УДК 531.36 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-17

ПОЗИТИВНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ П. ЛЕСЛІ ТА ЇЇ МОДИФІКАЦІЙ

А. О. Ярош, В. В. Леонтьєва, Н. О. Кондрат'єва, Я. А. Єлховська

Запорізький національний університет
vleonteva15@gmail.com, nkondr100@gmail.com, yana.elka28@gmail.com

Ключові слова:
складна система, позитивна система, позитивність, дискретна математична модель Леслі, модифікації дискретної моделі Леслі, аналіз позитивності систем.

У роботі проводиться аналіз позитивності окремо взятої екосистеми, яка відображає розвиток біологічної популяції з оглядом на коефіцієнти розмноження та смертності індивідів залежно від віку особин розглядуваної популяції. Дослідження позитивності здійснюється за математичними моделями, що описують поведінку обраної екосистеми – класичною дискретною моделлю П. Леслі з дискретною віковою структурою та побудованими на її основі модифікованими моделями, описуваними векторно-матричними різницевими рівняннями з матрицями сталих коефіцієнтів. За результатами проведеного на основі обраних критеріїв позитивності аналізу встановлено умови позитивності та непозитивності досліджуваної системи, а також знайдено підходи до зведення непозитивної системи до позитивної. Отримані результати справедливі для систем будь-якої розмірності і можуть бути використані для розширення використання досліджуваних математичних моделей та підвищення динамічних властивостей досліджуваного об'єкта.

POSITIVITY OF A DISCRETE DYNAMICAL MATHEMATICAL P. LESLIE MODEL AND ITS MODIFICATIONS

A. O. Yarosh, V. V. Leontieva, N. A. Kondratieva, Ya. A. Yelkhovska

Zaporizhzhia National University
vleonteva15@gmail.com, nkondr100@gmail.com, yana.elka28@gmail.com

Key words:
complex system, positive system, positivity, discrete mathematical Leslie model, modifications of the discrete Leslie model, analysis of the positivity of systems.

The quality of mathematical models and the usefulness of research of biological population systems are fundamentally depends on the chosen methodology for quantitative and qualitative research of such systems and the applied mathematical apparatus. This caused a great practical interest in expanding their interdisciplinary interaction in various fields of mathematical science in order to increase the models' accuracy and adequacy, to identify new structural features that could significantly expand the use of the models and improve the dynamic properties of the studied systems. This paper is devoted to the disclosure of the essence and presentation of the main stages of the analysis of the features of biological population systems and mathematical models describing their behavior.
As the studied system it is selected the separately taken ecosystem, which reflects the development of a biological population with the looking backward at the coefficients of reproduction and mortality in according to the age of the individuals in the concerned population.
As the researched feature it is chosen the property of positivity, which is inherent in some classes of the systems describing the movement and interaction of objects of various physical nature, including biological. From the standpoint of a meaningful description of the studied object, the systems' positivity follows from the content of its main characteristics. The selected ecosystem is suspicious of belonging to the class of positive systems. On this basis, it is carried out the analysis of ecosystem' positivity on the mathematical models describing its behavior – the classical discrete P. Leslie model and modified models, which are built on its basis.
As a result of the study, the conditions for the positivity and non-positivity of the studied system were determined, and approaches to transformation the non-positive system into positive system were also found.

Вступ. При дослідженні багатьох складних об’єктів (процесів, явищ) різної фізичної природи та застосовуваних до опису їх поведінки математичних моделей досить великий практичний інтерес виникає до розширення їх міждисциплінарної взаємодії в різних областях математичної науки із метою підвищення їх точності, адекватності, виявлення нових структурних особливостей й математичних властивостей, здатних значно розширити використання математичних моделей та підвищити динамічні властивості досліджуваних систем із застосуванням нового для досліджуваних моделей та процесів математичного апарату, а також з метою інтеграції міждисциплінарного знання до розв’язання практичних задач. Актуальність виокремленої проблематики притаманна багатьом об’єктам та процесам, зокрема економічної, екологічної, біологічної, демографічної, технічної та ін. спрямованостей.

Одним з найбільш затребуваних в зазначеному сенсі об’єктом на сьогоднішній день виступає окремо взята екосистема, яка являє собою таке співтовариство видів, які взаємодіють один з одним, рухаються в просторі та постійно змінюють свою чисельність [1-3]. Основним елементом екосистеми (в зазначеному сенсі) виступає популяція – структурна одиниця виду, яка, як відомо [1, 2, 4-6], являє собою сукупність особин одного виду (у середині яких особини можуть обмінюватися генетичною інформацією), здатну до самовідтворення, більш-менш ізольовану в просторі і в часі від інших аналогічних сукупностей того ж виду. У цьому зв’язку екосистема також відображає розвиток біологічної популяції з оглядом на коефіцієнти розмноження та смертності індивідів залежно від віку особин розглядуваної популяції.

При цьому, як і багатьом реальним технічним та економічним системам (об’єктам), так і екологічним, біологічним, демографічним системам, в тому числі досліджуваним в роботі системам, притаманна властивість позитивності [7-10], яка є характерною для деяких класів статичних та динамічних систем, що описують рух і взаємодію об’єктів різної фізичної природи. З позиції змістовного опису досліджуваного процесу (об’єкта, явища) позитивність систем випливає зі змісту його головних характеристик, які в формалізованому описі набувають властивості невід’ємності. Виходячи з цього, досліджувані процеси й системи таку позитивну (невід’ємну) властивість головних характеристик об’єкта, описуваних невід’ємними (позитивними) змінними, мають за суттєву особливість, яка формує окремий підклас динамічних систем, накладає окремі обмеженості в формалізованому представленні руху системи та полягає в тому, що будь-які невід’ємні вхід і початковий стан системи генерують невід’ємні фазову траєкторію і вихід протягом усього часу [8, 9].

Враховуючи зазначену особливість досліджуваних систем, доцільним є проведення подальшого аналізу їх математичних моделей на позитивність, а, отже, на їх приналежність до класу позитивних систем, з метою вироблення підходів до використання математичного інструментарію теорії позитивних систем та основних положень та математичного апарату теорії невід’ємних матриць, які своєю чергою дозволять розширити наявні теоретичні знання та уявлення про закони зростання та еволюціонування біологічних популяцій та видів. Вирішенню зазначених аспектів встановленої проблематики дослідження виділених екосистем і присвячена дана робота, у якій пропонується проведення аналізу позитивності об’єкта дослідження з окремими модифікаціями із застосуванням математичного апарату теорії невід’ємних матриць та теорії позитивних систем.

Мета, об’єкт та предмет дослідження. *Метою роботи* є проведення аналізу властивості позитивності математичної моделі досліджуваної екосистеми П. Леслі та її модифікацій засобами теорії невід’ємних матриць та теорії позитивних систем, що дозволить розширити наявні теоретичні знання та уявлення про закони зростання та еволюціонування біологічних популяцій та видів.

Об’єктом дослідження в роботі виступають екосистеми та математична модель П. Леслі й її модифікації, які описують їх поведінку.

Предметом дослідження є особливості математичних моделей, критерії позитивності досліджуваної екосистеми.

Для досягнення сформульованої мети були поставлені наступні завдання:

а) провести аналіз досліджуваного об'єкта на предмет можливості його приналежності до класу позитивних систем;

б) визначити основні критерії, за якими досліджуваний об'єкт є позитивним;

в) для існуючої дискретної математичної моделі П. Леслі з дискретною віковою структурою, яка описує динаміку досліджуваного об'єкта, отримати модифікаційні аналоги, здатні уточнити та розширити область розв'язуваних задач;

г) провести аналіз проєкційних матриць класичної та модифікованих дискретних математичних моделей П. Леслі з дискретною віковою структурою на позитивність за визначеними критеріями та сформулювати висновки;

д) для випадків неповного виконання критеріїв позитивності за досліджуваними моделями сформулювати умови та надати рекомендації, використання яких дозволить зробити об'єкт дослідження позитивним.

Математична модель П. Леслі та її модифікації. В якості об'єкта дослідження в роботі виступає складна динамічна екосистема, що являє собою множину взаємопов'язаних і взаємодіючих між собою елементів і підсистем біологічної природи, що становлять нероздільне ціле і забезпечують виконання системою деякої складної функції. Особливість об'єкта дослідження полягає в тому, що він є підозрілим на приналежність до класу позитивних динамічних систем [8, 9], які характеризуються властивістю позитивності на нескінченному інтервалі часу будь-яких вхідних, початкових та вихідних характеристик досліджуваного об'єкта в описуючих його поведінку математичних моделях. В якості таких математичних моделей досліджуваної екосистеми обрана дискретна математична модель вікової структури П. Леслі [1, 2] та отримані на її основі, з урахуванням окремих особливостей, модифіковані дискретні математичні моделі П. Леслі [5].

Перш ніж перейти до розгляду особливостей зазначених моделей з дискретною віковою структурою, визначимо основні припущення у розглядуваній екосистемі.

Припустимо, що існує ізольована популяція або сукупність взаємодіючих популяцій – сукупність індивідів, що можуть давати життєздатне потомство й піддаються впливу однакових внутрішніх і зовнішніх факторів.

При цьому вводяться додаткові припущення, здатні визначити границі об'єкта дослідження [1-3, 6]:

– індивідууми є рівномірно розподіленими в просторі;

– популяція в достатній мірі є однорідною за віковою і статевою ознаками;

– процес відтворення відбувається постійно;

– розмноження відбувається у дискретні моменти часу $t_1, t_2, ..., t_n$;

– загальна кількість особин є достатньо великою;

– ареал проживання індивідуумів є обмеженим;

– ресурси харчування є не обмеженими.

При цьому вважатимемо, що кожна досліджувана популяція у своєму життєвому циклі проходить кілька стадій свого розвитку або вікових ступенів. Виходячи з цього, будемо припускати, що популяція містить n вікових груп (розбитих, наприклад, за віком, розміром тіла або будь-якою іншою змінною, що може служити для розбиття). Спосіб розбиття популяції на групи визначається біологічними особливостями досліджуваної популяції та специфікою розв'язуваної задачі [5]. Тоді у кожен фіксований момент часу t популяція описується вектор-стовбцем $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$, де $x_i(t)\,(i = \overline{1,n})$ – чисельність індивідуумів популяції, розподілених за i-ми віковими групами в кожний момент часу $t = 0,1,2,\ldots$. З математичної точки зору це означає, що розглядається n-мірний евклідовий простір R^n з кортежами $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$.

При цьому з біологічної точки зору випливає, що $x_i(t) \geq 0$ для усіх $t \geq 0$, а отже, $\mathbf{x}(t) \geq 0$ [4, 6, 10]. Час t визначає дискретні моменти, що збігаються з моментами переходу з одної вікової групи в наступну. Інтервал часу $t_{i+1} - t_i$ вважається постійним для будь-якого i $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

За зазначених припущень математична модель П. Леслі з дискретною віковою структурою має вигляд [1, 2, 5]

$$\mathbf{x}(t+1) = L\mathbf{x}(t), \tag{1}$$

де L – матриця переходу (проєкційна матриця) П. Леслі розмірністю $n \times n$, яка виступає аналогом еволюційного оператора φ^t динамічної системи з законом еволюції, який визначає стан системи $\mathbf{x}(t)$ в момент часу t за умови, що початковий стан $\mathbf{x}(0)$ є відомим, тобто з законом виду

$$\mathbf{x}(t) = \varphi^t \mathbf{x}(0),$$

та є відображенням, за яким з часом t система змінює своє положення, блукаючи деяким заданим чином по простору станів, тобто

$$\varphi^t : X \to X .$$

В інтерпретації еволюційного оператора можна сказати, що матриця Леслі L визначає детермінований характер поведінки динамічної системи [3].

Для векторно-матричного рівняння (1) ставиться задача Коші:

$$\text{при } t = t_0 = 0 \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \tag{2}$$

де $\mathbf{x}(t_0)$ – n-мірний вектор-стовпець початкових станів рівняння (1) з компонентами початкових станів для кожної i-ї вікової групи популяцій:

$$\mathbf{x}(t_0) = \left(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)\right)^T .$$

За дискретною моделлю, описуваною векторно-матричним різницевим рівнянням (1), маємо наступні співвідношення:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}(t_1) = L\mathbf{x}(t_0); \\ \mathbf{x}(t_2) = L\mathbf{x}(t_1) = L^2\mathbf{x}(t_0); \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t_k) = L\mathbf{x}(t_{k-1}) = L^k\mathbf{x}(t_0); \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t_n) = L\mathbf{x}(t_{n-1}) = L^n\mathbf{x}(t_0). \end{gathered} \tag{3}$$

Отримані рівняння (3) визначають розв’язки різницевого рівняння (1) у векторному вигляді (за кожною i-ю віковою групою популяцій) для кожного моменту часу $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n$, кожний з яких шукається ітераційним шляхом [11-14].

За останнім з співвідношень (3) можна визначити розв’язок різницевого рівняння (1) для будь-якого обраного фіксованого моменту часу t, тобто в остаточному випадку для будь-якого фіксованого моменту часу t_i, $i = \overline{1,n}$ розв’язок різницевого рівняння (1) може бути поданий у вигляді

$$\mathbf{x}(t_i) = L\mathbf{x}(t_{i-1}) = L^i\mathbf{x}(t_0), \quad i = \overline{1,n} ,$$

за яким представляється можливим однозначне визначення стану i-ї вікової групи популяції в будь-який момент часу t_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ за умови наявності повної інформації про структуру та поелементний вигляд проекційної матриці L та заданих початкових станах $x_i(t_0)$ i-ї вікової групи популяції.

Для визначення структурного вигляду матриці Леслі L у векторно-матричних рівняннях (1), (3), у зв’язку із явною однотипністю аналізовуваних рівнянь, достатньо розглянути більш детально, наприклад, перше з рівнянь (3) виду

$$\mathbf{x}(t_1) = L\mathbf{x}(t_0), \tag{4}$$

яке пов’язує вектор стану популяції $\mathbf{x}(t_1)$ у наступний момент часу t_1 з вектором стану $\mathbf{x}(t_0)$ у начальний момент часу t_0 через матрицю Леслі L .

Згідно з [1], з векторно-матричного рівняння (4) випливає, що в момент часу t_1 популяція має вікову структуру, яка описується вектором

$$\mathbf{x}(t_1)=\begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \\ \vdots \\ x_n(t_1) \end{bmatrix}_{n\times 1} = \left[l_{ij}\right]_{n\times n}\cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=k}^{k+p}\alpha_i x_i(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \beta_2 x_2(t_0) \\ \vdots \\ \beta_{n-1}x_{n-1}(t_0) \end{bmatrix}_{n\times 1}, \qquad (5)$$

де $l_{ij}\left(i,j=\overline{1,n}\right)$ – коефіцієнти матриці Леслі; α_i $\left(i=\overline{k,k+p}\right)$ – коефіцієнти народжуваності: $\alpha_i \ge 0$; β_i $\left(i=\overline{1,n-1}\right)$ – коефіцієнти виживання: $0<\beta_i<1$; коефіцієнти α_i $\left(i=\overline{k,k+p}\right)$ та β_i $\left(i=\overline{1,n-1}\right)$ визначаються властивостями біологічного виду і характером зовнішніх умов; $\alpha_i\left(x_k,...,x_{k+p}\right)=\alpha_i x_i$ $\left(i=\overline{k,k+p}\right)$ – функції народжуваності, які показують чисельність потомства відповідної i-ї вікової групи та являють собою її лінійні функції чисельності; $k,k+1,...,k+p$ – номери вікових груп, що можуть мати потомство (є репродуктивними); $\beta_i\left(x_1,...,x_{n-1}\right)=\beta_i x_i$ $\left(i=\overline{1,n-1}\right)$ – функції виживання – лінійні функції чисельності потомства i-ї вікової групи, які доживуть до наступного $(i+1)$ віку.

Компоненти визначеного в (5) вектора $\mathbf{x}(t_1)$ мають наступне тлумачення [1, 2, 6]: $x_1(t_1)=\sum\limits_{i=k}^{k+p}\alpha_i x_i(t_0)$ – чисельність потомства тих індивідів (особин) i-ї вікової групи ($i=k,k+1,\ldots,k+p$), які за одиничний проміжок часу переходять в наступну групу та є репродуктивними; в умовах того, що частина індивідів (особин) від кожної вікової групи гине, в дану групу $x_1(t_1)$ попадає кількість потомства лише репродуктивних особин; $x_i(t_1)=\beta_{i-1}x_{i-1}(t_0)$, $i=\overline{2,n}$ – чисельність частини потомства тих індивідів (особин), які перейшли з попередньої вікової групи $x_{i-1}(t_0)$, за винятком тих індивідів (особин), що загинули.

Виходячи з наведених постулатів, матриця Леслі $L=\left[l_{ij}\right]_{n\times n}$ має вигляд [1, 10]

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \ldots & \alpha_{k+p} & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad (6)$$

та містить елементи за всіма віковими групами.

Однак, для спостереження за розвитком чисельності популяції здебільшого важливими для аналізу досліджуваної ситуації виступають тільки репродуктивні групи, які мають вплив на розвиток популяції. Тому від класичної моделі Леслі, описуваної векторно-матричним різницевим рівнянням (1) з матрицею Леслі (6) за всіма віковими групами, переходять до модифікованої моделі П. Леслі, описуваної векторно-матричним різницевим рівнянням вигляду

$$\mathbf{x}(t+1)=\widetilde{L}\mathbf{x}(t) \qquad (7)$$

з модифікованою матрицею Леслі $\widetilde{L}=\left[\widetilde{l}_{ij}\right]_{n\times n}$ за лише репродуктивними групами, яка подається у вигляді [2, 5]

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & ... & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & \dots & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad (8)$$

де $\alpha_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ – коефіцієнти народжуваності i-ї вікової групи: $\alpha_i \geq 0$, $i=\overline{1,n-1}$; $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \neq 0$; $\alpha_i = 0$, $i=\overline{1,n-1}$ тільки за умови, коли відповідна вікова група i не залишає потомства; $\beta_i\ \left(i=\overline{1,n-1}\right)$ – коефіцієнти виживання i-ї вікової групи: $0<\beta_i<1$.

На відміну від матриці Леслі L класичного виду (6), в якій крім репродуктивних індивідів враховуються й ті індивіди, котрі ще не можуть відтворювати потомство, та ті, що вже вийшли з репродуктивного віку, модифікована матриця Леслі $\tilde{L}$ вигляду (8) враховує відразу ту вікову групу, яка може дати потомство (є репродуктивною). При цьому остання вікова група, що включена до модифікованої матриці $\tilde{L}$, не тільки дає потомство, але й являє собою групу з максимальним віком, тому є справедливою умова $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \neq 0$.

Аналогічно до класичної моделі Леслі, описуваної векторно-матричним рівнянням (1) з матрицею Леслі (6), за модифікованою моделлю Леслі, описуваною рівнянням (7) з матрицею Леслі (8), в момент часу t_1 популяція має вікову структуру, яка описується вектором

$$\mathbf{x}(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \\ \vdots \\ x_n(t_1) \end{bmatrix}_{n\times 1} = \left[\tilde{l}_{ij}\right]_{n\times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \beta_2 x_2(t_0) \\ \vdots \\ \beta_{n-1} x_{n-1}(t_0) \end{bmatrix}_{n\times 1}. \quad (9)$$

Всі інші співвідношення та взаємозв'язки в модифікованій моделі Леслі зберігаються.

Якщо при моделюванні динаміки досліджуваної екосистеми припустити існування популяції, яка починає процес розмноження з деякого віку та не припиняє його до кінцевого етапу життя, то в результаті отримаємо іншу модифіковану модель П. Леслі, описувану векторно-матричним різницевим рівнянням вигляду

$$\mathbf{x}(t+1) = \tilde{\tilde{L}}\mathbf{x}(t) \quad (10)$$

з модифікованою матрицею Леслі $\tilde{\tilde{L}} = \left[\tilde{\tilde{l}}_{ij}\right]_{n\times n}$ вигляду

$$\tilde{\tilde{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}. \quad (11)$$

Представлена в (11) модифікована матриця $\tilde{\tilde{L}}$ відображає популяцію, в якій розглядаються вікові групи, які ще не можуть давати потомство (молоді вікові групи, які ще не вступили в репродуктивну вікову групу, тобто всі $\alpha_i = 0, i=\overline{1,k-1}$), вікові групи, що можуть мати потомство (є репродуктивними) та не припиняють процес розмноження до кінцевого етапу життя ($\alpha_i \geq 0, i=\overline{k,n-1}$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \neq 0$). Всі інші умови моделі Леслі зберігаються.

Зауважимо, що всі визначені вище матриці Леслі L, $\tilde{L}$ та $\tilde{\tilde{L}}$ являють собою лінійні оператори в $n-$мірному евклідовому просторі. Виходячи зі змісту чисельностей змінних $x_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ класичної та модифікованих математичних моделей Леслі, описуваних рівнянням (1), (7) та (10) відповідно, які мають бути невід'ємними, оператор L, $\tilde{L}$ або $\tilde{\tilde{L}}$ відповідно переводить простір R^n самий в себе, тобто дія операторів

L, $\widetilde{L}$ та $\widetilde{\widetilde{L}}$ здійснюється у позитивному ортанті n – мірного евклідового простору з конусом

$$R_+^n = \left\{ \mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \right\},$$

що за своєю сутністю робить математичні моделі Леслі підозрілими на моделі, що описують динаміку позитивних систем [7-9]. У цьому зв'язку для досліджуваних математичних моделей Леслі ставиться задача аналізу позитивності досліджуваної екосистеми за розглядуваними класичною та модифікованими математичними моделями Леслі з дискретним часом та дискретною віковою структурою.

Дослідження позитивності класичної та модифікованих математичних моделей П. Леслі. Проведемо аналіз позитивності досліджуваної екосистеми за класичною та модифікованими моделями П. Леслі з дискретною віковою структурою та дискретним часом, описуваними векторно-матричними різницевими рівняннями відповідно до вигляду (1), (7) та (10).

Насамперед, визначимо поняття позитивної системи та основних критеріїв, за якими досліджувана система вважається позитивною.

Згідно з [7-9], позитивні системи являють собою системи, вхідні, початкові та вихідні стани яких є позитивними (невід'ємними) на проміжку всього часу їх розглядання.

Позитивні системи пов'язані з поняттям *М*-матриць (матриць Мецлера) та володіють властивостями, які доводять теореми Д. Фробеніуса та О. Перрона [15-17].

Задля того, щоб досліджувана система була позитивною, мають виконуватися наступні вимоги [8, 15]:

– матриці математичних моделей досліджуваного об'єкта повинні належати до класу *М*-матриць Мецлера, тобто всі недіагональні елементи аналізованих матриць мають бути невід'ємними. В термінах деякої матриці $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ виконання цієї властивості відповідає умові $a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$;

– матриці математичних моделей досліджуваного об'єкта мають бути невід'ємними ($A \geq 0$, тобто $a_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$) або додатними ($A > 0$, тобто $a_{ij} > 0$, $i, j = \overline{1, n}$);

– матриці математичних моделей досліджуваного об'єкта повинні бути нерозкладними, тобто такими, що при перестановці рядків вони не можуть бути приведеними до вигляду

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} B & \Theta \\ C & D \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

де B, D – квадратні ненульові матриці; C – ненульова матриця; $\Theta = \left(\theta_{ij}\right)$ – нульова матриця з елементами $\theta_{ij} = 0$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$.

В результаті, якщо матриці математичних моделей досліджуваного об'єкта задовольняють наведеним вище вимогам, то це означає, що досліджувана екосистема є позитивною, оскільки в такому випадку для аналізованих матриць її моделей виконуються умови теорем Д. Фробеніуса та О. Перрона [15, 16]:

– *теорема Д. Фробеніуса*: нерозкладна невід'ємна матриця $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ завжди має додатне характеристичне число λ, яке є простим коренем характеристичного рівняння, модулі всіх інших характеристичних чисел не перевищують числа λ. «Максимальному» характеристичному числу λ відповідає власний вектор $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ з додатними координатами;

– *теорема О. Перрона*: додатна матриця $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ завжди має дійсне та при цьому додатне характеристичне число λ, котре є простим коренем характеристичного рівняння та перевершує модулі всіх інших характеристичних чисел. Цьому «максимальному» характеристичному числу відповідає власний вектор $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ матриці A з додатними координатами $z_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$.

Проаналізуємо за наведеними критеріями матриці L вигляду (6), $\widetilde{L}$ вигляду (8) та $\widetilde{\widetilde{L}}$ вигляду (11) відповідно до класичної та модифікованих моделей П. Леслі з дискретною віковою структурою та дискретним часом, описуваних векторно-матричними різницевими рівняннями відповідно до вигляду (1), (7) та (10).

Елементи як класичної матриці L є невід'ємними ($\alpha_k \geq 0$, $0 < \beta_i < 1$), так і модифікованої матриці $\widetilde{L}$ є невід'ємними ($\alpha_i \geq 0, i = \overline{1, n-1}$, $\alpha_n > 0$, $0 < \beta_i < 1$), а також модифікованої матриці $\tilde{\tilde{L}}$ є невід'ємними ($\alpha_i = 0,\ i = \overline{1,k-1}$, $\alpha_i \geq 0,\ i = \overline{k,n-1}$, $\alpha_n > 0$, $0 < \beta_i < 1$, $i = \overline{1,n-1}$), тому всі матриці відносяться не тільки до класу *M*-матриць, а і до невід'ємних матриць. Отже, перша і друга вимоги задовольняються.

Оскільки, як відомо з [16], *M*-матриця володіє такою властивістю, що зворотна до неї матриця переводить всякий вектор з позитивними компонентами в вектор, компоненти якого також є позитивними, необхідною також є перевірка невиродженості матриць L, $\tilde{L}$ та $\tilde{\tilde{L}}$. Оскільки останній стовпець в матриці L завжди є нульовим (у зв'язку із тим, що в цьому випадку $\alpha_n = 0$), то $\det(L) = 0$, а, отже матриця L є виродженою. Модифіковані ж матриці $\tilde{L}$ та $\tilde{\tilde{L}}$, виходячи з зазначених вище для кожної матриці умов $\alpha_i \geq 0$, $0 < \beta_i < 1$, $i = \overline{1,n-1}$, $\alpha_n \neq 0$, є завжди невиродженими – усі n рядків (стовпців) матриць $\tilde{L}$ та $\tilde{\tilde{L}}$ є лінійно незалежними (при $\beta_i \neq 0$ $\left(i = \overline{1,n-1}\right)$ та $\alpha_n > 0$ лінійна незалежність рядків (стовпців) досягається навіть при довільних значеннях $\alpha_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1,n-1}\right)$, в тому числі у випадках, коли $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ дорівнюють нулю та/або приймають значення, співпадаючі із відповідними елементами в рядках (стовпцях)), а отже і $\det\left(\tilde{L}\right) = \det\left(\tilde{\tilde{L}}\right) = \alpha_n \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i \neq 0.$

Перевіримо третю вимогу про нерозкладність матриць L, $\tilde{L}$ та $\tilde{\tilde{L}}$.

Керуючись наведеним вище поняттям розкладності матриці, перевіримо можливість зведення класичної матриці L до матриці виду (12). Так, матриця L може бути представлена у вигляді (12), тобто у вигляді

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \ldots & \alpha_{k+p-1} & \alpha_{k+p} & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \beta_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \ldots & \alpha_{k+p-1} & \alpha_{k+p} \\ \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{n\times n} = \begin{bmatrix} B & \Theta \\ C & D \end{bmatrix},$$

де

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \ldots & \alpha_{k+p-1} & \alpha_{k+p} \\ \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}; \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-2)\times 2};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times(n-2)}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Отже, класична матриця L є розкладною (матриці B, D – квадратні та ненульові, матриця C – ненульова, а матриця Θ – нульова), а це означає, що третя вимога не задовольняється, і тому умови теореми Д. Фробеніуса не виконуються. Таким чином, класична модель П. Леслі в результаті проведеного дослідження не входить до класу позитивних систем.

Аналогічним чином перевіримо можливість зведення модифікованої матриці $\widetilde{L}$ до матриці вигляду (12). Розіб'ємо матрицю $\widetilde{L}$ на блоки, тобто представимо у вигляді

$$\tilde{L}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n\\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0\end{bmatrix}_{n\times n}=$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2}\\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\alpha_{n-1} & \alpha_n\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ \dots & \dots\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0\\ \beta_{n-1} & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}_{n\times n}=\begin{bmatrix}B & \Theta\\ C & D\end{bmatrix},$$

де

$$B=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2}\\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0\end{bmatrix}_{(n-2)\times(n-2)};\quad \tilde{\Theta}=\begin{bmatrix}\alpha_{n-1} & \alpha_n\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ \dots & \dots\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{(n-2)\times 2}\neq\Theta;$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times(n-2)};\quad D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \beta_{n-1} & 0\end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

В результаті проведеного дослідження за модифікованою матрицею $\widetilde{L}$ можна зробити висновок, що, оскільки в блочному представленні матриці $\widetilde{L}$ блочні матриці B,C,D відповідають умовам розкладної матриці (12) (матриці B,D – квадратні та ненульові, матриця C – ненульова), а матриця $\tilde{\Theta}$ – не відповідає, адже є ненульовою (елемент $\alpha_n \neq 0$ за умовами модифікованої моделі Леслі, оскільки в якості α_n виступає не максимально можливий, а найбільший репродуктивний вік особин [2]), то модифікована матриця $\widetilde{L}$ вважається нерозкладною, адже не якою перестановкою її неможливо привести до вигляду (12), а, отже, третя вимога до позитивної системи виконується.

Перевіримо також можливість зведення модифікованої матриці $\widetilde{\widetilde{L}}$ до матриці вигляду (12). Розбиваючи матрицю $\widetilde{\widetilde{L}}$ на блоки, представимо її у вигляді

$$\tilde{\tilde{L}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}=$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{n\times n}=\begin{bmatrix} B & \tilde{\Theta} \\ C & D \end{bmatrix},$$

де

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-3} & 0 \end{bmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}; \quad \tilde{\Theta}=\begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n-2)\times 2} \neq \Theta;$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times(n-2)}; \quad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Аналізуючи блочне представлення матриці $\tilde{\tilde{L}}$, отримаємо висновки, співпадаючі з висновками по модифікованій матриці $\tilde{L}$: блочні матриці B, C, D відповідають умовам розкладної матриці (12), а матриця Θ – не відповідає, адже є також ненульовою. Отже, модифікована матриця $\tilde{\tilde{L}}$, як і матриця $\tilde{L}$ є нерозкладною, а отже, третя вимога до позитивної системи в даному випадку також виконується.

Оскільки для модифікованих матриць Леслі $\tilde{L}$ та $\tilde{\tilde{L}}$ виконуються всі вимоги, що висуваються до позитивних систем, то це означає, що досліджувана екосистема є позитивною та для аналізованих матриць $\tilde{L}$ та $\tilde{\tilde{L}}$ модифікованих математичних моделей досліджуваної екосистеми виконуються умови теорем Д. Фробеніуса та О. Перрона [15, 16], згідно з якими невід'ємні нерозкладні матриці $\tilde{L}$ та $\tilde{\tilde{L}}$ мають єдине додатне власне значення $\lambda_M\left(\tilde{L}\right)$ та $\lambda_M\left(\tilde{\tilde{L}}\right)$ відповідно, яке є простим коренем характеристичного рівняння відповідно до вигляду

$$\det\left(\lambda I-\tilde{L}\right)=\lambda^n-\alpha_1\lambda^{n-1}-\alpha_2\beta_1\lambda^{n-2}-\alpha_3\beta_1\beta_2\lambda^{n-3}-\ldots-\alpha_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\beta_i\lambda-\alpha_n\prod_{i=1}^{n-1}\beta_i=0 \tag{13}$$

або

$$\det\left(\lambda I-\tilde{\tilde{L}}\right)=\lambda^n-\alpha_k\prod_{i=1}^{k-1}\beta_i\lambda^{n-k}-\alpha_{k+1}\prod_{i=1}^{k}\beta_i\lambda^{n-k-1}-\ldots-\alpha_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\beta_i\lambda-\alpha_n\prod_{i=1}^{n-1}\beta_i=0 \tag{14}$$

таким, що модулі всіх останніх власних значень матриці $\widetilde{L}$ (або $\tilde{\widetilde{L}}$) не перевищують відповідно числа $\lambda_M\left(\tilde{L}\right)$ (для моделі, описуваної рівнянням (7)) та $\lambda_M\left(\tilde{\tilde{L}}\right)$ (для моделі, описуваної рівнянням (10)). Крім того, оскільки $0<\beta_i<1$ та за умови, що $\alpha_n>0$ й $\alpha_n \neq 0$, у характеристичних рівняннях (13) та (14) вільний член $\alpha_n \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i \neq 0$, тому відповідно до рівняння (13) та (14) не мають нульових коренів, з чого випливає, що асимптотичний розв'язок різницевого $\mathbf{x}(t_n)=\widetilde{L}^n \mathbf{x}(t_0)$ рівняння (7) для досить великих n визначатиметься власним числом $\lambda_M\left(\tilde{L}\right)$ та відповідним йому власним вектором модифікованої матриці $\widetilde{L}$ П. Леслі, аналогічно для матриці $\tilde{\widetilde{L}}$: асимптотичний розв'язок $\mathbf{x}(t_n)=\tilde{\widetilde{L}}^n \mathbf{x}(t_0)$ рівняння (10) для досить великих n визначатиметься власним числом $\lambda_M\left(\tilde{\tilde{L}}\right)$ та відповідним йому власним вектором матриці $\tilde{\widetilde{L}}$.

Висновки. Об'єднуючи отримані у роботі результати дослідження, можна зробити висновок, що за всіма вимогами, що висувались до проєкційних матриць модифікованих динамічних математичних моделей досліджуваного об'єкта, досліджуваний об'єкт входить до класу позитивних систем. За вимогою нерозкладності матриць тільки класична матриця П. Леслі не дає задовільного результату – вона завжди є розкладною, що призводить до непозитивності досліджуваного об'єкта, а отже, і неможливості використання відповідного математичного апарату теорії позитивних систем. При цьому, порівнюючи між собою результати дослідження нерозкладності всіх проєкційних матриць Леслі, визначено, що на результат розкладності суттєвим чином впливає значення коефіцієнту народжуваності α_n: за умови, що $\alpha_n \neq 0$, проєкційна матриця є нерозкладною, в той час як при $\alpha_n = 0$ властивість нерозкладності матриці порушується, і як наслідок, досліджуваний об'єкт не може бути позитивним. В якості рекомендацій до усунення визначеної особливості можна запропонувати вироблення у структурі досліджуваного об'єкта таке керування, яке б дозволило впливати на окремі коефіцієнти проєкційних матриць з метою їх змінювання для набуття потрібних властивостей.

Література

1. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 232 с.
2. Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1978. 352 с.
3. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 400 с.
4. Roberts F. S. Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems. Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall, 1976. 559 pp.
5. Хусаінов Д. Я., Харченко І. І., Шатирко А. В. Введення в моделювання динамічних систем: навч. посібник. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2010. 132 с.
6. Smith D. P., Keyfitz N. Mathematical Demography: Selected Papers. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 514 p.
7. Luenberger D. G. Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications. New York: John Wiley & Sons, 1979. 446 pp.
8. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Построение и анализ разомкнутой непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. *Вісник запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя: ЗНУ. 2010. № 1. С. 81–88.
9. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Управление в непрерывной математической модели позитивной динамической системы балансового типа. *Вестник Херсонского национального технического университета: сб. научных статей*. Херсон: ХНТУ, 2009. Вып. 2(35). С. 273–278.
10. Єлховська Я. А., Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. Дослідження динамічних матричних математичних моделей популяційної динаміки. *Збірник наукових праць студентів, аспірантів і молодих вчених «Молода наука – 2019»*: у 5 т. Запоріжжя: ЗНУ, 2019. Т. 1. С. 32–35.
11. Kvakernaak H., Siwan R. Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-lnterscience, 1972. 575 p.

12. Gelfond A. O. Calculus of Finite Differences. Delhi: Hindustan Publishing Corporation, 1967.
13. Sage A. P., White III C.C. Optimum systems control. Second Edition. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1977. 413 p.
14. Schuppen J. H. Mathematical Control and System Theory of Stochastic Systems in Discrete-Time. Amsterdam: The Vrije Universitei, 2006. 497 p.
15. Gantmacher F. R. The Theory of Matrices, volume one. New York: Chelsea. 1959. 374 p.
16. Стефанюк В. Л. Одна теорема об М-матрицах и ее применения. *Математические заметки*. 1973. Т. 13, Вып. 2. С. 235–246.
17. Caswell H. Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation. Sunderland (Massachusetts): Sinauer Associates, 2001. 722 p.
18. Балакирева А. Г. Модификация неоднородной модели Лесли на случай отрицательных коэффициентов рождаемости. *Радиоэлектроника и информатика: науч.-техн. журн.* Харьков: ХНУРЭ, 2011. № 1. С. 40–43.
19. Überla K. Faktorenanalyse: Eine systematische Einführung für Psychologen, Mediziner, Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1977. 399 p.

References

1. Riznichenko, G. Yu. (2002). *Lectures on mathematical models in biology*. Part 1. Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika».
2. Svirezhev, Yu. M. & Logofet, D. O. (1978). Sustainability of Biological Communities. Moscow: Nauka.
3. Bratus, A. S., Novozhilov, A. S. & Platonov, A. P. (2009). Dynamic systems and models of biology. Moscow: Fizmatlit.
4. Roberts, F. S. (1976). Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems. Englewood Cliffs. New York: Prentice-Hall.
5. Khusainov, D. Ya., Kharchenko, I. I. & Shatyrko, A. V. (2010). Introduction to Dynamic Systems Modeling. Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv.
6. Smith, D. P. *&* Keyfitz, N. (1977). Mathematical Demography: Selected Papers. Berlin: Springer-Verlag.
7. Luenberger, D. G. (1979). Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications. New York: John Wiley & Sons.
8. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2010). Construction and analysis of an open continuous mathematical model of a positive dynamical system of balanced type. Visnyk zaporiz′koho natsional′noho universytetu: zb. nauk. statey. Fizyko-matematychni nauky. Zaporizhzhya: ZNU, No. 1, pp. 81–88.
9. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2009). Control in the continuous mathematical model of a positive dynamical system of balanced type. Vestnik Khersonskogo natsional’nogo tekhnicheskogo universiteta: sb. nauchnykh statey. Kherson: KHNTU, Iss. 2(35), pp. 273–278.
10. Yelkhovska, Ya. A., Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. O. (2019). The study of dynamic matrix mathematical models of population dynamics. Zbirnyk naukovykh prats′ studentiv, aspirantiv i molodykh vchenykh «Moloda nauka – 2019»: in 5 vol. Zaporizhzhya: ZNU, 2019. Vol. 1, pp. 32–35.
11. Kvakernaak, H. & Siwan, R. (1972). Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-lnterscience. 575 pp.
12. Gelfond, A. O. (1967). Calculus of Finite Differences. Delhi: Hindustan Publishing Corporation.
13. Sage, A. P. & White, III C. C. (1977). Optimum systems control. 2-nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. 413 pp.
14. Schuppen, J. H. (2006). Mathematical Control and System Theory of Stochastic Systems in Discrete-Time. Amsterdam: The Vrije Universitei.
15. Gantmacher, F. R. (1959). The Theory of Matrices. Vol. 1. New York: Chelsea.
16. Stefanyuk, V. L. (1973). One theorem on M-matrices and their applications. Matematicheskiye zametki, Vol. 13, Iss. 2, pp. 235–246.
17. Caswell, H. (2001). Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation. Sunderland (Massachusetts): Sinauer Associates.
18. Balakireva, A. G. (2011). Modification of the nonhomogeneous Leslie model in case of negative birth rates. Radioelektronika i informatika. Kharkov: KNURE, No. 1, pp. 40–43.
19. Überla, K. (1977). Faktorenanalyse: Eine systematische Einführung für Psychologen, Mediziner, Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.