УДК 539.3 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-16

УРАХУВАННЯ ТЕРТЯ ТА ЗЧЕПЛЕННЯ В КОНТАКТНІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНОГО СЕКТОРА

А. Г. Шпорта, Т. С. Кагадій

Державний вищий навчальний заклад НТУ «Дніпровська політехніка», rector@nmu.org.ua

Ключові слова:
жорсткий штамп, контактна задача, циліндрична анізотропія, тертя та зчеплення, асимптотичний метод.

У статті наведений розв’язок задачі про дію жорсткого штампа на вільну грань пружного ортотропного кругового сектора скінченних розмірів з циліндричною анізотропією, головні напрямки якої співпадають з полярними координатами. Пластина закріплена за повздовжніми кромками. Припускається, що в області контакту штампа та пластини існують ділянки ковзання, де враховується тертя, і ділянка зчеплення. Для розв’язання задачі використовується асимптотичний метод, який дозволяє звести розв’язання складної задачі лінійної теорії пружності до послідовного розв’язання крайових задач теорії потенціалу. У процесі розв’язання згаданим методом вводяться аффінні перетворення, як наслідок – вдається розкласти напружено-деформований стан поставленої задачі на дві складові. Кожна з цих складових знаходиться окремо, але пов’язані між собою через граничні умови. Шукані характеристики напруженого стану знаходяться як суперпозиція складових.

Завдяки запропонованому підходу можливе проведення попередньої оцінки напружено-деформованого стану різноманітних практично важливих задач.

ACCOUNT OF FRICTION AND CLUTCH IN A CONTACT PROBLEM FOR A CURVILINEAR SECTOR

A. H. Shporta, T. S. Kagadiy

State Higher Educational Institution National TU «Dnipro Polytechnic», rector@nmu.org.ua

Key words:
hard stamp, contact problem, cylindrical anisotropy, friction and adhesion, asymptotic method.

The article presents the problem solution on the impact of a rigid stamp on the free face of an elastic orthotropic circular sector of finite size with cylindrical anisotropy, the main directions of which coincide with the polar coordinates. The plate is fixed along the longitudinal edges. It is assumed that in the area of contact between the punch and the plate there are sliding areas (where friction is taken into account) and a coupling area. In the area of contact of the stamp with the plate, there are two sliding areas adjacent to the end points of the contact area, and a coupling area located between them. The question of determining the laws of stress distribution under the stamp. Also important as a result is the size of the clutch area.

To solve the problem, an asymptotic method is used. This method allows us to decompose the stress-strain state of the plate into two components, each of which is found in the sequential solution of boundary value problems of potential theory.

The perturbation method considered by the authors of this article made it possible to reduce the solution of complex problems of linear elasticity to subsequently solved boundary value problems of potential theory. We study new linear problems that are currently relevant. In particular, the work addressed the problem of A.A. Galin about transferring the load from a stamp to a round plate.

In the process of problem solving, a relationship is established between the dimensions of the coupling area, the contact area, the sector opening angle. A relationship is also established between the friction coefficient and the stiffness characteristics of the plate material.

With the help of the approach proposed by the authors, analytical solutions of various practically important problems can be obtained. It is possible to carry out assessments of the stress-strain state of structures, mechanisms, or parts in the event that, during interaction, areas of sliding and adhesion appear.

Постановка проблеми. Серед питань, які актуальні сьогодні, досить важливою залишається задача про передачу зусиль і тисків від одних деталей взаємодії до інших. Наприклад, при взаємному їх зіткненні. Тоді виникає необхідність у проведенні коректної попередньої оцінки напружено-деформованого стану поставленої задачі.

Саме тому проблема моделювання контактних взаємодій має особливе значення для будівництва та машинобудування. Такі моделі характеризують процеси руйнування і довговічності, міцності, зносостійкості конструкцій і споруд.

Необхідність вирішення цих питань, яка проявилася на практиці, зумовила важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження деяких певних контактних задач [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивченню напружено-деформованого стану деталей та механізмів під час контактної взаємодії присвячені численні наукові дослідження. Зокрема, плоска пружна задача про дію жорсткого штампа на границю пружної ізотропної напівплощини з урахуванням того, що в області контакту існують ділянки ковзання та зчеплення, вперше була поставлена та наближено розв'язана Л. О. Галіним ще в 1945 р.

Під час розв'язання різних задач, що відносяться до теорії пружності, широко використовуються методи малого параметра (фізичного або геометричного). Дана тема досить важлива і розглядалася різними авторами, але у зв'язку зі складністю постановки задачі, як і раніше, є актуальними.

У працях [2, 3] задачі про передачу навантаження розв'язуються чисельно-аналітичними методами.

Виділення невирішених раніше питань. Під час взаємодій досить часто виникають ситуації, коли в процесі з'являються ділянки ковзання та зчеплення. Важливим питанням також є визначення ділянки зчеплення. У цьому випадку можуть бути використані відповідні аналітичні розв'язки модельних задач.

У даній роботі вивчається нова задача про дію жорсткого штампа на вільну грань пружного ортотропного кругового сектора скінченних розмірів з циліндричною анізотропією.

У процесі розв'язання поставленої задачі встановлюється зв'язок між розмірами області з'єднання, площею контакту та кутом розкриття сектора. Також враховується зв'язок між коефіцієнтом тертя та характеристиками жорсткості матеріалу пластини.

Метод, який було застосовано для розв'язання поставленої проблеми, дозволяє розкласти напружено-деформований стан пластини на дві складові, кожна з яких може бути знайдена шляхом послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу.

Постановка задачі. Нехай пружна пластина $R_0 \le r \le R_1$, $-\gamma \le \theta \le \gamma$ закріплена за кромками $\theta = \pm\gamma$. На границю $r = R_0$ на ділянці $-\lambda \le \theta \le \lambda$ діє жорсткий штамп з основою, яка співпадає з границею $r = R_0$, навантаженою нормальним зусиллям P_0 (штамп переміщується поступально, паралельно осі Ox). Інша границя, $r = R_1$, залишається вільною. Припускається, що в області контакту штампа з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. У зонах ковзання зсувні зусилля направлені у протилежні боки. Граничні точки ділянки зчеплення $(\theta = \pm\alpha)$, які заздалегідь не відомі та повинні бути визначені у ході розв'язання задачі, розташовані симетрично відносно осі Ox. Напруження в цих точках повинні бути обмежені та безперевні. Пластина, товщиною δ, працює в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Матеріал її є ортотропним, головні напрямки анізотропії співпадають з полярними координатами r,θ. Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

Викладення основного матеріалу. Якщо замість полярних координат r,θ ввести безрозмірні координати ξ,η співвідношеннями $r=R_0e^{\xi},\theta=\eta$, то поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги пластини у переміщеннях

$$B_1u_{\xi\xi}+Gu_{\eta\eta}-B_2\left(v_\eta+u\right)+Gmv_{\xi\eta}-Gv_\eta=0,$$

$$Gv_{\xi\xi}+B_2v_{\eta\eta}+B_2u_\eta+Gmu_{\xi\eta}+G\left(u_\eta-v\right)=0$$

при наступних граничних умовах:

зовні штампа

$$\sigma_1=B_1\left(R_0e^{\xi}\right)^{-1}\left(u_\xi+\vartheta_2(v_\eta+u)\right)=0,$$

$$\tau=G\left(R_0e^{\xi}\right)^{-1}\left(u_\eta+v_\xi-v\right)=0$$

$$(\xi=0,\lambda<|\eta|<\gamma),$$

$$u=v=0\quad(\eta=\pm\gamma);$$

під штампом

$$u=const=C_0\quad(\xi=0,|\eta|\le\lambda),$$

$$v=0\;\;(\xi=0,|\eta|\le\alpha),$$

$$\tau=sign(\eta)\,\rho\sigma_1\;\;(\xi=0,\alpha<|\eta|<\lambda)$$

на границі $\xi=h,\quad|\eta|<\gamma\quad(r=R_1,|\theta|<\gamma)$, $\sigma_1=\tau=0$.

Крім того, повинні бути виконані умови рівноваги штампа. Тут $u=u_r,\ v=u_\theta$ – компоненти вектора переміщень пластини; $B_1=E_1\delta/\left(1-\vartheta_1\vartheta_2\right)$, $B_2=E_2\delta/(1-\vartheta_1\vartheta_2)$, $G=G_*\delta$; σ_1 – нормальне в напрямку координати ξ напруження; τ – дотичне напруження; $E_1,\ E_2$ – модулі пружності вздовж головних напрямків; G_* – модуль зсуву; $m=1+\mu,\ \mu=\vartheta_2B_1/G=1+\vartheta_1B_2/G$; $\vartheta_1,\ \vartheta_2$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу пластини; ρ – коефіцієнт тертя (ρ<1); індекси ξ,η позначають диференціювання за відповідними координатами.

Для дослідження сформульованої задачі застосуємо асимптотичний метод, розроблений у [4-6]. Визначення напруженого стану першого типу (що повільно змінюється у напрямку координати ξ) у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння

$$B_1u^{1,0}_{\xi\xi}+Gu^{1,0}_{\eta\eta}=0\,, \tag{1}$$

при наступних граничних умовах:

$$\sigma_1^0=B_1R_0^{-1}u^{1,0}_\xi=0$$

$$(\xi=0,\lambda<|\eta|<\gamma;\ \xi=h,|\eta|<\gamma)\,,$$

$$u^{1,0}=C_0\ (\xi=0,|\eta|\le\lambda),$$

$$u^{1,0}=0\ (\eta=\pm\gamma)\,. \tag{2}$$

Оскільки при $\eta=\pm\gamma$ компонента вектора переміщення $u^{1,0}$ дорівнює нулю, то й $u^{1,0}_\xi$ при $\eta=\pm\gamma$ також дорівнюватиме нулю. Переміщення $v^{1,0}$, яке відповідає даному напружено-деформованому стану, знаходиться зі співвідношення [4, 5]

$$v^{1,0}_\eta+u^{1,0}=0\,. \tag{3}$$

Введемо нові незалежні змінні $x_1=\left(G/B_1\right)^{1/2}\xi,\quad y_1=\eta$, тоді крайова задача (1), (2) набуває вигляду

$$u^{1,0}_{x_1x_1}+u^{1,0}_{y_1y_1}=0\,, \tag{4}$$

$$u^{1,0}_{x_1}=0\;\;(x_1=0,\lambda<|y_1|<\gamma;x_1=h_1,|y_1|<\gamma);$$

$$u^{1,0}=C_0\;\;(x_1=0,|y_1|\le\lambda),$$

$$u_{x_1}{}^{1,0}=0\;\;(y_1=\pm\gamma);$$

$$h_1=\left(G/B_1\right)^{1/2}h\,. \tag{5}$$

Таким чином, потрібно знайти аналітичну в прямокутнику $0\le x_1\le h_1,\ \ |y_1|\le\gamma$ функцію $u^{1,0}$ за заданими граничними умовами (5). Цю задачу розв'язуватимемо відображенням прямокутника з площини z_1 $\left(z_1=y_1+ix_1\right)$ у верхню напівплощину зображень $\zeta_1\ \ \left(\zeta_1=\eta_1+i\xi_1\right)$. Функція відображення має вигляд [7]

$$\zeta_1=sn\left(K\left(k_1\right)z_1/\gamma\,;k_1\right). \tag{6}$$

При цьому початок координат зберігає своє розташування, а точка $z_1=\gamma$ переходить у точку $\zeta_1 = 1$; $z_1 = \gamma + ih_1$ переходить у $\zeta_1 = 1/k_1$; $z_1 = ih_1$ – у $\zeta_1 = \infty$. Оскільки $sn(-z) = -sn(z)$, то точка $z_1 = -\gamma$ переходить у точку $\zeta_1 = -1$; $z_1 = -\gamma + ih_1$ – у точку $\zeta_1 = -1/k_1$, а точки $z_1 = \pm\lambda$ – у точки $\zeta_1 = \pm sn(K(k_1)\lambda/\gamma; k) = \pm\ell_1$. Тут $sn(z)$ – еліптичний синус, $K(k_1)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду, причому модуль k_1 знаходиться з рівняння [7]

$$K(k_1')/K(k_1) = h_1/\gamma \quad (k_1' = \sqrt{1-k_1^2}). \quad (7)$$

Нехай $\varphi^0 = u^{1,0} + i\theta^{1,0}$ ($\theta^{1,0}$ – гармонічна функція, сполучена з $u^{1,0}$). Тоді

$$\varphi_1^0 = \varphi_{y_1}^0 = u_{y_1}^{1,0} + i\theta_{y_1}^{1,0} = u_{y_1}^{1,0} - iu_{x_1}^{1,0}.$$

Функцію $\varphi_1^0(x_1, y_1)$ можна визначити у напівплощині ζ_1. Із умов (5) і співвідношення (6) випливає, що на дійсній осі напівплощини в інтервалі $|\eta_1| < \ell_1$ відома дійсна частина функції φ_1^0, а на інших інтервалах осі η_1 відома її уявна частина.

Задача про визначення аналітичної у напівплощині функції, коли на деяких інтервалах границі відома дійсна, а на деяких інших уявна частина шуканої функції, розв'язується за допомогою формули Келдиша–Сєдова. Оскільки з умов (5) випливає, що на границі напівплощини ζ_1 в інтервалі $|\eta_1| < \ell_1$ дійсна частина функції φ_1^0 дорівнює нулю, а на решті частини границі уявна її частина дорівнює нулю, то розв'язання для функції φ_1^0 в усій напівплощині має вигляд

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - \ell_1^2}},$$

де A – дійсна стала; обирається та гілка кореня, яка додатна при додатних значеннях аргументу.

Дійсна та уявна частини $\varphi_1^0(\zeta_1)$ визначають функції $u_{y_1}^{1,0}$, $u_{x_1}^{1,0}$. Зокрема, при $\xi_1 = 0$ ($x_1 = 0$ або $y_1 = \pm\gamma$; чи $x_1 = h_1$, $|y_1| < \gamma$)

$$\varphi_1^0(\eta_1) = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad (9)$$

$$u_{y_1}^{1,0} = 0,\ u_{x_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_1^2}} \ (|\eta_1| < \ell_1),$$
$$u_{y_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}},\ u_{x_1}^{1,0} = 0 \ (|\eta_1| < \ell_1), \quad (10)$$
$$\eta_1 = sn(K(k_1)y_1/\gamma; k).$$

Нормальне напруження σ_1^0 та складова дотичного напруження $\tau^{1,0}$, відповідна функції $u^{1,0}$, знаходяться за формулами

$$\sigma_1^0 = B_1(R_0e^{\xi})^{-1}u_{\xi}^{1,0} = (R_0e^{\xi})^{-1}\sqrt{GB_1}u_{x_1}^{1,0},$$
$$\tau^{1,0} = Gu_{\eta}^{1,0}(R_0e^{\xi})^{-1} = G(R_0e^{\xi})^{-1}u_{\eta_1}^{1,0}.$$

Стала A визначається з умови рівноваги штампа та дорівнює

$$A = -P_0R_0\left[2\sqrt{GB_1}C_1B)\right]^{-1}, \quad (11)$$

$$C_1 = \frac{\gamma}{K(k_1)}, \quad B = \int_0^{\ell_1}\frac{dt}{\sqrt{(\ell_1^2 - t^2)(1-t^2)(1-k_1^2t^2)}}.$$

Тоді тиск під штампом у першому наближенні виражається наступним чином:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0}{2C_1B}\frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (12)$$

а функція $u_{y_1}^{1,0}$ при $\xi = 0$, $|\eta_1| > \ell_1$ знаходиться за формулою

$$u_{y_1}^{1,0} = A(\eta_1^2 - \ell_1^2)^{-1/2}, \quad (13)$$

де A подається рівністю (11).

Складова $v^{1,0}$ компоненти вектора переміщень v^0, відповідна даному напруженому стану, визначається з рівняння (3). Функція $u^{1,0}$ знаходиться зі співвідношень для $u_{x_1}^{1,0}$, $u_{y_1}^{1,0}$ відповідно при $|\zeta_1| < \ell_1$, $|\zeta_1| > \ell_1$ з урахуванням того, що при $y_1 = \eta = \pm\gamma$ $u^{1,0} = 0$.

Друга складова $v^{2,0}$ компоненти вектора переміщень v^0, відповідна напруженому стану типу пограничного шару, знаходиться з рівняння [6]

$$Gv_{\xi\xi}^{2,0} + B_2v_{\eta\eta}^{2,0} = 0. \quad (14)$$

Оскільки $v^{1,0}$ і $v^{2,0}$ мають той самий порядок за $\varepsilon = G/B_1$, а похідна $v_{\xi}^{2,0}$ більша за похідну $v_\xi^{1,0}$ на два порядки при $q = B_2/B_1 \approx 1$, то у даному наближенні граничні умови для визначення $v^{2,0}$ з рівняння (14) запишуться наступним чином:

$$v^0 = v^{1,0} + v^{2,0} = 0 \quad (\xi = 0, |\eta| \le \alpha),$$

$$GR_0^{-1} v_\xi^{2,0} = sign(\eta)\rho\sigma_1^0 \quad (\xi = 0, \alpha \le |\eta| < \lambda),$$

$$v_\xi^{2,0} = -u_\eta^{1,0}$$

$$(\xi = 0, \lambda \le |\eta| < \gamma;\ \xi = h, |\eta| < \gamma),$$

$$v_\xi^{\ 2,0} = 0 \quad (\eta = \pm\gamma). \qquad (15)$$

При цьому, як припускалося в постановці задачі, $\rho < 1$ $\left(\rho = \rho_0 \varepsilon^{1/2}, \rho_0 \approx 1\right)$, а σ_1^0 під штампом знаходиться за формулою (12).

Компонента $u^{2,0}$, відповідна даному напруженому стану, задовольняє умові [5] $u_{\xi\xi}^{2,0} = 0$. Після введення нових незалежних змінних $x_2 = \left(B/G_2\right)' \xi$, $y_2 = \eta$ крайова задача (14), (15) набуває вигляду

$$v_{x_2 x_2}^{2,0} + v_{y_2 y_2}^{2,0} = 0 \qquad (16)$$

$$v^{2,0} = -v^{1,0} \quad (x_2 = 0, |y_2| \le \alpha),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = 0 \quad (y_2 = \pm\gamma),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = sign(y_2)\rho R_0 \left(GB_2\right)^{-1/2} \sigma_1^0$$

$$(x_2 = 0, \alpha < |y_2| < \lambda),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = -\sqrt{\frac{G}{B_2}} u_{y_2}^{1,0}$$

$$(x_2 = 0, \lambda < |y_2| < \gamma;\ x_2 = h_2, |y_2| < \gamma),$$

$$h_2 = \left(B_2/G\right)^{1/2} h. \qquad (17)$$

Задача (16), (17) є мішаною задачею для аналітичної функції $v^{2,0}$ у прямокутнику $0 \le x_2 \le h_2$, $-\gamma \le y_2 \le \gamma$, яка може бути розв'язана відображенням прямокутника з площини z_2 $(z_2 = y_2 + ix_2)$ у верхню напівплощину зображень ζ_2 $(\zeta_2 = \eta_2 + i\xi_2)$. Функція відображення має вигляд (6) із заміною z_1 на z_2, k_1 на k_2, причому модуль k_2 визначається з рівняння (7) також при заміні k_1 на k_2, h_1 на h_2.

В основі дослідження задачі лежить асимптотичний метод [4, 5], де припускається, що $G/B_1 = \varepsilon$ є малим параметром, $B_2 \approx B_1$. Тому $h_2 = \left(B_2/G\right)^{1/2} h$ багато більше за $h_1 = \left(G/B_2\right)^{1/2} h$ $(h_2/h_1 \gg 1)$ і k_2 виявляється близьким до нуля. Але при малих значеннях k_2 $K(k_2) \approx \pi/2$ і функція відображення (6) переходить у функцію $\zeta_2 = C_2 \sin\left(\pi z_2/2\gamma\right)$, дійсна та уявна частини якої записуються відповідно

$$\eta_2 = C_2 \sin\frac{\pi y_2}{2\gamma} ch \frac{\pi x_2}{2\gamma},$$

$$\xi_2 = C_2 \cos\frac{\pi y_2}{2\gamma} sh \frac{\pi x_2}{2\gamma}.$$

Сталу C_2 визначають із тієї умови, щоб точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm\lambda$ відображалися у точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm\ell_1$. Тоді отримаємо:

$$C_2 = \ell_1/\sin\left(\pi\lambda/2\gamma\right),$$

$$\ell_1 = sn\left(K(k_1)\lambda/\gamma; k_1\right).$$

Точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm\gamma$ переходять у точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm C_2$, а точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm\alpha$ – у точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm\alpha_2$, де

$$\alpha_2 = C_2 \sin\frac{\pi\alpha}{2\gamma} = \frac{sn\left(K(k_1)\lambda/\gamma; k_1\right)\sin\left(\pi\alpha/2\gamma\right)}{\sin\left(\pi\lambda/2\gamma\right)}.$$

Таким чином, для другого напруженого стану (типу пограничного шару [4–6]) замість прямокутника фактично маємо напівполосу і задача, з урахуванням (17), (12), (13), у цьому разі зводиться до наступної: знайти аналітичну у напівплощині ζ_2 функцію $v^{2,0}$ за умови, що на дійсній осі напівплощини похідні функції $v^{2,0}$ набувають значення

$$v_{y_2}^{2,0} = -v_\eta^{1,0} = C_0 \left(|\eta_2| \le \alpha_2\right) v_{x_2}^{2,0} = 0$$

$$\left(|\eta_2| \ge C_2\right),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = sign(y_2)\rho A \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_2^2}}$$

$$\left(\alpha_2 < |\eta_2| < \ell_1\right),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = -A\sqrt{\frac{G}{B_2}}\frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - \ell_1^2}}$$

$$\left(\ell_1 < |\eta_2| < C_2\right). \qquad (18)$$

Тут A виражається формулою (11), враховане співвідношення (3), C_0 – осад штампа. На нескінченності напруження спадають.

Якщо $\psi^0 = v^{2,0} + iQ^{2,0}$ ($Q^{2,0}$ – гармонійна функція, спряжена з $v^{2,0}$), то $\psi_1^0 = i\psi_{y_2}^0 = v_{x_2}^{2,0} + iv_{y_2}^{2,0}$. Функцію ψ_1^0 у будь-якій точці верхньої напівплощини ζ_2 можна визначити за допомогою формули Келдиша–Сєдова, яка при вказаних умовах (18) і обмеженості у точках $\zeta_2 = \pm\alpha_2$ записується наступним чином:

$$\psi_1^0(\zeta_2) = -\frac{A}{\pi i}\sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_1^2} \times \left(\sqrt{\frac{G}{B_2}}\left[\int_{-C_2}^{-\ell_1}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta_2} + \int_{\ell_1}^{C_2}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta_2}\right] - \right.$$
$$\left. -\rho\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}\left[\int_{-\ell_1}^{-\alpha_2}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta_2} + \int_{\alpha_2}^{\ell_1}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta_2}\right]\right) + \frac{C_0}{\pi i} i\sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_2^2}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{t^2-\alpha_2^2}}\frac{dt}{t-\zeta_2}, \qquad (19)$$

де

$$f(t) = \left[\left(t^2 - \alpha_2^2\right)\left(\left|t^2 - \ell_1^2\right|\right)\right]^{-1/2}.$$

Для спадання напружень на нескінченності необхідно, щоб $\psi_1^0(\zeta_2) \to 0$ при $|\mathrm{Re}\,\zeta_2| \to \infty$. Оскільки останній доданок у (19) прямує до нуля, то з вказаної умови отримаємо співвідношення

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}}\left(\int_{-C_2}^{-\ell_1} f(t)\,dt + \int_{\ell_1}^{C_2} f(t)\,dt\right) =$$
$$= \rho\left(\int_{-\ell_1}^{-\alpha_2} f(t)\,dt + \int_{\alpha_2}^{\ell_1} f(t)\,dt\right),$$

яке може бути записане у вигляді

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}}\int_1^c \frac{d\tau}{\sqrt{\left(\tau^2-\alpha_*^2\right)\left(\tau^2-1\right)}} =$$
$$= \rho\int_{\alpha_*}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{\left(\tau^2-\alpha_*^2\right)\left(1-\tau^2\right)}}, \qquad (20)$$

де $\tau = \dfrac{t}{\ell_1}$, $c = \dfrac{C_2}{\ell_1} = \dfrac{1}{\sin(\pi\lambda/2\gamma)}$,

$\alpha_* = \dfrac{\alpha_2}{\ell_1} = \dfrac{\sin(\pi\alpha/2\gamma)}{\sin(\pi\lambda/2\gamma)}$, $c > 1 > \alpha_* > 0$.

Інтеграл, який стоїть у лівій частині співвідношення (20), є неповним еліптичним інтегралом першого роду $F(\varphi, \alpha_*)$, причому φ визначається рівністю

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{c^2-1}{c^2-\alpha_*^2}}. \qquad (21)$$

Інтеграл, який стоїть у правій частині рівності (20), є повним еліптичним інтегралом першого роду $K\left(\sqrt{1-\alpha_*^2}\right) = K(\alpha_*') = K'(\alpha_*)$, де $\alpha_*' = \sqrt{1-\alpha_*^2}$. Тому рівність (20) може бути записана наступним чином:

$$F(\varphi, \alpha_*) = \rho\left(B_1/G\right)^{1/2} K'(\alpha_*). \qquad (22)$$

Співвідношення (22) установлює зв'язок між розмірами ділянки зчеплення, області контакту, кута відкриття сектора, а також коефіцієнтом тертя та характеристиками жорсткості матеріалу пластини. Воно виявляється таким самим, як і у випадку, якби пластина являла собою напівнескінченний круговий сектор. Це пов'язано з характером даного напруженого стану (напруженого стану типу пограничного шару), який швидко змінюється у напрямку координати ξ.

З рівності (19) при $\xi_2 = 0$, $|\eta_2| < \alpha_2$ (на ділянці зчеплення) отримаємо

$$\psi_1^0(\eta_2) = v_{x_2}^{2,0} = -\frac{2A}{\pi}\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}\eta_2\sqrt{\alpha_2^2 - \eta_2^2} \times$$
$$\times\left(\sqrt{\frac{G}{B_1}}\int_{\ell_1}^{C_2}\frac{1}{\sqrt{\left(t^2-\alpha_2^2\right)\left(t^2-\ell_1^2\right)}}\frac{dt}{(t^2-\eta_2^2)} - \right.$$

$$-\rho\int_{\alpha_2}^{\ell_1}\frac{1}{\sqrt{\left(t^2-\alpha_2^2\right)\left(\ell_1^2-t^2\right)}}\frac{dt}{\left(t^2-\eta_2^2\right)}\Bigg). \quad (23)$$

Останній доданок у виразі (19) при $\xi_2=0,|\eta_2|<\alpha_2$ дає чисто уявну величину iC_0.

Враховуючи вигляд інтегралів, вираз (23) можна записати так

$$v_{x_2}^{2,0}=\frac{2A}{\pi\ell_1}\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}\eta_2\sqrt{\alpha_2^2-\eta_2^2}\times$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{G}{B_1}}\frac{1}{\left(\ell_1^2-\eta_2^2\right)\left(\alpha_2^2-\eta_2^2\right)}\times\right.$$

$$\times\left[\left(\ell_1^2-\alpha_2^2\right)\prod\left(\varphi,\frac{\alpha_2^2-\eta_2^2}{\ell_1^2-\eta_2^2},\alpha_*\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\ell_1^2-\eta_2^2\right)F\left(\varphi,\alpha_*\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{\rho}{\left(\ell_1^2-\eta_2^2\right)}\prod_1\left(\frac{\ell_1^2-\alpha_2^2}{\ell_1^2-\eta_2^2},\alpha_*'\right)\right), \quad (24)$$

де $\alpha_*=\alpha_2/\ell_1$ знаходиться з (22), $|\eta_2|<\alpha_2$, $\prod_1\left(\vartheta,\alpha_*'\right),\alpha_*'=\sqrt{1-\alpha_*^2}$ – повний еліптичний інтеграл третього роду, $\prod\left(\varphi,\mu,\alpha_*\right)$ – неповний еліптичний інтеграл третього роду, φ визначається рівністю (21).

Дотичне напруження під штампом у першому наближенні визначається за формулами

$$\tau=sign\left(\eta\right)\rho\sigma_1^0\ \left(\alpha\le|\eta|<\lambda\right),$$

$$\tau=R_0^{-1}\sqrt{GB_2}v_{x_2}^{2,0}\ \left(|\eta|\le\alpha\right), \quad (25)$$

де σ_1^0, $v_{x_2}^{2,0}$ виражаються співвідношеннями (12) та (24).

Оскільки $0<\alpha_*<\ell_1<c>1$, то

$$\frac{C_2-1}{c^2-\alpha_*^2}=1-\varepsilon_1,\quad \varepsilon_1=\frac{1-\alpha_*^2}{c^2-\alpha_*^2}\ll 1.$$

Тоді рівність (21) може мати вигляд

$$\varphi=\arcsin\sqrt{1-\varepsilon_1}=\arcsin\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_1+\ldots\right)\approx$$

$$\approx\arcsin\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\right).$$

Звідси випливає, що

$$\varphi=\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon_1^{1/2}-o\left(\varepsilon_1^{3/2}\right).$$

У першому наближенні по ε_1 $\varphi^0=\pi/2$ інтеграл $F\left(\varphi^0,\alpha_*^0\right)$ стає повним еліптичним інтегралом першого роду $K\left(\alpha_*^0\right)$, а рівність (22) можна переписати наступним чином:

$$K'\left(\alpha_*^0\right)/K\left(\alpha_*^0\right)=\left(G/B_1\right)^{1/2}/\rho. \quad (26)$$

У цьому випадку визначається величина q

$$q=\exp\left(-\frac{\pi}{\rho}\sqrt{\frac{G}{B_1}}\right),$$

$$\alpha_*^0=4\left(\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}q^{(\nu+1/2)^2}\right]\left[1+2\sum_{\nu=0}^{\infty}q^{\nu^2}\right]^{-1}\right)^2$$

та інтеграл

$$K=\frac{\pi}{2}\left(1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}q^{\nu^2}\right).$$

Якщо коефіцієнт тертя ρ дорівнює нулю, то $q=0,\ \alpha_*^0=0$, тобто ділянка зчеплення зникає. Зі зростанням ρ вона зростає, окрім того, вона залежить від характеристик жорсткості матеріалу пластини. Так, при зменшенні $\left(G/B_1\right)^{1/2}$ та постійному $\rho\ne 0$ розмір ділянки зчеплення збільшується.

На цьому розв’язання задачі у першому наближенні закінчується. Оскільки $u_\xi^{2,0}=0$, то граничні умови для визначення функцій $u^{1,1}$, $v^{2,1}$ у другому наближенні виявляються нульовими [4, 5]. Відповідно нульовими є і розв’язки, тобто друге наближення не вносить коректив до першого.

Відзначимо також, що якщо у напруженому стані типу пограничного шару розглядати не напівполосу, а прямокутник, то відображення його на напівплощину краще здійснювати не так, як вказано вище, а вимагати, щоб точки $x_2=0,\ y_2=\pm\lambda;\ x_2=0,\ y_2=\pm\gamma$ відображалися відповідно у точки $\xi_2=0,$ $\eta_2=\pm\ell_1;\ \xi_2=0,\ \eta_2=\pm 1.$

Це дозволить уникнути переходу від одних координат до інших при формуванні граничних умов і досягається вибором однієї зі сталих у функції відображення. Друга стала (модуль k_2) при цьому визначається з умови, що точки $z_2=\pm\gamma+ih_2$ відображуються у точки $\zeta_2=\pm 1/k_2$. Подальший аналіз здійснюється аналогічно викладеному вище, проте це можливо лише при достатньо малих значеннях $h = \ln\left(R_1/R_0\right)$.

Вплив тертя на тиск під штампом позначається лише з третього наближення. У цьому випадку виникає відхил за деформацією u_ξ ($\xi = 0,\ \ell_1 < |\eta_1| < 1$), яка знімається при розв'язанні рівняння (1) для функції $u^{1,2}$ з граничними умовами

$$u_\xi^{1,2} = u_\xi^{1,0} - \mu v_\eta^{1,0} \quad (\ell_1 < |\eta_1| < 1),$$

$$u_\eta^{1,2} = 0 \quad (|\eta_1| < \ell_1).$$

На границі $\xi = h$ усі функції обертаються на нуль. Оскільки $u_\xi^{1,0} = 0$ $(|\eta_1| > \ell_1)$, то $u_\xi^{1,2} = -\mu v_\eta^{1,0} = \mu u^{1,0}$ $(\xi = 0,\ \ell_1 < |\eta_1| < 1)$. Тут $\mu = \vartheta_1 B_2/G = \vartheta_2 B_1/G$ і врахований зв'язок між $v_\eta^{1,0}$, $u^{1,0}$, обумовлений рівністю (3).

Таким чином, відхил за нормальними напруженнями σ_1 при $\xi = 0$, $\ell_1 < |\eta_1| < 1$ викликаний лише врахуванням коефіцієнта Пуассона. Розв'язок останньої задачі повторює викладене вище, але при вказаних вище умовах.

Висновки і перспективи подальшого розвитку. Розглянутий авторами метод збурень дозволяє звести розв'язання складних задач лінійної пружності до крайових задач теорії потенціалу.

За допомогою описаного підходу можуть бути отримані аналітичні розв'язки різноманітних практично важливих задач. Можливе проведення попередньої оцінки напружено-деформованого стану конструкцій, механізмів або деталей у тому разі, коли під час взаємодії з'являються області ковзання та зчеплення.

Література

1. Kagadiy T. S., Shporta A. H. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory – ISSN 2071-2227. *Науковий вісник НГУ*. 2015. № 3. 76 с.
2. Острик В. І. Вдавлювання напівбезмежного штампа в пружну смугу за наявності тертя і зчеплення. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. Львів, 2008. Т. 51, № 1. С. 138–149.
3. Острик В. І., Улітко А. Ф. Кругова міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту поверхонь. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. Львів, 2004. Т. 41, № 1. С. 84–94.
4. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. Киев: Вища шк., 1991. 131 с.
5. Павленко А. В. Плоская задача теории упругости для пластинок с криволинейной анизотропией. *Известия АН СССР. МТТ*. 1979. № 3. С. 70–82.
6. Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев–Донецк: Вища шк., 1982. 153 с.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва: Наука, 1973. 736 с.

References

1. Kagadiy, T. S. & Shporta, A. H. (2015). The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory – ISSN 2071-2227, Naukovyy visnyk NHU, No. 3, 76 p.
2. Ostryk, V. I. (2008). Impression of semi-infinite stamp in elastic strip with regard for friction and adhesion. Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya, Vol. 51, No. 1, pp. 138–149.
3. Ostryk, V. I. & Ulitko, A. F. (2004). Circular interface crack with frictional contact of faces. Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya, Vol. 41, No. 1, pp. 84–94.
4. Manevich, L. I. & Pavlenko, A. V. (1991). Asymptotic method in micromechanics of composite materials. Kiev: Vishcha shkola.
5. Pavlenko, A. V. (1979). The plane problem of the theory of elasticity for plates with curvilinear anisotropy. Izvestiya AN SSSR. MTT, No. 3, pp. 70–82.
6. Manevich, L. I., Pavlenko, A. V. & Koblik, S. G. (1982). Asymptotic methods in the theory of elasticity of an orthotropic body. Kiev–Donetsk: Vishcha shkola.
7. Lavrentev, M. A. & Shabat, B. V. (1973). Methods of the theory of functions of a complex variable. Moscow: Nauka.