$

$$K_a^- = \{ f : f(x,t) = f(x+\pi,t) = f(x,\pi-t) = -f(-x,t) = f(x+2\pi,t) \}.$$

Умови розв'язності лінійної задачі (8)–(10). Розглянемо функцію $u_a(x,t)$, визначену оператором P_a таким чином:

$$u_a(x,t) = (P_a f)(x,t) = = (L_a f)(x,t) + (\tilde{L}_a f)(x,t); \quad (11)$$

$$(L_a f)(x,t) = \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\, d\eta + \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\, d\eta, \quad (12)$$

$$(\tilde{L}_a f)(x,t) = -\frac{\pi - t}{4\pi a} \int_0^\pi d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\eta,\tau)\, d\eta - \frac{t}{4\pi a} \int_0^\pi d\tau \int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)} f(\eta,\tau)\, d\eta. \quad (13)$$

Справедливі твердження.

Лема 1. Якщо функція $f(x,t) \in \in G_{\mathbf{R}}^x \cap Q_{2\pi}^x$, то функція $u_{an}(x,t) = (L_a f)(x,t)$ є частинним класичним $\left(u_{an}(x,t) \in C^{2,2}\right)$ розв'язком рівняння (8).

Доведення. Обчислимо від функції $u_{an}(x,t) = (L_a f)(x,t)$ частинні похідні до другого порядку включно. Враховуючи формулу (12), знаходимо

$$(L_a f)(x,t) = \frac{1}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\, d\eta + \frac{1}{4a} \int_t^\pi d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\, d\eta,$$

$$\frac{\partial (L_a f)(x,t)}{\partial t} = \frac{a}{4a} \int_0^t \left(f(x+a(t-\tau),\tau) + f(x-a(t-\tau),\tau) \right) d\tau + \frac{a}{4a} \int_t^\pi \left(-f(x-a(t-\tau),\tau) - f(x+a(t-\tau),\tau) \right) d\tau;$$

$$\frac{\partial (L_a f)(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{4a} \int_0^t \left(f(x+a(t-\tau),\tau) - f(x-a(t-\tau),\tau) \right) d\tau +$$

$$+\frac{1}{4a}\int_t^{\pi}\left(f\left(x-a\left(t-\tau\right),\tau\right)-f\left(x+a\left(t-\tau\right),\tau\right)\right)d\tau.$$

Введемо позначення:

$$\alpha\left(x,t,\tau,a\right)=x+a\left(t-\tau\right),$$
$$\beta\left(x,t,\tau,a\right)=x-a\left(t-\tau\right).$$

Матимемо

$$\frac{\partial^2\left(L_af\right)\left(x,t\right)}{\partial t^2}=\frac{a}{4}\int_0^t\left(\frac{\partial f\left(\alpha,\tau\right)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f\left(\beta,\tau\right)}{\partial\beta}\right)d\tau+\frac{1}{2}f\left(x,t\right)+$$
$$+\frac{a}{4}\int_t^{\pi}\left(\frac{\partial f\left(\beta,\tau\right)}{\partial\beta}-\frac{\partial f\left(\alpha,\tau\right)}{\partial\alpha}\right)d\tau+\frac{1}{2}f\left(x,t\right)=$$
$$=f\left(x,t\right)+\frac{a}{4}\int_0^t\left(\frac{\partial f\left(\alpha,\tau\right)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f\left(\beta,\tau\right)}{\partial\beta}\right)d\tau+\frac{a}{4}\int_t^{\pi}\left(\frac{\partial f\left(\beta,\tau\right)}{\partial\beta}-\frac{\partial f\left(\alpha,\tau\right)}{\partial\alpha}\right)d\tau;$$
$$\frac{\partial^2\left(L_af\right)\left(x,t\right)}{\partial x^2}=\frac{1}{4a}\int_0^t\left(\frac{\partial f\left(\alpha,\tau\right)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f\left(\beta,\tau\right)}{\partial\beta}\right)d\tau+\frac{1}{4a}\int_t^{\pi}\left(\frac{\partial f\left(\beta,\tau\right)}{\partial\beta}-\frac{\partial f\left(\alpha,\tau\right)}{\partial\alpha}\right)d\tau.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2\left(L_af\right)\left(x,t\right)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\left(L_af\right)\left(x,t\right)}{\partial x^2}=f\left(x,t\right).$$

Лему 1 доведено.

Допоміжна лема. Нехай функція $K\left(x,t,\tau\right)$ визначена інтегралом

$$K\left(x,t,\tau\right)=\int_{x-b(t,\tau)}^{x+b(t,\tau)}f\left(\eta,\tau\right)d\eta. \qquad (14)$$

Тоді для кожної 2π-періодичної по x функції $f\left(x,t\right)\in C\bigcap Q_{2\pi}^x$ функція $K\left(x,t,\tau\right)$ є також 2π-періодичною по x.

Доведення. Справді, на підставі формули (14) знаходимо

$$K\left(x+2\pi,t,\tau\right)=\int_{x+2\pi-b(t,\tau)}^{x+2\pi+b(t,\tau)}f\left(\eta,\tau\right)d\eta=$$
$$=\int_{x-b(t,\tau)}^{x+b(t,\tau)}f\left(\gamma+2\pi,\tau\right)d\gamma=$$
$$=\int_{x-b(t,\tau)}^{x+b(t,\tau)}f\left(\gamma,\tau\right)d\gamma=K\left(x,t,\tau\right),$$

а це означає, що функція $K\left(x,t,\tau\right)$ – 2π-періодична по x, якщо функція $f\left(x,t\right)$ – 2π-періодична по x.

Допоміжну лему доведено.

Теорема 1. Якщо функція $f\left(x,t\right)\in C\bigcap Q_{2\pi}^x$, то функція $u_a\left(x,t\right)=\left(P_af\right)\left(x,t\right)$, визначена формулою (11), задовольняє крайовим умовам (9) і умові періодичності (10).

Доведення. Справді, згідно з допоміжною лемою переконуємося у виконанні умови (10). Далі на підставі формул (11)–(13) перевіримо виконання умов (9):

$$u_a\left(x,0\right)=\left(P_af\right)\left(x,0\right)=$$
$$=\left(L_af\right)\left(x,0\right)+\left(\tilde{L}_af\right)\left(x,0\right)=$$
$$=\frac{1}{4a}\int_0^{\pi}d\tau\int_{x-a\tau}^{x+a\tau}f\left(\eta,\tau\right)d\eta-$$
$$-\frac{1}{4a}\int_0^{\pi}d\tau\int_{x-a\tau}^{x+a\tau}f\left(\eta,\tau\right)d\eta\equiv0,\quad\forall x\in\mathbf{R};$$
$$u_a\left(x,\pi\right)=\left(P_af\right)\left(x,\pi\right)=$$
$$=\left(L_af\right)\left(x,\pi\right)+\left(\tilde{L}_af\right)\left(x,\pi\right)=$$
$$=\frac{1}{4a}\int_0^{\pi}d\tau\int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)}f\left(\eta,\tau\right)d\eta-$$
$$-\frac{1}{4a}\int_0^{\pi}d\tau\int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)}f\left(\eta,\tau\right)d\eta\equiv0,\quad\forall x\in\mathbf{R}.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Якщо функція $f\left(x,t\right)\in G_{\mathbf{R}}^x\bigcap Q_{2\pi}^x$ і виконується умова

$$\frac{\partial^2\left(\tilde{L}_af\right)\left(x,t\right)}{\partial x^2}=0,\ \forall\left(x,t\right)\in\mathbf{R}\times\left[0,T\right], \qquad (15)$$

то функція $u_a(x,t)=(P_af)(x,t)$ є частинним класичним $\left(u_a(x,t)\in C^{2,2}\right)$ розв'язком крайової 2π-періодичної по x задачі (8)–(10).

Доведення. Згідно з теоремою 1 функція $u_a(x,t)=(P_af)(x,t)$ задовольняє умовам (9)–(10). Враховуючи твердження леми 1 і умови теореми 2, доведемо, що функція $u_a(x,t)=(P_af)(x,t)$ задовольняє рівнянню (8). Справді, обчислюючи частинні похідні функції $u_a(x,t)$, маємо

$$\frac{\partial (P_af)(x,t)}{\partial t}=(L_af)'_t(x,t)+(\tilde{L}_af)'_t(x,t);$$

$$\frac{\partial^2 (P_af)(x,t)}{\partial t^2}=(L_af)''_{tt}(x,t)+(\tilde{L}_af)''_{tt}(x,t)=$$

$$=(L_af)''_{tt}(x,t). \qquad (16)$$

При знаходженні другої частинної похідної $(P_af)''_{tt}(x,t)$ функції $(P_af)(x,t)$ враховано той факт, що функція $(\tilde{L}_af)(x,t)$ лінійно залежна від аргументу t, тому друга частинна похідна $(\tilde{L}_af)''_{tt}(x,t)$ тотожно дорівнює нулеві, тобто

$$\frac{\partial^2 (\tilde{L}_af)(x,t)}{\partial t^2}\equiv 0. \qquad (17)$$

Беручи до уваги виконання умови (15) теореми 2, знаходимо наступні похідні:

$$\frac{\partial (P_af)(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial (L_af)(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial (\tilde{L}_af)(x,t)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 (P_af)(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 (L_af)(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (18)$$

Отже, враховуючи формули (16) і (18), одержимо

$$\frac{\partial^2 (P_af)(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 (P_af)(x,t)}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{\partial^2 (L_af)(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 (L_af)(x,t)}{\partial x^2}.$$

На основі твердження леми 1 отримуємо

$$\frac{\partial^2 (P_af)(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 (P_af)(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t),$$

а це означає, що функція $u_a(x,t)=$ $=(P_af)(x,t)$ є класичним розв'язком 2π-періодичної по x задачі (8)–(10), а функція $z_a(x,t)=(\tilde{L}_af)(x,t)$ при виконанні умов (15), (17) є розв'язком однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Для остаточного з'ясування умов розв'язності задачі (8)–(10) залишається встановити клас функцій $f(x,t)$, для якого виконується умова (15).

Функцію $z_a(x,t)=(\tilde{L}_af)(x,t)$ запишемо так:

$$(\tilde{L}_af)(x,t)=-\frac{\pi-t}{4a\pi}\gamma(x)-\frac{t}{4a\pi}\delta(x), \qquad (19)$$

де

$$\gamma(x)=\int_0^{\pi}d\tau\int_{x-a\tau}^{x+a\tau}f(\eta,\tau)\,d\eta; \qquad (20)$$

$$\delta(x)=\int_0^{\pi}d\tau\int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)}f(\eta,\tau)\,d\eta. \qquad (21)$$

Знайдемо похідну функції $\gamma(x)$. На основі формули (20) одержуємо

$$\gamma'(x)=\int_0^{\pi}\left(f(x+a\tau,\tau)-f(x-a\tau,\tau)\right)d\tau=$$

$$=\int_0^{\pi}f(x+a\tau,\tau)\,d\tau-\int_0^{\pi}f(x-a\tau,\tau)\,d\tau. \qquad (22)$$

У другому інтегралі рівності (22) зробимо заміну змінної $\tau=\pi-\theta,\ \ d\tau=-d\theta,$ $\pi\le\theta\le 0.$ Тоді рівність (22) запишеться так:

$$\gamma'(x)=\int_0^{\pi}f(x+a\tau,\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_0^{\pi}f(x+a\theta-a\pi,\pi-\theta)\,d\theta. \qquad (23)$$

Рівність

$$\gamma'(x)\equiv 0,\ \ \forall x\in\mathbf{R} \qquad (24)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли рівність (23) дорівнює нулеві. Це можливо, коли

$$a=2k-1,\ \ k\in\mathbf{N} \qquad (25)$$

і у класі функцій

$$K_a = \{ f : f(x,t) = f(x+\pi,t) = \\ = f(x,\pi - t) = f(x+2\pi,t) \}. \qquad (26)$$

Якщо виконуються умови (25) і (26), то на основі рівності (23) отримуємо

$$\gamma'(x) = \int_0^\pi f(x+a\tau,\tau)\,d\tau - \\ -\int_0^\pi f(x+a\theta,\theta)\,d\theta \equiv 0, \ \forall x \in \mathbf{R} \qquad (27)$$

і

$$\gamma(x) = const \equiv A, \ \forall x \in \mathbf{R}. \qquad (28)$$

Аналогічно знаходимо похідну

$$\delta'(x) = \int_0^\pi \big(f(x+a(\pi-\tau),\tau) - \\ - f(x-a(\pi-\tau),\tau)\big) d\tau = \\ = \int_0^\pi f(x+a(\pi-\tau),\tau)\,d\tau - \\ - \int_0^\pi f(x-a(\pi-\tau),\tau)\,d\tau. \qquad (29)$$

У другому інтегралі рівності (29) проведемо заміну змінної $\tau = \pi - \theta$. При виконанні умов (25) і (26) маємо

$$\delta'(x) = \int_0^\pi f(x+a(\pi-\tau),\tau)\,d\tau - \int_0^\pi f(x-a\theta,\pi-\theta)\,d\theta =$$
$$= \int_0^\pi f(x+a(\pi-\tau),\tau)\,d\tau - \int_0^\pi f(x+a(\pi-\theta)-a\pi,\pi-\theta)\,d\theta =$$
$$= \int_0^\pi f(x+a(\pi-\tau),\tau)\,d\tau - \int_0^\pi f(x+a(\pi-\theta)-(2k-1)\pi,\pi-\theta)\,d\theta =$$
$$= \int_0^\pi f(x+a(\pi-\tau),\tau)\,d\tau - \int_0^\pi f(x+a(\pi-\theta)+\pi,\pi-\theta)\,d\theta =$$
$$= \int_0^\pi f(x+a(\pi-\tau),\tau)\,d\tau - \int_0^\pi f(x+a(\pi-\theta),\theta)d\theta \equiv 0, \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Отже,

$$\delta(x) = const \equiv B, \ \forall x \in \mathbf{R}. \qquad (30)$$

Тепер на підставі доведених рівностей (28), (30) і рівності (19) одержуємо

$$(\tilde{L}_a f)(x,t) = -\frac{\pi - t}{4a\pi} A - \frac{t}{4a\pi} B. \qquad (31)$$

Справедливе твердження.

Теорема 3. Якщо функція $f(x,t) \in \in G_{\mathbf{R}}^x \bigcap K_a$, то функція

$$u_a(x,t) = (P_a f)(x,t) \equiv \\ \equiv (L_a f)(x,t) - \frac{\pi - t}{4a\pi} A - \frac{t}{4a\pi} B,$$

де

$$A = \int_0^\pi d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\eta,\tau)\,d\eta \equiv const;$$

$$B = \int_0^\pi d\tau \int_{x-a(\pi-\tau)}^{x+a(\pi-\tau)} f(\eta,\tau)\,d\eta \equiv const$$

при $a = 2k-1, \ k \in \mathbf{N}$, є частинним класичним $(u_a(x,t) \in C^{2,2})$ розв'язком крайової 2π-періодичної по x задачі (8)–(10).

Доведення базується на тому факті, що функція $(\tilde{L}_a f)(x,t) = -\frac{\pi - t}{4a\pi} A - \frac{t}{4a\pi} B$ задовольняє умові (15) теореми 2 і є розв'язком однорідного рівняння $\overset{o}{u}_{tt} - a^2 \overset{o}{u}_{xx} = 0$. Якщо розглянемо клас функцій

$$K_a^- = \{ f : f(x,t) = f(x+\pi,t) = f(x,\pi-t) = -f(-x,t) = f(x+2\pi,t) \}, \qquad (32)$$

то справедливі твердження.

Теорема 4. Якщо функція $f(x,t) \in \in G_{\mathbf{R}}^x \bigcap K_a^-$, то функція $u_a(x,t) = = (P_a^- f)(x,t) \equiv (L_a f)(x,t)$ є при $a = 2k-1$, $k \in \mathbf{N}$ розв'язком крайової 2π-періодичної по x задачі (8)–(10).

Доведення. Справді, так як $f(x,t) \in K_a^-$, на основі формул (20) і (21) маємо

$$A=\gamma(0)=0,\quad B=\delta(0)=0.$$

Звідси випливає, що $\left(\tilde{L}_a f\right)(x,t)\equiv 0$, $\forall(x,t)\in\mathbf{R}\times[0,T]$, а отже $u_a(x,t)(x,t)=$ $=\left(P_a^- f\right)(x,t)\equiv\left(L_a f\right)(x,t)$ є розв'язком крайової 2π -періодичної по x задачі (8)–(10).

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. Якщо функція $f(x,t)\in$ $\in G_{\mathbf{R}}^x\bigcap K_a^-$, то функція $u_a(x,t)=$ $=\left(P_a^- f\right)(x,t)\equiv\left(L_a f\right)(x,t)$ задовольняє і крайовим умовам

$$\left(P_a^- f\right)(0,t)=\left(P_a^- f\right)(\pi,t)=0,$$

тобто $\left(L_a f\right)(0,t)=\left(L_a f\right)(\pi,t)=0$.

Доведення. На основі формули (12) отримуємо

$$\left(L_a f\right)(0,t)=\frac{1}{4a}\int_0^t d\tau\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\,d\eta+\frac{1}{4a}\int_t^\pi d\tau\int_{a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\,d\eta=0;$$

$$\left(L_a f\right)(\pi,t)=\frac{1}{4a}\int_0^t d\tau\int_{\pi-a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\,d\eta+\frac{1}{4a}\int_t^\pi d\tau\int_{\pi+a(t-\tau)}^{\pi-a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{4a}\int_0^t d\tau\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\pi+\gamma,\tau)\,d\gamma+\frac{1}{4a}\int_t^\pi d\tau\int_{a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\pi+\gamma,\tau)\,d\gamma=$$

$$=\frac{1}{4a}\int_0^t d\tau\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\gamma,\tau)\,d\gamma+\frac{1}{4a}\int_t^\pi d\tau\int_{a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\gamma,\tau)\,d\gamma=0.$$

Теорему 5 доведено.

Доведемо ще одну властивість функції $\left(P_a^- f\right)(x,t)=\left(L_a f\right)(x,t)$

$$\left(P_a^- f\right)(-x,t)=-\left(P_a^- f\right)(x,t).\qquad(33)$$

З формули (12) одержуємо

$$\left(P_a^- f\right)(-x,t)=\left(L_a f\right)(-x,t)=\frac{1}{4a}\int_0^t d\tau\int_{-x-a(t-\tau)}^{-x+a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\,d\eta+\frac{1}{4a}\int_t^\pi d\tau\int_{-x+a(t-\tau)}^{-x-a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\,d\eta=$$

$$=-\frac{1}{4a}\int_0^t d\tau\int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(-\gamma,\tau)\,d\gamma-\frac{1}{4a}\int_t^\pi d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(-\gamma,\tau)\,d\gamma=$$

$$=-\frac{1}{4a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\gamma,\tau)\,d\gamma-\frac{1}{4a}\int_t^\pi d\tau\int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\gamma,\tau)\,d\gamma=$$

$$=-\left(\frac{1}{4a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\gamma,\tau)\,d\gamma+\frac{1}{4a}\int_t^\pi d\tau\int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\gamma,\tau)\,d\gamma\right)=-\left(P_a^- f\right)(x,t).$$

Отже, при $f(x,t)\in K_a^-$ функція $u_a^-(x,t)(x,t)=\left(P_a^- f\right)(x,t)$ є непарною по x, тобто виконується умова (33).

Властивість (33) доведено.

Тепер можна, використовуючи теорему Стеклова [3, с.115], сформулювати твердження про розклад функції (непарної) у ряд Фур'є.

Теорема 6. Якщо функція $f(x,t)\in$ $\in G_{\mathbf{R}}^x\bigcap K_a^-$, то розв'язок крайової 2π -періодичної по x задачі (8)–(10) $u_a(x,t)(x,t)=$ $=\left(P_a^- f\right)(x,t)=\left(L_a f\right)(x,t)$ розкладається у тригонометричний ряд Фур'є вигляду (4)

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} z_k(t,0)\sin kx.\qquad(34)$$

Таким чином, ми знайшли клас функцій K_a^-, який дозволяє вирішити проблему існування і розкладу розв’язку крайової лінійної 2π -періодичної по x задачі (8)–(10) у ряд Фур’є.

Побудова наближеного розв’язку квазілінійної крайової 2π-періодичної по x задачі. Розглянемо крайову 2π -періодичну по x задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \varepsilon F\left(x,t,u\right), \qquad (35)$$

$$u\left(x,0\right) = u\left(\pi,t\right) = 0, \qquad (36)$$

$$u\left(x+2\pi,t\right) = u\left(x,t\right), \qquad (37)$$

при такому припущенні: для кожної функції $u\left(x,t\right) \in K_a^-$ скалярна функція $F\left(x,t,u\left(x,t\right)\right)$ правої частини рівняння (35) задовольняє умові $F\left(x,t,u\left(x,t\right)\right) \in K_a^-$.

Щоб вказане припущення виконувалося, нам потрібно довести дві властивості оператора :

1) $\left(L_a f\right)\left(\pi + x,t\right) = \left(L_a f\right)\left(x,t\right)$;

2) $\left(L_a f\right)\left(x,\pi - t\right) = \left(L_a f\right)\left(x,t\right)$.

Доведемо першу властивість. Використовуючи формулу (12), одержуємо

$$\left(L_a f\right)\left(\pi + x,t\right) = \frac{1}{4a}\int_0^t d\tau \int_{\pi+x-a(t-\tau)}^{\pi+x+a(t-\tau)} f\left(\eta,\tau\right)d\eta + \frac{1}{4a}\int_t^{\pi} d\tau \int_{\pi+x+a(t-\tau)}^{\pi+x-a(t-\tau)} f\left(\eta,\tau\right)d\eta =$$

$$= \frac{1}{4a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f\left(\pi+\gamma,\tau\right)d\gamma + \frac{1}{4a}\int_t^{\pi} d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f\left(\pi+\gamma,\tau\right)d\gamma = \left(L_a f\right)\left(x,t\right).$$

Властивість 1) доведена.

На основі цієї ж формули (12) доведемо другу властивість. Маємо

$$\left(L_a f\right)\left(x,\pi - t\right) = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi-t} d\tau \int_{x-a(\pi-t-\tau)}^{x+a(\pi-t-\tau)} f\left(\eta,\tau\right)d\eta + \frac{1}{4a}\int_{\pi-t}^{\pi} d\tau \int_{x+a(\pi-t-\tau)}^{x-a(\pi-t-\tau)} f\left(\eta,\tau\right)d\eta.$$

Зробимо у даній рівності заміну змінної $\tau = \pi - \theta$. Отримаємо

$$\left(L_a f\right)\left(x,\pi - t\right) = -\frac{1}{4a}\int_{\pi}^{t} d\theta \int_{x-a(-t-\theta)}^{x+a(-t-\theta)} f\left(\eta,\pi-\theta\right)d\eta - \frac{1}{4a}\int_t^{0} d\theta \int_{x+a(-t-\theta)}^{x-a(-t-\theta)} f\left(\eta,\pi-\theta\right)d\eta =$$

$$= \frac{1}{4a}\int_0^t d\theta \int_{x-a(t-\theta)}^{x+a(t-\theta)} f\left(\eta,\theta\right)d\eta + \frac{1}{4a}\int_t^{\pi} d\theta \int_{x+a(t-\theta)}^{x-a(t-\theta)} f\left(\eta,\theta\right)d\eta = \left(L_a f\right)\left(x,t\right).$$

Отже, якщо функція $f\left(x,t\right) \in K_a^-$, то $\left(L_a f\right)\left(x,t\right) \in K_a^-$.

Тоді вибираємо довільну функцію $f\left(x,t\right) \in K_a^-$ і за нульове наближення приймаємо функцію

$$u_0\left(x,t\right) = \left(L_a f\right)\left(x,t\right) \in K_a^-,$$

$$u_1\left(x,t\right) = \varepsilon\left(L_a F\left[u_0\right]\right)\left(x,t\right),$$

$$u_2\left(x,t\right) = \varepsilon\left(L_a F\left[u_1\right]\right)\left(x,t\right),$$

$$u_3\left(x,t\right) = \varepsilon\left(L_a F\left[u_2\right]\right)\left(x,t\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n\left(x,t\right) = \varepsilon\left(L_a F\left[u_{n-1}\right]\right)\left(x,t\right),\ n = 1,2,3,...,$$

де $F\left[u_{n-1}\right] = F\left(x,t,u_{n-1}\left(x,t\right)\right), n \in \mathbf{N}$.

Зауважимо, що всі наближення $u_n\left(x,t\right) \in K_a^-$ на основі властивості оператора L_a.

Висновки. 1. Досліджено крайову 2π -періодичну задачу для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку, ліва частина якого оператор Даламбера $\partial^2/\partial t^2 - a^2\partial^2/\partial x^2$.

2. Встановлено клас функцій двох змінних $f\left(x,t\right)$, для яких існує частинний класичний розв’язок вказаної задачі.

3. Виділено підклас знайденого класу, у якому класичний розв’язок крайової 2π -періодичної по x задачі для неоднорідного гіперболічного рівняння є непарною функцією.

4. Запропоновано схему побудови послідовних наближень розв’язку квазілінійної крайової 2π -періодичної по x задачі.

Література

1. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические методы решения уравнений в частных производных. Киев: Вища шк., 1976. 590 с.
2. Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев: Наук. думка, 1991. 232 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977.
735 с.
4. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры изд-ва «Наука», 1960. Т. II. 462 с.
5. Артемьев Н. А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1937. № 1. С. 15–50.
6. Чернятин В. А. К проблеме существования решений смешанной задачи для одномерного волнового уравнения. *Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика и механика*. 1987. № 6. С. 7–16.
7. Полищук В. Н., Пташник Б. И. Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений и систем. Львов, 1982. 60 с.
8. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1984. 264 с.
9. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ: Наук. думка, 2002. 416 с.
10. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв’язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I. *Укр. мат. журн*. 2005. Т. 57, № 7. С. 912–921.

References

1. Mitropolskiy, Yu. A. & Moseenkov, B. I. (1976). Asymptotic methods for solving partial differential equations. Kiev: Vyshcha shkola.
2. Mitropolskiy, Yu. A., Khoma, G. P. & Gromyak, M. I. (1991). Asymptotic methods for the study of quasi-wave equations of hyperbolic type. Kiev: Nauk. dumka.
3. Tikhonov, A. N. & Samarskiy, A. A. (1977). Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka.
4. Fikhtengolts, G. M. (1960). Fundamentals of mathematical analysis. Moscow: Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury izdatelstva “Nauka”. Vol. II.
5. Artemev, N. A. (1937). Periodic solutions of a class of partial differential equations. Izv. AN SSSR. Ser. mat., No. 1, pp. 15–50.
6. Chernyatin, V. A. (1987). On the problem of the existence of solutions of a mixed problem for a one-dimensional wave equation. Vestn. Mosk. un-ta, Ser. 1, Matematika i mekhanika, No 6, pp. 7–16.
7. Polishchuk, V. N. & Ptashnik, B. I. (1982). A periodic boundary value problem for linear hyperbolic equations and systems. Lvov.
8. Ptashnik, B. I. (1984). Incorrect boundary value problems for partial differential equations. Kiev: Nauk. dumka.
9. Ptashnyk, B. Y., Ilkiv, V. S., Kmit, I. Ya. & Polishchuk, V. M. (2002). Nelokalni kraiovi zadachi dlia rivnian iz chastynnymy pokhidnymy. Kiyv: Naukova dumka.
10. Mytropolskyi, Yu. O. & Khoma-Mohylska, S. H. (2005). Umovy isnuvannia rozviazkiv kraiovoi periodychnoi zadachi dlia neodnoridnoho liniinoho hiperbolichnoho rivniannia druhoho poriadku. I .Ukr. mat. zhurn., Vol. 57, No. 7, pp. 912–921.