

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-13

## МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ «НАПІВНЕСКІНЧЕННОГО» СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ СЛАБКОСТИСЛИВОГО МАТЕРІАЛУ НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ

С. В. Чопоров, Н. І.-В. Манько, О. Г. Спиця, С. М. Гребенюк

*Запорізький національний університет*  
gsm1212@ukr.net

### Ключові слова:

напівнескінченний скінченний елемент, метод скінченних елементів, моментна схема, деформації, переміщення, функція зміни об'єму, функції форми.

Розглядається проблема математичного моделювання нескінченних та напівнескінченних областей у механіці деформівного твердого тіла. Описується застосування методу скінченних елементів до розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла. Наведено методику побудови глобальної матриці жорсткості з використанням як традиційних скінченних елементів, які використовуються в областях завдання навантажень та переміщень і де шукана функція швидко змінюється, так і нескінченних скінченних елементів. Для моделювання нескінченності в одному з напрямів запропоновано напівнескінченний скінченний елемент. Проблема полягає у тому, щоб за допомогою скінченного елемента із вузлами, які мають скінченні координати, змоделювати нескінченність. Для апроксимації координат у нескінченному напрямі використано спеціальні функції форми, які у вузлах, що моделюють нескінченність, прагнуть до нескінченності. Традиційна схема скінченного елемента має низку недоліків. Неврахування переміщень скінченного елемента як абсолютно жорсткого цілого. Наявність ефекту «хибного» зсуву. При розрахунку тіл із слабкостисливих матеріалів не враховується слабкостисливість. Це призводить до значних обчислювальних похибок при розрахунках конструкцій. Для усунення вказаних недоліків застосовано моментну схему скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів. Вона полягає у потрійній апроксимації функцій напружено-деформованого стану. В ряд розкладаються компоненти вектора переміщень і тензора деформацій та функція зміни об'єму. Згідно з моментною схемою у розкладанні компонентів тензора деформацій та функції зміни об'єму виключається низка доданків. З врахуванням вказаних апроксимацій на основі варіаційного принципу Лагранжа отримані основні співвідношення матриці жорсткості «напівнескінченного» скінченного елемента у вигляді шестигранника.

## STIFFNESS MATRIX OF A “SEMI-INFINITE” FINITE ELEMENT FOR A WEAKLY COMPRESSIBLE MATERIAL BASED ON THE MOMENT SCHEME

S. V. Choporov, N. I.-V. Manko, O. G. Spytzia, S. M. Grebenyuk

*Zaporizhzhia National University*  
gsm1212@ukr.net

### Key words:

semi-infinite element, finite element method, momentum scheme, strains, displacements, function of volume change, shape function.

The problem of bounded and unbounded domains modelling in mechanics is described in the article. Applying the finite element method to mechanics is also described. Both finite and infinite elements are employed at the method of a global stiffness matrix calculation. Finite elements are applied to regions where loads or displacements are defined and big gradients of unknown function are present. A semi-infinite element is developed to model infinity in one direction. The key idea here is to represent infinity by coordinates of a finite element. Special shape functions are approach to infinity at nodes modelled infinity. These functions approxi-

mate the coordinates at the unbounded direction. The traditional finite element scheme has several disadvantages. This leads to significant computational errors in the design calculations. The method of moment scheme of finite elements is used to improve accuracy of modelling. This method allows to represent displacements of an absolutely rigid element nodes, to find "wrong" shears, to model low compressibility materials. The moment scheme applies triple approximation of the stress strain state. Functions of a volume changing, components of a strains tensor, and a displacements vector are represented by series. Additional terms are included to the series. Stiffness matrix of an infinite hexahedral element is calculated using Variational Principle and Lagrange's Equations.

На практиці досить часто виникають задачі механіки, коли силова дія на тіло або взаємодія декількох тіл має локальний характер, а значна частина об'єкта не випробує впливу навантажень. Такі задачі моделюють рух автомобіля по дорозі, рух вагонних пар по залізничних рейках, роботу конвеєрних механізмів, транспортних стрічок, процедуру штамповки тощо. У вказаних задачах області, що розглядаються, мають один із розмірів набагато більший ніж два інші, і тому при моделюванні цей факт враховується або представленням цього розміру дуже значною величиною, або нескінченністю. Більшість таких задач неможливо розв'язати аналітичними методами, зважаючи на громіздкий математичний опис математичної моделі. Тому розв'язання таких задач здійснюється чисельними методами, які зазвичай потребують переходу від неперервного до дискретного представлення області, наприклад, у методі скінченних елементів (МСЕ). Побудова традиційної дискретної моделі нескінченної області приводить до необхідності розв'язання задачі нескінченної розмірності, що викликає низку обчислювальних та математичних складнощів. Тому на практиці чинять так. Розбивають нескінченну область скінченною кількістю дискретних вузлів і потім поступово збільшують їх кількість, допоки це не перестане значно впливати на чисельний розв'язок задачі. Але такий підхід потребує багатократного розв'язання задачі. Альтернативний підхід полягає у застосуванні «нескінченних» та «напівнескінченних» скінченних елементів (СЕ), які моделюють нескінченну частину області.

При використанні в методі скінченних елементів традиційних апроксимуючих функцій для визначення напружено-деформованого стану просторових конструкцій

проявляються такі негативні явища, як неврахування переміщень скінченного елемента як абсолютно жорсткого цілого і так званий ефект «хибного зсуву». Перше явище проявляється в уповільненій збіжності чисельних результатів, якщо прийнятий варіант апроксимації переміщень не дозволяє точно описати зміщення СЕ як жорсткого цілого. Друге явище проявляється в тому, що при згині тонких пластин та оболонок за допомогою просторових скінченних елементів значно зростають похибки, пов'язані з появою фіктивних зсувних деформацій. Крім того, при розрахунку слабкостисливих матеріалів, коли коефіцієнт Пуассона прагне до 0,5, традиційна схема скінченного елемента дає значні похибки при розв'язанні задач механіки.

Для усунення цих негативних явищ було розроблено так звану моментну схему скінченного елемента (МССЕ) для слабкостисливих матеріалів [1]. Основна ідея цієї схеми така: компоненти поля переміщень розкладаються в ряд в околі початку координат, і утримується деяка кількість початкових доданків, аналогічно розкладаються в ряд компоненти тензора деформацій. Після цього перевіряється відповідність останнього розкладання розкладанню переміщень, і якщо в це розкладання входять доданки, відсутні в розкладанні переміщень, то відповідні доданки видаляються з розкладання. Перетворені в такий спосіб розкладання використовуються при отриманні матриці жорсткості скінченного елемента. Так само чинять з розкладанням функції зміни об'єму, де згідно з певними правилами теж утримують деякі кількість доданків.

Дослідження нескінченних областей за допомогою МСЕ викладено здебільшого в

одновимірній та двовимірній постановках. У монографії [2] описано застосування напівнескінченного скінченного елемента при розв'язанні статичних задач механіки у двовимірній постановці. Чисельне моделювання розповсюдження хвиль з використанням ANSYS у одновимірному та двовимірному випадку за допомогою нескінченних скінченних елементів висвітлено у статті [3]. У роботі [4] нескінченні елементи було застосовано до дослідження попередньо напружених нескінченних середовищ у підземних виробках. Розв'язання статичних задач для необмежених областей за допомогою нескінченних елементів представлено у статті [5]. Модифікацію нескінченного скінченного елемента для підвищення точності обчислень шляхом збільшення кількості вузлів у необмеженому напрямку та вибору апроксимуючих функцій, що мають вид, подібний до виду очікуваного розв'язку, запропоновано у [6].

Найбільш поширеним скінченим елементом, який отримуються при дискретному представленні просторових об'єктів, є шестигранний скінченний елемент із восьмима вузловими точками. Для гарного узгодження скінченних елементів при об'єд-

нанні нескінченну область апроксимувати-мо теж шестигранним скінченим елементом, вузли однієї із граней якого знаходяться на нескінченності.

Для отримання основних співвідношень матриці жорсткості введемо дві системи координат: глобальну декартову ( $O'z'_1z'_2z'_3$ ) і місцеву ( $Ox_1x_2x_3$ ), пов'язану із скінченим елементом. У глобальній системі координат задаватимемо геометрію конструкції, зокрема нескінченну її частину, умови закріплення та прикладене навантаження. У місцевій системі координат «напівнескінченний» скінченний елемент відобразиться в елемент у вигляді куба з довжиною ребра, що дорівнює 2 (рис. 1). Помістимо початок місцевої системи координат у центр куба, а напрями осей виберемо такими, що збігаються з напрями ребер куба. Вузли  $5^*$ ,  $6^*$ ,  $7^*$ ,  $8^*$  відобразяться у декартовій системі координат у вузли з нескінченною координатою по третьому напрямку. Операції нескінченними величинами при виконанні обчислювальних операцій є незручною процедурою і потребує розробки додаткових алгоритмів при реалізації. Тому для зручності апроксимації у третьому напрямку введемо додаткові вузли 5, 6, 7, 8.

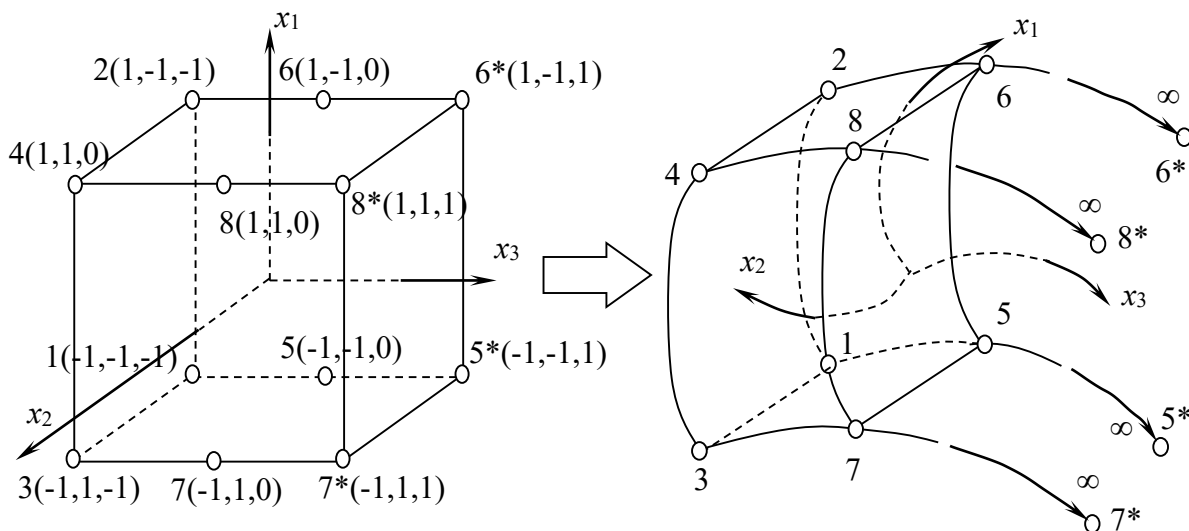


Рис. 1. «Напівнескінченний» скінченний елемент

Як невідомі у методі скінченних елементів приймемо компоненти вектора переміщень. Для побудови матриці жорсткості скористаємося варіаційним принципом Лагранжа. Потенціальну енергію середовища  $\Pi$  можна визначити так:

$$\Pi = W - A,$$

де  $W$  – енергія пружної деформації середовища,  $A$  – робота зовнішніх сил, що діють на середовище.

Запишемо варіацію потенціальної енергії середовища з урахуванням дискрети-

зації на скінченні елементи скінченних розмірів та напівнескінченні скінченні елементи:

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^m \delta W_i^{fin} + \sum_{i=m+1}^n \delta W_i^{inf} + \delta A, \quad (1)$$

де  $\delta W_i^{fin}$  – варіація пружної деформації  $i$ -го скінченного елемента скінченних розмірів,  $\delta W_i^{inf}$  – варіація пружної деформації  $i$ -го напівнескінченного скінченного елемента.

Щоб побудувати матрицю жорсткості напівнескінченного скінченного елемента,

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda \theta g^{ij}) \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

або

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} + \lambda \theta g^{ij} \delta \theta) dV, \quad (3)$$

де  $g^{ij}$  – компоненти метричного тензора,  $\mu, \lambda$  – сталі Ляме,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненти вектора деформацій,  $\theta$  – функція зміни об'єму.

В матричному вигляді матимемо

$$\delta W = \iiint_V (2\mu g^{ik} g^{jl} \{\varepsilon\} \delta \{\varepsilon\} + \lambda \{\theta\} g^{ij} \delta \{\theta\}) dV, \quad (4)$$

де  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}\}$  – вектор деформацій,  $\{\theta\} = \theta$  – функція зміни об'єму.

Згідно з моментною схемою скінченного елемента компоненти тензора деформацій, вектора переміщень та функція зміни

об'єму розкладаються в ряд за степеневими функціями:

$$\begin{aligned} u_{k'} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)} = \\ &= \omega_{k'}^{(000)} + \omega_{k'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(110)} + \\ &\quad + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(111)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 e_{ij}^{(pqr)} \psi^{(pqr)} = \\ &= e_{ij}^{(000)} + e_{ij}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{ij}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{ij}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{ij}^{(110)} \psi^{(110)} + \\ &\quad + e_{ij}^{(101)} \psi^{(101)} + e_{ij}^{(011)} \psi^{(011)} + e_{ij}^{(111)} \psi^{(111)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \xi^{(pqr)} \psi^{(pqr)} = \\ &= \xi^{(000)} + \xi^{(100)} \psi^{(100)} + \xi^{(010)} \psi^{(010)} + \xi^{(001)} \psi^{(001)} + \xi^{(110)} \psi^{(110)} + \\ &\quad + \xi^{(101)} \psi^{(101)} + \xi^{(011)} \psi^{(011)} + \xi^{(111)} \psi^{(111)}, \end{aligned} \quad (7)$$

розглянемо окремо варіацію енергії пружної деформації напівнескінченного скінченного елемента  $\delta W_i^{inf}$ , що займає об'єм  $V$  (надалі позначимо  $\delta W_i^{inf}$  як  $W$ ):

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (2)$$

або, скориставшись зв'язком між компонентами тензорів деформацій  $\varepsilon_{ij}$  та напружень  $\sigma^{ij}$  у вигляді закону Гука, матимемо

де  $\omega_{k'}^{(pqr)}$  – коефіцієнти розкладання компонентів вектора переміщень у  $k'$ -ому напрямі глобальної системи координат,  $e_{ij}^{(pqr)}$  – коефіцієнти розкладання компонентів тензора деформацій,  $\xi^{(pqr)}$  – коефіцієнти розкладання функції зміни об'єму,  $\psi^{(pqr)}$  – набір степеневих координатних функцій вигляду:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x_1)^p (x_2)^q (x_3)^r}{p! q! r!}, \quad (8)$$

де  $p, q, r$  – степені апроксимуючого полінома за відповідними координатними напрямками.

При диференціюванні матимемо:

$$\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} = \psi^{(p-\alpha q-\beta r-\gamma)}. \quad (9)$$

Враховуючи формули (5), (9), отримуємо вираз для похідних функції переміщень всередині скінченного елемента:

$$\begin{aligned} u_{k',1} &= \omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \\ &+ \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)}; \\ u_{k',2} &= \omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \\ &+ \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)}; \\ u_{k',3} &= \omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \\ &+ \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)}. \quad (10) \end{aligned}$$

Згідно зі співвідношенням Коші маємо:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_j} u_{m',i} + \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_i} u_{m',j} \right), \quad (11)$$

де  $z_{m'}$  – координати базисної системи, які визначаються всередині скінченного елемента через функції форми. Враховуючи, що деякі вузли скінченного елемента мають нескінченні координати, визначатимемо координати тільки через вузли, що мають скінченні координати, тобто 1-8. А для моделювання нескінченності використовуватимемо спеціальні апроксимуючі функції за третім напрямом. Тоді матимемо:

$$z_{m'} = \sum_{L=1}^8 N_L(x_1, x_2, x_3) z_{m'}^L, \quad (12)$$

де  $z_{m'}^L$  –  $m'$ -а координата  $L$ -ого вузла в базисній системі координат (рис. 1),  $m' = 1, 2, 3$ ;  $L = 1, \dots, 8$ ;  $N_L(x_1, x_2, x_3)$  –

функції форми  $L$ -ого вузла, які визначаються для скінченного елемента формулами вигляду:

для вузлів 1-4:

$$\begin{aligned} N_L(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\frac{1}{4} (1 + x_1 x_1^L) (1 + x_2 x_2^L) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \end{aligned}$$

для вузлів 5-8:

$$\begin{aligned} N_L(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 + x_1 x_1^L) (1 + x_2 x_2^L) \left( 1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right), \end{aligned}$$

де  $x_i^L$  –  $i$ -а координата  $L$ -ого вузла в системі координат скінченного елемента;  $i = 1, 2, 3$ ;  $L = 1, \dots, 8$ .

Функції форми  $N_L(x_1, x_2, x_3)$  для кожного вузла скінченного елемента набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} N_1(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{4} (1 - x_1) (1 - x_2) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \\ N_2(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\frac{1}{4} (1 + x_1) (1 - x_2) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \\ N_3(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\frac{1}{4} (1 - x_1) (1 + x_2) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \\ N_4(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\frac{1}{4} (1 + x_1) (1 + x_2) \frac{2x_3}{1 - x_3}, \\ N_5(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 - x_1) (1 - x_2) \left( 1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right), \\ N_6(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 + x_1) (1 - x_2) \left( 1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right), \\ N_7(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 - x_1) (1 + x_2) \left( 1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right), \\ N_8(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4} (1 + x_1) (1 + x_2) \left( 1 + \frac{2x_3}{1 - x_3} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи співвідношення (10)-(13), матимемо:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_1} \left( \omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)} \right), \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_2} \left( \omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)} \right), \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_3} \left( \omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)} \right), \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_2} \left( \omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_1} \left( \omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)} \right) \right), \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_3} \left( \omega_{k'}^{(100)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(011)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_1} \left( \omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)} \right) \right), \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_3} \left( \omega_{k'}^{(010)} + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(101)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial z_{m'}}{\partial x_2} \left( \omega_{k'}^{(001)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(110)} \right) \right). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Згідно з моментною схемою скінченного елемента для коефіцієнтів розкладання деформацій у (6), матимемо [1]:

$$\begin{aligned}
 e_{11}^{(pqr)} &= \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} f_{(p+1-\mu\ q-\nu\ r-\eta)}^{k'}; \\
 e_{22}^{(pqr)} &= \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} f_{(p-\mu\ q+1-\nu\ r-\eta)}^{k'}; \\
 e_{33}^{(pqr)} &= \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} f_{(p-\mu\ q-\nu\ r+1-\eta)}^{k'}; \\
 e_{12}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \left( \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} f_{(p+1-\mu\ q-\nu\ r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} f_{(p-\mu\ q+1-\nu\ r-\eta)}^{k'} \right); \\
 e_{13}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \left( \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} f_{(p+1-\mu\ q-\nu\ r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu+1\nu\eta)} f_{(p-\mu\ q-\nu\ r+1-\eta)}^{k'} \right); \\
 e_{23}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q \sum_{\eta=0}^r \left( \omega_{k'}^{(\mu\nu\eta+1)} f_{(p-\mu\ q+1-\nu\ r-\eta)}^{k'} + \omega_{k'}^{(\mu\nu+1\eta)} f_{(p-\mu\ q-\nu\ r+1-\eta)}^{k'} \right), \tag{15}
 \end{aligned}$$

де прийнято позначення

$$f_{(\mu\nu\eta)}^{k'} = \frac{\partial^{\mu+\nu+\eta} z_{k'}}{(\partial x_1)^\mu (\partial x_2)^\nu (\partial x_3)^\eta} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0}. \tag{16}$$

В отримані співвідношення для коефіцієнтів розкладання деформацій  $e_{ij}^{(pqr)}$

входять деякі коефіцієнти  $\omega_{k'}^{(pqr)}$ , що не входять у розкладання переміщень (5). Тоді доданки у розкладанні деформацій, що містять

хоча б один із членів, що не входять у розкладання переміщень, виключаються із розкладання (6). Враховуючи це, маємо такі вирази для деформацій:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)}\psi^{(010)} + \\ &+ e_{11}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{11}^{(011)}\psi^{(011)}, \\ \varepsilon_{22} &= e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)}\psi^{(100)} + \\ &+ e_{22}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{22}^{(101)}\psi^{(101)}, \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)} + \\ &+ e_{33}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{33}^{(110)}\psi^{(110)}, \\ \varepsilon_{12} &= e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)}\psi^{(001)}, \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)}\psi^{(010)}, \\ \varepsilon_{23} &= e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)}\psi^{(100)}.\end{aligned}\quad (17)$$

В матричній формі запису це розкладання можна представити у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi\}.\quad (18)$$

Коефіцієнти розкладання тензора деформацій  $e_{ij}^{(pqr)}$ , які визначаються в центрі скінченного елемента формулами (15), (16), можна представити через коефіцієнти апроксимації переміщень  $\omega_{k'}^{(pqr)}$  у матричному вигляді:

$$\{e_{ij}\} = \{F_{ij}^{k'}\} \{\omega_{k'}\}.\quad (19)$$

Для коефіцієнтів розкладання функції зміни об'єму (7) справедливе таке співвідношення:

$$\begin{aligned}\delta W &= \iiint_V \left( 2\mu g^{ik} g^{jl} \delta\{\omega_{k'}\}^T \{F_{ij}^{k'}\}^T \{\psi\} \{\psi\}^T \{F_{kl}^{m'}\} \{\omega_{m'}\} + \right. \\ &\left. + \lambda g^{ij} \delta\{\omega_{k'}\}^T \{F_{\theta}^{k'}\}^T \{\psi\} \{\psi\}^T \{F_{\theta}^{m'}\} \{\omega_{m'}\} \right) dV.\end{aligned}\quad (26)$$

Вектор переміщень  $u_{k'}$  в глобальній системі координат для просторового скінченного елемента переміщень визначається через вузлові значення вектора переміщень  $u_{k'}^L$  та функції форми  $N_L(x_1, x_2, x_3)$  (13) співвідношеннями:

$$u_{m'} = \sum_{L=1}^8 N_L(x_1, x_2, x_3) u_{m'}^L,\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\xi^{(\alpha\beta\gamma)} &= \\ &= \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x_1)^\alpha (\partial x_2)^\beta (\partial x_3)^\gamma} \Big|_{x_1=x_2=x_3=0}.\end{aligned}\quad (20)$$

Відповідно до (20) визначимо коефіцієнти  $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$  в околиці точки (0,0,0), розписуючи кожний із них на основі співвідношень для компонент деформацій (17). Якщо якийсь коефіцієнт  $e_{ii}^{(\alpha\beta\gamma)}$  відсутній у розкладанні компонент деформацій  $\varepsilon_{ii}$ , то коефіцієнти  $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$ , що містять  $e_{ii}^{(\alpha\beta\gamma)}$ , вилучаються. У загальному вигляді коефіцієнти розкладу  $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$  представляються таким чином:

$$\begin{aligned}\xi^{(\alpha\beta\gamma)} &= e_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{11} + \\ &+ e_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{22} + e_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{33},\end{aligned}\quad (21)$$

тоді для функції зміни об'єму матимемо:

$$\theta = \xi^{(\alpha\beta\gamma)}\quad (22)$$

або

$$\begin{aligned}\theta &= e_{11}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{11} + e_{22}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{22} + \\ &+ e_{33}^{(\alpha\beta\gamma)} g^{33}.\end{aligned}\quad (23)$$

Тоді функція зміни об'єму у матричному виді має вигляд:

$$\{\theta\} = \{\xi\}^T \{\psi\},\quad (24)$$

де коефіцієнти  $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$  можна представити через коефіцієнти розкладу деформацій:

$$\{\xi\} = \{F_{\theta}^{k'}\} \{\omega_{k'}\}.\quad (25)$$

Підстановка (18), (19) та (24), (25) у вираз для варіації енергії пружної деформації (4) дає

або в матричному вигляді:

$$\{u_{k'}\} = \{u_{k'}^L\}^T \{N_L\}.\quad (28)$$

де  $u_{k'}^L$  – переміщення  $L$ -ого вузла за  $k'$ -им напрямом в базисній системі координат.

Вираз (5) можна записати у матричному вигляді:

$$\{u_{k'}\} = \{\omega_{k'}\}^T \{\psi\}.\quad (29)$$

Для побудови матриці жорсткості перейдемо у виразі (26) від коефіцієнтів  $\omega_{k'}^{(pqr)}$  до значень переміщень  $u_{k'}^L$  у вузлах скінченного елемента за допомогою матриці перетворень  $[A]$ . Матриця  $[A]$  задає зв'язок між функціями форми  $N_L(x_1, x_2, x_3)$  та степеневими функціями  $\psi^{(pqr)}$ . Представимо

коефіцієнти розкладання переміщень у вигляді:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]\{u_{k'}^L\}. \quad (30)$$

Варіація енергії пружної деформації з урахуванням (30) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W = & \iiint_V \left( 2\mu g^{ik} g^{jl} \delta\{u_{k'}^L\}^T [A]^T \{F_{ij}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{kl}^{m'}\} [A] \{u_{m'}^L\} + \right. \\ & \left. + \lambda g^{ij} \delta\{u_{k'}^L\}^T [A]^T \{F_{\theta}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{\theta}^{m'}\} [A] \{u_{m'}^L\} \right) dV. \end{aligned} \quad (31)$$

Винесемо з-під знаку інтегрування величини, що не залежать від координат:

$$\begin{aligned} \delta W = & \delta\{u_{k'}^L\}^T \left( \iiint_V 2\mu g^{ik} g^{jl} [A]^T \{F_{ij}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{kl}^{m'}\} [A] dV \right) \{u_{m'}^L\} + \\ & + \delta\{u_{k'}^L\}^T \left( \iiint_V \lambda g^{ij} [A]^T \{F_{\theta}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{\theta}^{m'}\} [A] dV \right) \{u_{m'}^L\} \end{aligned} \quad (32)$$

та введемо позначення

$$\begin{aligned} [K_{ij}^{k'm'}] &= \iiint_V 2\mu g^{ik} g^{jl} [A]^T \{F_{ij}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{kl}^{m'}\} [A] dV, \\ [K_{\theta}^{k'm'}] &= \iiint_V \lambda g^{ij} [A]^T \{F_{\theta}^{k'}\}^T \{\psi\}\{\psi\}^T \{F_{\theta}^{m'}\} [A] dV. \end{aligned} \quad (33)$$

Матриця жорсткості «напівнескінченного» скінченного елемента на основі моментної схеми для слабкостисливого матеріалу матиме вигляд:

$$[K^{k'm'}] = [K_{ij}^{k'm'}] + [K_{\theta}^{k'm'}], \quad (34)$$

а варіація пружної деформації «напівнескінченного» скінченного елемента матиме вид:

$$\delta W = \delta\{u_{k'}^L\}^T [K^{k'm'}] \{u_{m'}^L\}. \quad (35)$$

Розмірність матриці жорсткості  $24 \times 24$ . Глобальну матрицю жорсткості отримаємо на основі (1) підсумовуванням за всіма скінченими елементами.

### Література

1. Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей. Днепропетровск-Запорожье: Зап. нац. ун-т, 2012. 370 с.
2. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. Volume 1: The basis. Oxford: Butterworth-Heinemann. 2000. 689 p.
3. Edip K., Sheshov V., Bojadjieva J., Demir A., Ozturk H. Development of infinite elements for simulation of unbounded media. *Building materials and structures*. 2018. N 61. P. 3–13.
4. Beer G. 'Infinite domain' elements in finite element analysis of underground excavations. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 1983. N 7(1). P. 1–7.
5. Curnier A. A static infinite element. *International journal for numerical methods in engineering*. 1983. N 19(10). P. 1479–1488.
6. Medina F. and Taylor R.L. Finite element techniques for problems of unbounded domains. *International journal for numerical methods in engineering*. 1983. 19(8). P. 1209–1226.



### References

1. Dyrda, V. I., Grebenyuk, S. M. & Homeniuk, S. I. (2012). Analytical and numerical methods for the calculation of rubber parts. Dnipropetrovsk-Zaporizhzhia: Zaporizhzhia National University.
2. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000). The finite element method. Volume 1: The basis. Oxford: Butterworth-Heinemann.
3. Edip, K., Sheshov, V., Bojadjieva, J., Demir, A. & Ozturk, H. (2018). Development of infinite elements for simulation of unbounded media. Building materials and structures, No. 61, pp. 3–13.
4. Beer, G. (1983). 'Infinite domain' elements in finite element analysis of underground excavations. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, No. 7(1), pp. 1–7.
5. Curnier, A. (1983). A static infinite element. International journal for numerical methods in engineering, No. 19(10), pp. 1479–1488.
6. Medina, F. & Taylor, R. L. (1983). Finite element techniques for problems of unbounded domains. International journal for numerical methods in engineering, No. 19(8), pp. 1209–1226.