

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-01

ПРИПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЭЛАСТИЧНОМ ЦИЛИНДРЕ С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ СВОБОДНОЙ ПОСАДКЕ

В. М. Ахундов, М. М. Кострова, И. Ю. Наумова

Національна металургічна академія України
akhundov@ua.fm

Ключевые слова:

цилиндр кусочно-однородный, волокна кольцевые, силы центробежные, деформации большие, метод конечных разностей.

Исследовали приповерхностный эффект в эластичном цилиндре из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии при свободной посадке. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра по схеме квадратной упаковки. Цилиндр формально рассматривали как сборку кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляют собой кольца квадратного сечения из матричного материала, включающие кольцевые волокна квадратного сечения как их армирующую сердцевину.

Применяли геометрические и физические уравнения и уравнения равновесия в нелинейной теории упругости для описания деформации рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Особенностью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, воздействующие на матрицу и волокна, изменений расстояний от их материальных точек до оси вращения цилиндра.

Производные первого порядка от искомых величин по осевой и радиальной координатам в уравнениях задачи аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности. Вместе с привлечением граничных условий и условий совместного деформирования матрицы и волокон формируется система нелинейных уравнений относительно основных искомых величин в узловых точках двумерной области. Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

В условиях больших деформаций компонентов цилиндрического тела рассмотрели приповерхностный эффект в нем, выражающийся в существенно неперидическом деформировании кольцевых элементов тела, прилегающих к его внутренней и внешней поверхностям. В качестве критерия неперидического деформирования кольцевых элементов применили верхнюю грань различия одноименных компонент деформации на противоположно расположенных ограничивающих поверхностях элемента. С помощью данного критерия определили глубину приповерхностного эффекта возле внутренней и внешней поверхностей цилиндра при его конечной скорости вращения. Выявили влияние эффекта на картину распределения напряжений в характерных сечениях тела.

ПРИПОВЕРХНЕВИЙ ЕФЕКТ В ЕЛАСТИЧНОМУ ЦИЛІНДРІ З КІЛЬЦЕВИМИ ВОЛОКНАМИ ПІД ВПЛИВОМ ОБЕРТАННЯ ПРИ ВІЛЬНІЙ ПОСАДЦІ

В. М. Ахундов, М. М. Кострова, І. Ю. Наумова

Національна металургійна академія України
akhundov@ua.fm

Ключові слова:

циліндр кусково-однорідний, волокна кільцеві, сили відцентрові, деформації великі, метод кінцевих різниць.

Досліджували приповерхневий ефект в еластичному циліндрі з матриці і кільцевих волокон під впливом сил інерції обертання навколо його осі симетрії при вільній посадці. Волокна квадратного перетину розташовуються в матриці циліндра за схемою квадратної упаковки. Циліндр формально розглядали як збірку кільцевих елементів. Кільцеві елементи являють собою кільця квадратного перетину з матричного матеріалу, що включають кільцеві волокна квадратного перетину як їх армуючу сердцевину.

Застосовували геометричні та фізичні рівняння і рівняння рівноваги в нелінійній теорії пружності для опису деформації розглянутого кусково-однорідного циліндра. Особливістю задачі, що розв'язували, є вплив на відцентрові сили, які впливають на матрицю і волокна, зміни відстаней від їх матеріальних точок до осі обертання циліндра.

Похідні першого порядку від потрібних величин по осьовій і радіальній координатах в рівняннях задачі апроксимували за допомогою кінцево-різницевого співвідношень другого порядку точності. Разом із залученням граничних умов і умов спільного деформування матриці і волокон формується система нелінійних рівнянь щодо основних потрібних величин в вузлових точках двомірної області. Дану систему рівнянь вирішували на основі процедури дискретного методу Ньютона. Єдиність розв'язку крайової задачі забезпечували на основі продовження рішення по кутовій швидкості обертання циліндра.

В умовах великих деформацій компонентів циліндричного тіла розглянули приповерхневий ефект в ньому, що виражається в істотно неперіодичній деформації кільцевих елементів тіла, що прилягають до його внутрішньої і зовнішньої поверхонь. Як критерій неперіодичного деформування кільцевих елементів застосували верхню межу відмінності однойменних компонент деформації на протилежно розташованих обмежуючих поверхнях елемента. За допомогою даного критерію визначили глибину приповерхневого ефекту біля внутрішньої і зовнішньої поверхонь циліндра при його кінцевій швидкості обертання. Виявили вплив ефекту на картину розподілу напружень в характерних перетинах тіла.

SURFACE EFFECT IN AN ELASTIC CYLINDER WITH RING FIBERS UNDER ROTATION WHEN FREE LANDING

V. M. Akhundov, M. M. Kostrova, I. Yu. Naumova

National Metallurgical Academy of Ukraine
akhundov@ua.fm

Key words:

piecewise homogeneous cylinder, annular fibers, centrifugal forces, large deformations, finite difference method.

We investigated the near-surface effect in an elastic cylinder made of a matrix and ring fibers under the influence of inertial forces of rotation around its axis of symmetry during free landing. Fibers of a square cross section are arranged in a cylinder matrix according to a square packing scheme. The cylinder was formally considered as an assembly of ring elements. The annular elements are square rings of matrix material, including annular square fibers as their reinforcing core.

Geometric and physical equations and equilibrium equations were used in the nonlinear theory of elasticity to describe the deformation of the piecewise-uniform cylinder under consideration. A feature of the problem being solved is the effect on the centrifugal forces acting on the matrix and the fibers of changes in the distances from their material points to the axis of rotation of the cylinder.

The first-order derivatives of the sought quantities with respect to the axial and radial coordinates in the equations of the problem were approximated using finite-difference relations of the second order of accuracy. Together with the boundary conditions and the conditions of joint deformation of the matrix and fibers, a system of nonlinear equations is formed with respect to the main sought quantities at the nodal points of the two-dimensional region. This system of equations was solved on the basis of the discrete Newton method. The uniqueness of the solution of the boundary value problem was ensured by continuing the solution with respect to the angular velocity of rotation of the cylinder.

Under conditions of large deformations of the components of a cylindrical body, a near-surface effect in it was considered, which manifests itself in a substantially non-periodic deformation of the ring elements of the body adjacent to its internal and external surfaces. As a criterion for the non-periodic deformation of the ring elements, the upper face of the difference between the deformation components of the same name on the oppositely located bounding surfaces of the element was used. Using this criterion, the depth of the near-surface effect was determined near the inner and outer surfaces of the cylinder at its final rotation speed. The effect was revealed on the pattern of stress distribution in characteristic sections of the body.

Введение

Деформация круглых цилиндров из однородных материалов под воздействием вращения вокруг оси симметрии подробно изучена в линейной механике деформирования. Библиография данных исследований достаточно полно представлена в [1]. В [2] рассмотрены инерционные накопители энергии (маховики) из жестких композитных материалов с цилиндрической ортотропией упругих свойств. В [3] с помощью уравнений линейной теории упругости решена задача о напряжениях во вращающейся цилиндрически ортотропной трубе. Приведены результаты при свободной и жесткой посадках трубы для случаев осевого и окружного армирования. В [4] рассмотрено перераспределение напряжений в диске с эластомерной матрицей в условиях релаксации напряжений при ползучести материала. Решение задачи производится при геометрически и физически линейной постановке. Состояние вращающихся дисков по модели упруго-пластического материала описано в работе [5]. Расчет вращающегося диска по полученным экспериментальным диаграммам растяжения материала без их упрощающей схематизации с помощью метода переменных параметров упругости приведен в [6].

Изучение больших деформаций цилиндров, армированных системами волокон, под воздействием сил инерции вращательного движения представлено в работах [7–9]. Описания другими авторами больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил в литературе и других источниках не выявили. В [7] и [8] решены задачи, соответственно, в плоской и осесимметричной постановках для цилиндров, слабо армированных волокнами. Исследование производили по одноуровневой прикладной теории [10], основанной на модели материала, по которой макроскопические напряжения определяются вкладом напряжений матрицы и усилий осевого растяжения или стесненного сжатия. В [9] на базе двухуровневой каркасной теории [11], включающей макро- и микромеханический уровни анализа, решены задачи о кручении цилиндров с двух- и трехортогональными

схемами армирования. В [12] по модели кусочно-однородной среды рассмотрено деформирование свободно вращающегося эластичного цилиндра с двоякопериодическим расположением в его матрице кольцевых волокон квадратного сечения.

Исследование приповерхностных эффектов в армированных волокнами круговых цилиндрах под воздействием вращения, а при больших деформациях и в иных телах, не выявили. Отметим [13], где рассматривается затухание краевого эффекта в материале, однонаправленно армированном волокнами квадратного сечения, при поперечном нагружении волокон из приповерхностного ряда. В работе [14] в аналитическом приближении исследованы краевые эффекты в однонаправленных композитах, связанные с перераспределением внешней нагрузки между волокном и матрицей при вытягивании волокон. В [15] дан анализ бифуркации при изгибе бесконечного эластомерного слоя, армированного рядом волокон вблизи одной ограничивающей поверхности, когда другая связана с нерастяжимой пластиной.

1. Постановка задачи

Исследовали приповерхностный эффект в эластичном цилиндре из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии при свободной посадке. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра по схеме квадратной упаковки. Цилиндр формально рассматривали как сборку кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляют собой кольца квадратного сечения из матричного материала, включающие кольцевые волокна квадратного сечения как их армирующую сердцевину.

На рис. 1 показано осевое сечение недеформированного цилиндра с внутренним радиусом $r = a$ и внешним $r = b$. Цилиндр включает цилиндрические слои толщиной h , армированные кольцевыми волокнами квадратного сечения с длиной сторон δ .

Изучали осесимметричную деформацию цилиндра при макроскопически плоском деформировании, когда длина цилиндра оставалась неизменяемой. В силу условий

симметрии задачу решали для правой половины дискового слоя толщиной $h/2$. Такой половинный слой заключен между поперечными сечениями цилиндра, одно из которых проходит через осевые линии волокон, а другое – через матрицу посередине между волокнами.

Применяли систему материальных цилиндрических координат $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$, из которых $\hat{\theta}^1$ – осевая, $\hat{\theta}^2$ – окружная, $\hat{\theta}^3$ – радиальная координаты. В отсчетной конфигурации цилиндра данные координаты обозначаем как t, φ, r соответственно. Осевую координату t отсчитывали от центрального

сечения, проходящего через осевые линии волокон в дисковом слое. Наряду с радиальной координатой r используем координату $z = r - a$, отсчитываемую от внутренней поверхности цилиндра. Величины, относящиеся к матрице и волокнам, отмечаем индексом n при значении $n = 0$, отвечающем матрице, и значениях $n = 1, \dots, n_{\max}$, как отвечающих волокнам в их нумерации по направлению от внутренней к внешней поверхности. В некоторых случаях для большей «наглядности» выражений величины описания матрицы отмечаем отдельно индексом m . При ясной принадлежности индексы компонентов обычно опускаем.

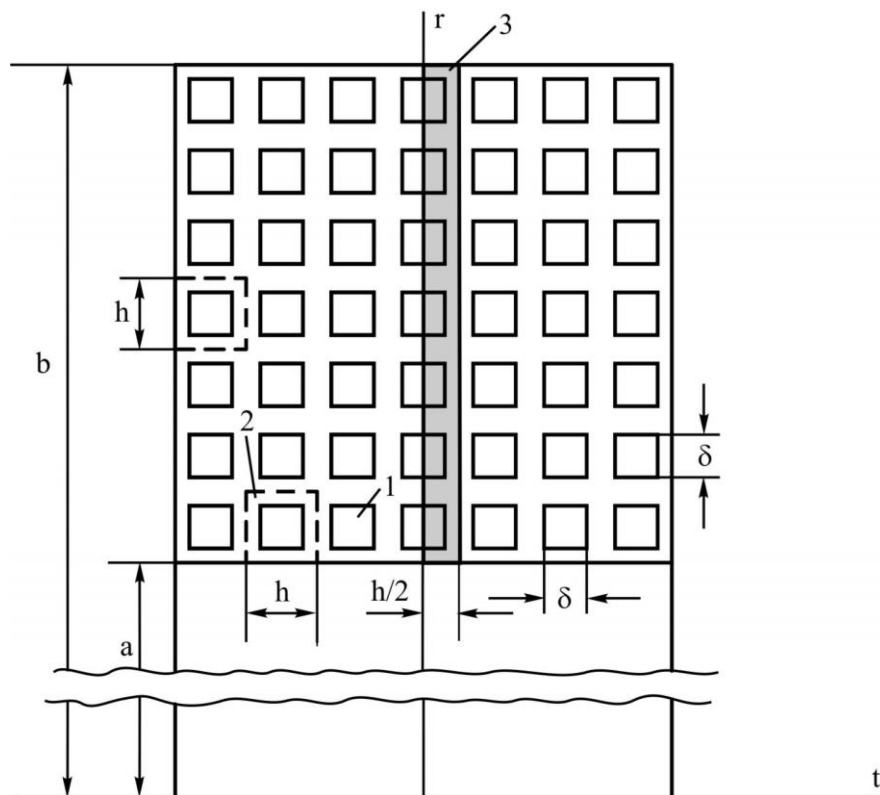


Рис. 1. Осевое сечение цилиндра в исходном состоянии: 1 – волокно квадратного сечения, 2 – кольцевой элемент, 3 – половина дискового слоя справа от центрального сечения

Применяли геометрические и физические уравнения и уравнения равновесия в нелинейной теории упругости [16] для описания деформации рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Особенностью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, воздействующие на матрицу и волокна, изменений расстояний от их материальных точек до оси вращения цилиндра. В используемых уравнениях задавали радиальную компоненту плотности

массовых сил, воздействующих на составляющие (компоненты) цилиндра при его вращении, в виде

$$F_{n(3)} = (r + u_{n(3)})\omega^2, \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max},$$

где $u_{n(3)}$ – радиальная компонента вектора перемещения в n -ом компоненте; $\omega = 2\pi \cdot f$ – угловая скорость вращения; f – число оборотов вращения в секунду.

Граничные условия для каждого из компонентов цилиндра, при которых решали краевую задачу, выражают отсутствие осевых перемещений в поверхностях $t=0$ и $t=h/2$ и поперечных сдвигов из этих поверхностей:

$$u_{n(1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad q_{n(13)} \Big|_{t=0} = 0, \quad n=0,1,2,\dots,n_{\max};$$

$$u_{n(1)} \Big|_{t=h/2} = 0, \quad q_{n(13)} \Big|_{t=h/2} = 0, \quad n=0.$$

При свободных от нагрузок внутренней и внешней поверхностях цилиндра принимали равными в них нулю компоненты несимметричного тензора Пиола-Кирхгофа:

$$t_{m(31)=0} \Big|_{r=a} = 0, \quad t_{m(33)=0} \Big|_{r=a} = 0;$$

$$t_{m(31)} \Big|_{r=b} = 0, \quad t_{m(33)} \Big|_{r=b} = 0.$$

Условия совместного деформирования задавали, исходя из равенств компонент векторов перемещений и напряжений для матрицы и волокон между собой в границах их раздела. Эти условия приводим, отметив величины, относящиеся к матрице, индексом m . В цилиндрических поверхностях раздела матрицы с n -волоком

$$u_{m(1)}(t,r) = u_{n(1)}(t,r), \quad u_{m(3)}(t,r) = u_{n(3)}(t,r),$$

$$t_{m(31)}(t,r) = t_{n(31)}(t,r), \quad t_{m(33)}(t,r) = t_{n(33)}(t,r),$$

$$0 \leq t \leq \delta/2, \quad z = nh - (h + \delta)/2,$$

$$z = nh - (h - \delta)/2, \quad n = 1, 2, \dots, n_{\max}.$$

В поперечной плоскости $t = \delta/2$ раздела n -волокон с матрицей

$$u_{m(1)}(t,r) = u_{n(1)}(t,r), \quad u_{m(3)}(t,r) = u_{n(3)}(t,r),$$

$$t_{m(11)}(t,r) = t_{n(11)}(t,r), \quad t_{m(13)}(t,r) = t_{n(13)}(t,r),$$

$$t = \delta/2, \quad nh - (h + \delta)/2 \leq z \leq nh - (h - \delta)/2,$$

$$n = 1, \dots, n_{\max}.$$

Производные первого порядка от искоемых величин по осевой и радиальной координатам t и r в уравнениях задачи аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [17]. Вместе с привлечением граничных условий и условий совместного деформиро-

вания матрицы и волокон формируется система нелинейных уравнений относительно основных искоемых величин в узловых точках двумерной области $0 \leq t \leq h/2$, $a \leq r \leq b$. Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона [18]. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

2. Численные результаты

Представляем результаты численного решения задачи для цилиндра, включающего 100 цилиндрических слоев с кольцевыми волокнами в них. Цилиндр рассматривали как совокупность дисковых слоев, в сборках каждого из которых по 100 кольцевых элементов. Внутренний радиус цилиндра $a = 100$ мм, внешний радиус $b = 200$ мм. Волокна в кольцевых элементах с длиной стороны квадратного сечения $\delta = 0,6h = 0,6$ мм, квадратная упаковка волокон с расстояниями между осевыми линиями смежных волокон $h = 1$ мм, коэффициент наполнения волокнами $k_f = \delta^2/h^2 = 0,36$. Материалы матрицы и волокон задавали с помощью трехконстантного потенциала Левинсона–Буржеса и двухконстантного потенциала Блейтца соответственно [19]. Для матрицы принимали значения упругих параметров $E_m = 4$ МПа, $\nu_m = 0,46$, $\beta_m = 1$; для волокон – $E_f = 68$ МПа, $\nu_f = 0,4$. Плотность материалов матрицы и волокон принимали одинаковой $\rho_m = \rho_f = 1,1 \cdot 10^3$ кг/м³. Результаты решения задачи получали на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, для которой на отрезках $0 \leq t \leq 0,3$ мм и $0,3 \text{ мм} \leq t \leq 0,5$ мм по 7 равноотстоящих узловых точек, две из которых на границах раздела совпадают между собой. На протяжениях по координате r в волокнах и между волокнами также по 7 узловых точек (см. рис. 2).

На рис. 2 изображены конфигурации осевых сечений для четырех половинборок кольцевых элементов, расположенных в цилиндре справа от центрального сечения.

Каждая из данных сборок включает три концентрически расположенных кольцевых элемента. Первая сборка выделена из недеформированного цилиндра, конфигурация

ее осевого сечения не зависит от места сборки в цилиндре, приведена для сопоставления с ней деформированных сборок.

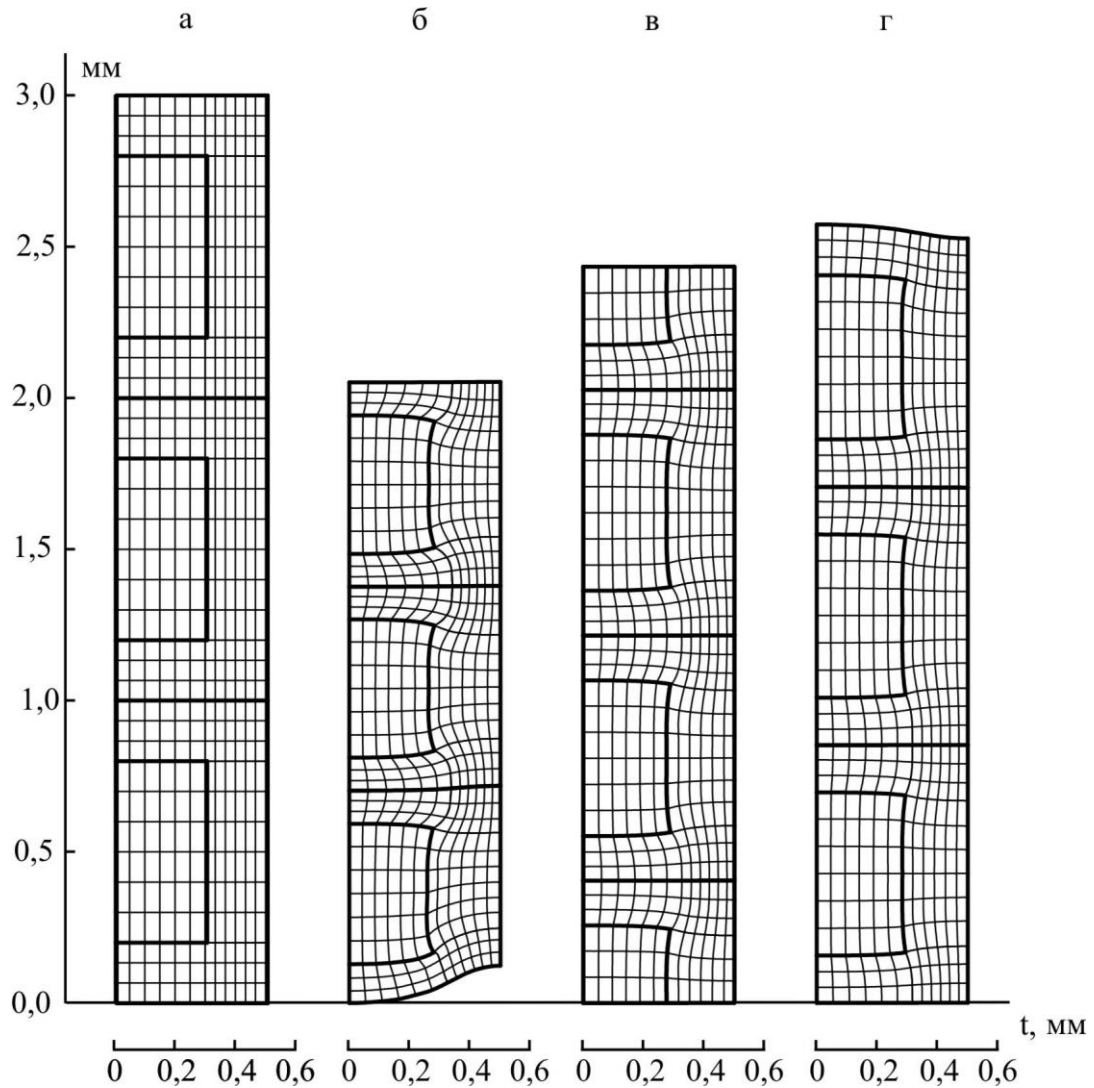


Рис. 2. Конфигурации осевых сечений сборок кольцевых элементов цилиндра:

- а) сборка из трех элементов без вращения цилиндра; б), в) и г) сборки при вращении $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$, включающие 1-й, 2-й, 3-й элементы, половину 49-го, 50-й, 51-й, половину 52-го элемента и 98-й, 99-й, 100-й элементы соответственно

Остальные сборки выделены из деформированного цилиндра при $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$. Вторая сборка включает 1-й, 2-й и 3-й кольцевые элементы, примыкающие к внутренней поверхности цилиндра, ограничена поверхностями $z = 0$ и $z = 3h$. Третья сборка образована из внешней половины 49-го элемента, 50-го, 51-го элементов и внутренней половины 52-го элемента, расположена между поверхностями $z = 48,5h$ и $z = 51,5h$. Четвертая сборка из примыкающих к внешней поверхности цилиндра 98-го, 99-го и

100-го элементов между поверхностями $z = 97h$ и $z = 100h$.

Конфигурации осевых сечений кольцевых элементов в сборках представлены сетками координатных линий $t = t_i$, $z = z_i$, проходящих через узловые точки (t_i, z_i) конечно-разностной схемы решения задачи. Они демонстрируют, насколько более интенсивно деформируются кольцевые элементы, расположенные ближе к внутренней поверхности цилиндра по сравнению с более удаленными от нее элементами.

Наиболее сильно изменяется конфигурация 1-го элемента, внутренняя поверхность которого служит соответствующей частью граничной поверхности цилиндра. Материал матрицы возле внутренней поверхности существенно перемещается во внутрь области матричного слоя $\delta/2 \leq t \leq h - \delta/2$ между волокнами цилиндра из рассматриваемого дискового слоя и смежного с ним другого дискового слоя. Стрела прогиба внутренней поверхности цилиндра $f = 0,12$ мм (12% от высоты $h = 1$ мм поперечного сечения элемента в недеформированном состоянии). Меньше данный эффект выражен возле внешней поверхности цилиндра. Она прогибается также во внутрь области, занимаемой матрицей, со стрелой прогиба $f = 0,05$ мм.

Деформированные конфигурации осевых сечений 1-го и 2-го кольцевых элементов значительно различаются между собой. Для 2-го и 3-го элементов различия в их конфигурациях выражены менее существенно. Что касается 3-го и 4-го и последующих пар смежных элементов, то их конфигурации близки между собой в пределах погрешности представления графического материала. Это продолжается включительно до пары 98-го и 99-го элементов. И только конфигурация 99-го элемента заметно отличается от конфигурации 100-го.

На рис. 3 представлены распределения осевых, окружных и радиальных кратностей удлинений λ_1 , λ_2 , λ_3 и угловой деформации ω_{13} вдоль внутренней поверхности цилиндра (1-го элемента) $z = 0$. Характерной особенностью является осевое удлинение на участке под волокнами и укорочение в матричном слое. Кривая для радиальной деформации λ_3 отражает большее радиальное укорочение под волокном, где достигается $\lambda_3 - 1 = -0,44$, и меньшее в матричном слое, по центру которого $t = 0,5$ мм $\lambda_3 - 1 = -0,28$.

Окружная деформация λ_2 практически постоянна, принимает значения от $\lambda_2 = 1,661$ при $t = 0$ до $\lambda_2 = 1,662$ при $t = 0,5$. Угловая деформация $\gamma_{13} = \pi/2 - \omega_{13} = 0$ при свободной внутренней поверхности цилиндра.

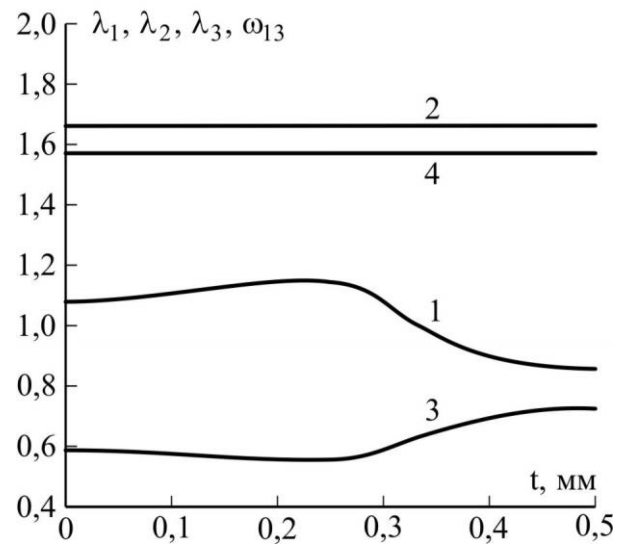


Рис. 3. Распределения кратностей удлинений λ_1 (1), λ_2 (2), λ_3 (3) и координатного угла ω_{12} (4) во внутренней поверхности $z = 0$ первого кольцевого элемента цилиндра

На рис. 4 приведены кривые, характеризующие параметры деформации в поверхности $z = h$, разделяющей 1-й и 2-й кольцевые элементы. Осевая деформация λ_1 монотонно убывает с переходом от растяжения ($\lambda_1 > 1$) в зоне между волокнами к сжатию ($\lambda_1 < 1$) в матричном слое $0,3 \text{ мм} \leq t \leq 0,5 \text{ мм}$. По сути отражается вытеснение связующего из области между смежными волокнами в область матричного слоя (см. также конфигурации сборок кольцевых элементов на рис. 2). Функция λ_3 монотонно возрастает при наибольших значениях (по модулю) укорочения $\lambda_3 - 1 \cong -0,5$ по центру между волокнами. Функция λ_2 постоянна в пределах погрешности ее изображения. Для ω_{13} кривая не сильно отклоняется от $\pi/2$ при наибольшей сдвиговой деформации

$\gamma_{13} = \pi/2 - \omega_{13}$ возле места перехода $t = 0,3$ мм к матричному слою.

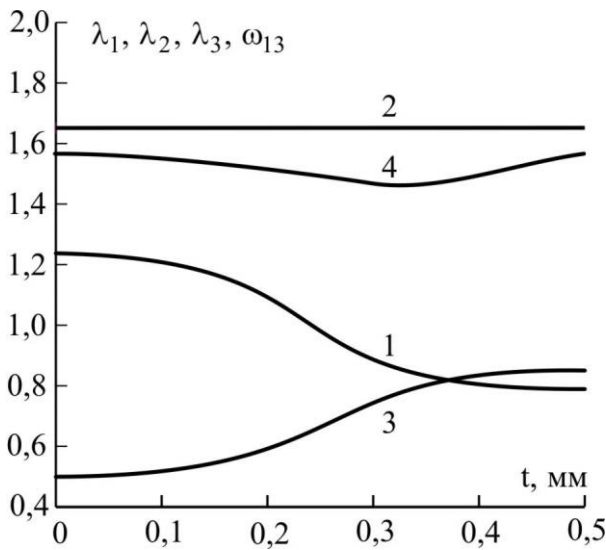


Рис. 4. То же в поверхности $z = h$ раздела первого и второго кольцевых элементов цилиндра

Из сопоставления распределения деформаций во внешней и внутренней поверхностях 1-го кольцевого элемента приходим к

$$S = \max \left(\sup_i |\lambda_{1i}^+ - \lambda_{1i}^-|, \sup_i |\lambda_{2i}^+ - \lambda_{2i}^-|, \sup_i |\lambda_{3i}^+ - \lambda_{3i}^-|, \sup_i |\omega_{13i}^+ - \omega_{13i}^-| \right) \cdot 100\% .$$

Здесь параметры деформации, отмеченные «+» и «-», относим к внешней и внутренней поверхностям кольцевого элемента; индексом i отмечены узловые значения параметров деформации в данных поверхностях, отвечающие узловому значению осевой координаты $t = t_i$ в конечно-разностной схеме решения задачи. Выражение для показателя S называем далее показателем или критерием неперидического деформирования кольцевого элемента.

Наибольшие из разниц узловых значений на противоположно расположенных граничных поверхностях элемента для отдельных параметров деформации называем частичными показателями неперидического деформирования элемента и обозначаем их как

$$S_1 = \sup_i |\lambda_{1i}^+ - \lambda_{1i}^-| \cdot 100\% ,$$

$$S_2 = \sup_i |\lambda_{2i}^+ - \lambda_{2i}^-| \cdot 100\% ,$$

$$S_3 = \sup_i |\lambda_{3i}^+ - \lambda_{3i}^-| \cdot 100\% ,$$

$$S_4 = \sup_i |\omega_{13i}^+ - \omega_{13i}^-| \cdot 100\% .$$

Тогда общий показатель неперидического деформирования запишем в более кратком виде как

$$S = \max (S_1, S_2, S_3, S_4) .$$

В таблице 1 приведены максимальные различия параметров деформации в ограничивающих поверхностях элемента. Наиболее различаются узловые значения осевой деформации λ_1 в поверхности $t = 0,3$, разделяющей матрично-волоконный и матричный слой в элементе, $S_1 = 25,2\%$.

выводу о неперидическом характере деформирования данного элемента. В качестве оценки отклонения от перидического (квазиперидического) деформирования кольцевого элемента принимаем различия между деформациями в его внешней и внутренней ограничивающих цилиндрических поверхностях (по условиям симметрии решаемой задачи различия между деформациями на краях $t = -h/2$ и $t = h/2$ сборки кольцевых элементов отсутствуют). Определяем наибольшую разницу между соответствующими узловыми значениями на противоположно расположенных границах элемента для каждого из параметров деформации. Из найденных различий между одноименными параметрами деформации на внешней и внутренней поверхностях элемента выбираем максимальное по модулю как показатель неперидического деформирования элемента и выражаем его в процентах:

Табл. 1. Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях $z = 1$ мм и $z = 0$ 1-го кольцевого элемента

Показатель	S_1	S_2	S_3	S_4	S
Значение показателя, %	25,2	1,01	18,8	9,79	25,2
t , мм	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3

На рис. 5 и 6 представлены графики распределения деформаций в ограничивающих поверхностях 3-го кольцевого элемента $z = 2$ мм и $z = 3$ мм, проходящих в связующем материале. Кривые зависимостей визуально практически не отличимы между собой. На большей протяженности волоконно-матричного слоя зависимости для λ_1 и λ_3 демонстрируют осевые удлинения и радиальные укорочения соответственно, а на большей протяженности матричного слоя – укорочения по обоим направлениям, из которых больше осевое (по λ_1). На полном интервале при $z = 2$ мм $1,264 \geq \lambda_1 \geq 0,761$, $0,492 \leq \lambda_3 \leq 0,891$ и при $z = 3$ мм $1,261 \geq \lambda_1 \geq 0,762$, $0,497 \leq \lambda_3 \leq 0,897$. Функция окружной деформации $\lambda_2 \cong 1,6421$ при

$z = 2$ мм и $\lambda_2 \cong 1,6327$ при $z = 3$ мм. Функция ω_{13} испытывает слабое и немонотонное изменение, принимая на обоих краях интервала значение $\omega_{13} = \pi/2$. Для поверхностей $z = 2$ мм и $z = 3$ мм $1,571 \geq \omega_{13} \geq 1,554$ и $1,571 \geq \omega_{13} \geq 1,562$. Наибольшие отклонения от $\pi/2$ для внутренней поверхности элемента $|\Delta\omega_{13}| = 0,017$ ($0,97^\circ$), для внешней поверхности $|\Delta\omega_{13}| = 0,009$ ($0,52^\circ$).

В таблице 2 приведены показатели различия параметров деформации в ограничивающих внешней и внутренней поверхностях элемента. Наибольшее различие $S = 0,94\%$ в этих поверхностях имеет окружная деформация λ_2 по срединной поверхности $t = h/2 = 0,5$ мм матричного слоя.

Табл. 2. Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях $z = 3$ мм и $z = 2$ мм 3-го кольцевого элемента

Показатель	S_1	S_2	S_3	S_4	S
Значение показателя, %	0,30	0,94	0,57	0,75	0,94
t , мм	0	0,5	0,5	0,3	0,5

Исходя из показателей деформирования, представленных в таблице 2, приходим к значению показателя неперIODичности деформирования 3-го кольцевого элемента $S = 0,94\%$ как наибольшего из частичных показателей в таблице. Данное значение показателя S свидетельствует, что материальная конфигурация элемента в деформированном состоянии достаточно близка к симметричной относительно срединной поверхности элемента $z = 2,5$ мм. Деформирование 3-го кольцевого элемента может, таким образом, рассматриваться как квазипериодическое.

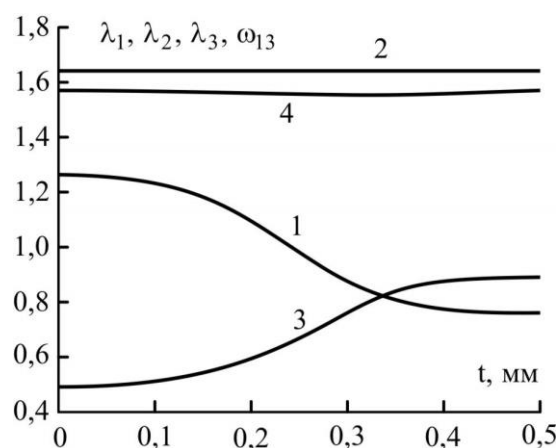


Рис. 5. То же в поверхности $z = 2h$ раздела второго и третьего кольцевых элементов цилиндра

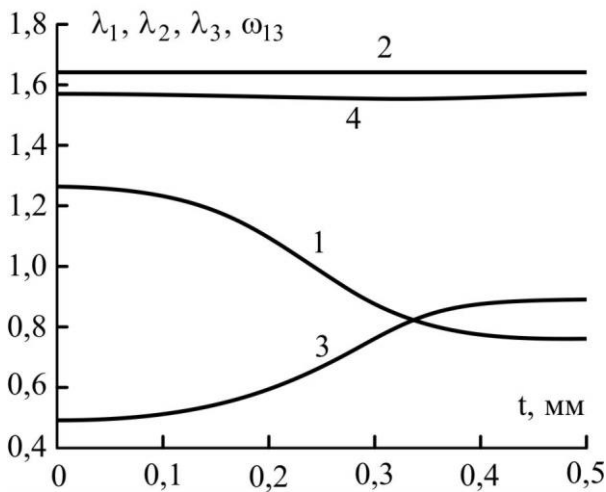


Рис. 6. То же в поверхности $z = 3h$ раздела третьего и четвертого кольцевых элементов цилиндра.

На рис. 7 изображены кривые, отображающие распределение деформаций в поверхности $z = 99h = 99$ мм, являющейся внутренней ограничивающей поверхностью 100-го кольцевого элемента. Осевая и радиальная кратности удлинений изменяются в пересекающихся интервалах $1,082 \geq \lambda_1 \geq 0,900$ и $0,762 \leq \lambda_3 \leq 0,949$. На большей части протяжения волоконно-матричного слоя осевые удлинения ($\lambda_1 > 1$) и всюду осевые укорочения ($\lambda_1 < 1$) в матричном слое. На всем интервале элемента $0 \leq t \leq 0,5$ мм материал связующего (матрицы) испытывает укорочения по радиальным направлениям. Окружная кратность удлинения является практически постоянной $\lambda_2 \cong 1,2298$. Функция угловой деформации, принимая на краях интервала значения $\omega_{13} = \pi/2$, изменяется в диапазоне $\pi/2 \leq \omega_{13} \leq 1,584$ с максимальным отклонением от $\pi/2$ (углом сдвига) $\gamma_3 = \pi/2 - \omega_{13} = -0,013$ ($-0,74^\circ$).

На рис. 8 отображены распределения деформаций для внешней ограничивающей поверхности $z = 100h = 100$ мм 100-го кольцевого элемента и в целом всей сборки, моделирующей цилиндрическое тело. Осевая деформация λ_1 в пределах волоконно-матричного слоя является деформацией удлинения при слабом немонотонном изменении в диапазоне значений $1,039 \leq \lambda_1 \leq 1,053$. Матричный слой, за исключением узкой окрест-

ности возле смежного с ним волоконно-матричного слоя, испытывает изменения осевых длин в диапазоне $1,025 \geq \lambda_1 \geq 0,905$. Окружная кратность удлинения изменяется как весьма слабо убывающая функция в диапазоне $1,2280 \geq \lambda_2 \geq 1,2278$. Функция λ_3 на волоконном матричном слое изменяется со слабой немонотонностью в диапазоне укорочений $0,808 \geq \lambda_3 \geq 0,797$. Матричный слой также по радиальным направлениям укорачивается, диапазон значений деформации $0,803 \leq \lambda_3 \leq 0,910$. В соответствии с тем, что ограничивающая поверхность $z = 100$ мм свободна от внешних сил, строго $\omega_{13} = \pi/2$.

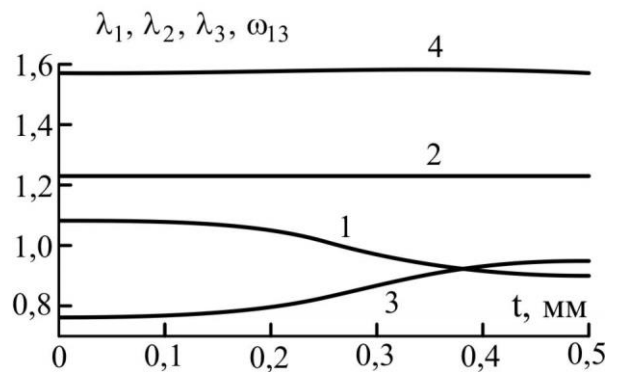


Рис. 7. То же во внутренней поверхности $z = 99h$ 100-го кольцевого элемента цилиндра

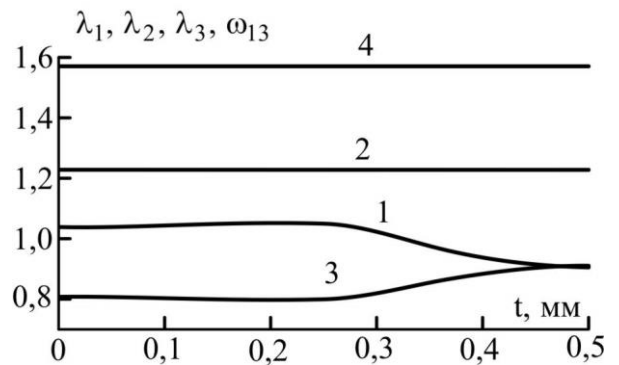


Рис. 8. То же во внешней поверхности $z = 100h$ кольцевого элемента цилиндра

В таблице 3 приведены показатели различия деформации в ограничивающих поверхностях элемента. Наибольшее значение показателя различия деформаций в ограничивающих поверхностях элемента достигается для осевой деформации λ_1 по месту перехода от волоконно-матричного слоя к матричному слою.

Табл. 3. Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях $z = 99$ мм и $z = 100$ мм 100-го кольцевого элемента

Показатель	S_1	S_2	S_3	S_4	S
Значение показателя, %	5,20	0,20	5,08	1,33	5,20
t , мм	0,3	0,5	11/30	0,3	0,3

В таблице 4 даны значения коэффициента S для ряда кольцевых элементов, на основе которых можно судить о глубине приповерхностного эффекта. Значения коэффициента неперериодичности деформирования кольцевых элементов даны с учетом значений параметров деформации в угловых точках поперечного сечения волокна и в связующем материале для этих же точек (верхняя строка таблицы) и без учета данных значений (нижняя строка таблицы). В качестве критерия проникновения эффекта в глубь цилиндра задаем величину коэффициента неперериодического деформирования $\overset{\circ}{S}$, как верхнюю границу квазипериодического деформирования. В случае, когда $S \leq \overset{\circ}{S}$, то приповерхностный эффект рассматриваем как практически не распространяющийся на элемент. Если в качестве

оценки проникновения приповерхностного эффекта примем $\overset{\circ}{S} = 2\%$, то в этом случае данный эффект оцениваем как проникающий на два смежных кольцевых элемента со стороны внутренней лицевой поверхности цилиндра и на один элемент со стороны его наружной поверхности. При $\overset{\circ}{S} = 3\%$ приповерхностный эффект возле внутренней поверхности цилиндра также считаем как «экранируемый» двумя кольцевыми элементами, а глубину приповерхностного эффекта возле его наружной поверхности считаем равной одному кольцевому элементу. При $\overset{\circ}{S} = 1\%$ глубина приповерхностного элемента определяется тремя элементами возле внутренней поверхности и двумя элементами возле внешней поверхности.

Табл. 4. Значения коэффициента неперериодичности деформирования S для ряда кольцевых элементов цилиндра при $\omega = 2\pi \cdot 80c^{-1}$

Номер элемента, n	1	2	3	51	98	99	100
Коэффициент неперериодичности деформирования элемента S , %	49,4	8,2	1,3	0,7	0,4	1,5	23,7

На рис. 9 представлены распределения окружных напряжений p_{22} в центральном сечении $t = 0$. Распределения напряжений показаны на протяжениях в цилиндре $0 \leq z \leq 3h$, $48,5h \leq z \leq 51,5h$, $97h \leq z \leq 100h$ трех сборок кольцевых элементов, которые изображены на рис. 2 – б, в, г. Эти напряжения претерпевают скачки на поверхностях раздела матрицы с волокнами. С переходом от одного кольцевого элемента к выше расположенному другому эти напряжения в матрице и волокнах убывают. Для матрицы напряжение уменьшается от значения $p_{22} = 3,1$ МПа во внутренней поверхности $z = 0$ до $p_{22} = 1,2$ МПа во внешней

$z = 100$ мм. В срединной поверхности $z = 0,5h$ первого волокна $p_{22} = 47,1$ МПа, а в срединной поверхности $z = 99,5h$ 100-го волокна $p_{22} = 15,8$ МПа. С переходом от матрицы к волокну данное напряжение для 1-го элемента увеличивается в 22 и 17 раз по месту его внутренней и внешней цилиндрических поверхностей раздела, для 100-го элемента – в 25 и 17 раз соответственно. Для элементов возле срединной поверхности цилиндра с переходом от матрицы к волокну напряжение p_{22} увеличивается в 14 раз в обеих для каждого из них поверхностях раздела.

На рис. 10 приведены кривые, отражающие распределения напряжений p_{22} на указанных протяжениях трех сборок в цилиндре для краевого сечения $t = 0,5$ мм. Данные кривые отражают распределения напряжений в матричном слое, являются непрерывными и гладкими, в отличие от кривых распределений напряжений p_{22} для сечения $t = 0$, претерпевающих разрывы на поверхностях раздела матрицы с волокнами. Напряжения p_{22} в сечении $t = 0,5$ мм возрастают с переходом от поверхности раздела двух смежных элементов к срединной поверхности каждого из них. И, напротив, эти напряжения убывают с переходом от положения напротив срединной линии боковой

поверхности волокна к положению напротив срединной линии для матрицы между волокнами. Соотношение между максимальным и минимальным напряжениями на протяжении периода армирования (одного элемента) изменяется от 1,22 вблизи внутренней поверхности до 1,39 вблизи внешней поверхности. В целом уровень напряжений в сечении $t = 0,5$ мм примерно такой же как для матрицы в сечении $t = 0$ и примерно на порядок меньше уровня напряжений в сечении $t = 0$ для волокон. Окружные напряжения p_{22} в сечениях $t = 0$, $t = 0,5$ мм и всюду в цилиндре являются положительными (растягивающими).

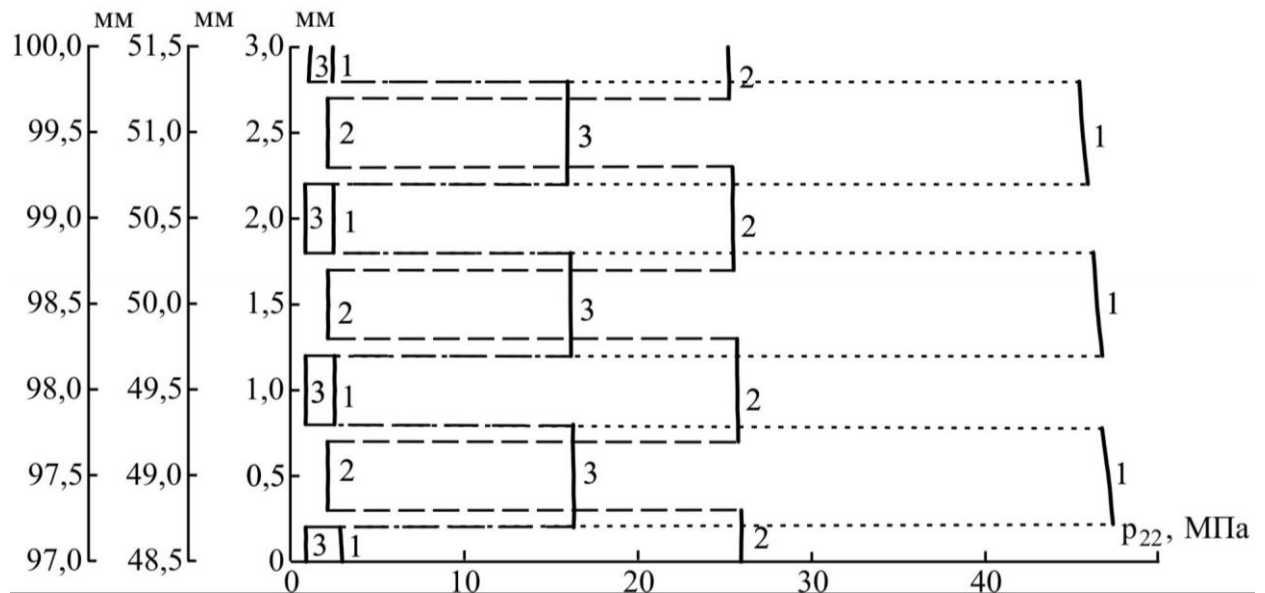


Рис. 9. Распределения окружных напряжений p_{22} на протяжениях $0 \leq z \leq 3h$, $48,5h \leq z \leq 51,5h$, $97h \leq z \leq 100h$ трех сборок элементов в цилиндре для сечения $t = 0$ мм

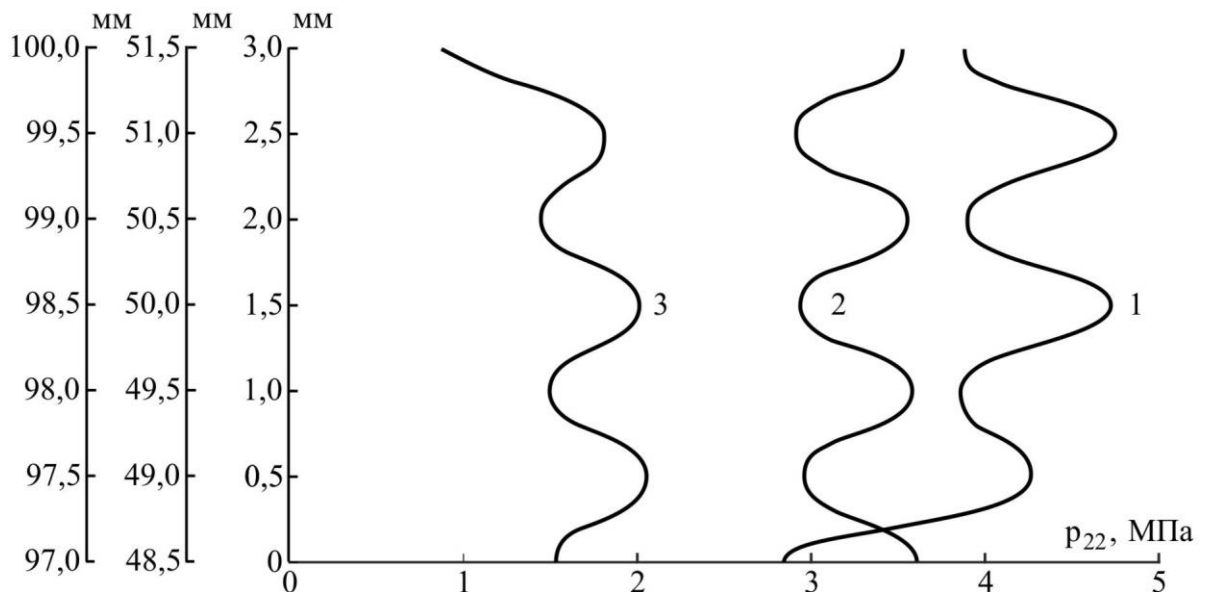


Рис. 10. То же для сечения $t = 0,5$ мм

На рис. 11 и 12 приведены кривые, которые в целом отражают распределения напряжений p_{22} по всей толщине цилиндра $0 \leq z \leq 100h$ в экваториальном (центральной) $t = 0$ и краевом $t = 0,5$ мм сечениях. На рис. 11,а и 12,а кривые состоят из отрезков, соединяющих точки, отвечающие значениям напряжения p_{22} в границах кольцевых элементов $z = nh$, $n = 0, 1, \dots, 100$ для центральной поверхности $t = 0$ (при $n = 0$ и

$n = 100$ значения напряжения отвечают внутренней и внешней поверхностям цилиндра соответственно). На рис. 11,б и 12,б кривые образованы отрезками, которые соединяют точки, отвечающие значениям напряжения p_{22} в срединных поверхностях кольцевых элементов $z = nh - h/2$, $n = 1, \dots, 100$. На рис. 11 одна из кривых (а) относится к матрице, а другая (б) к волокнам в цилиндре. На рис. 12 обе кривые относятся к связующему.

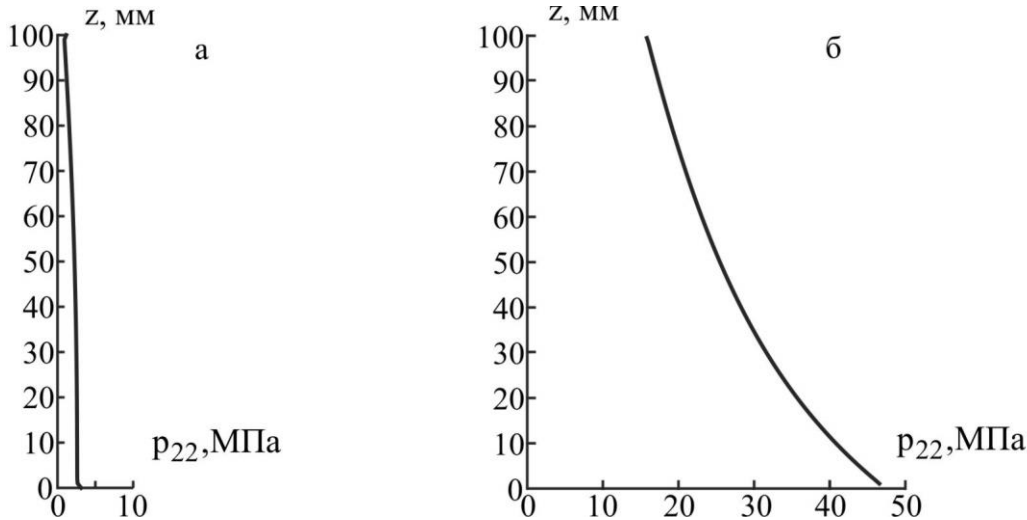


Рис. 11. Распределения окружных напряжений p_{22} в граничных поверхностях элементов (а) и в их срединных поверхностях (б) для сечения $t = 0$

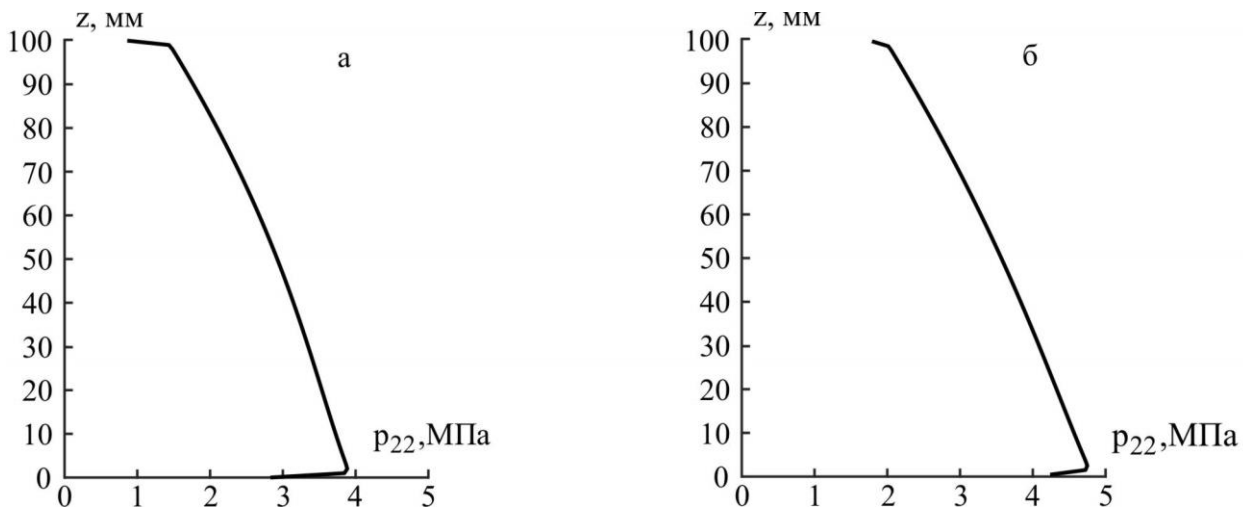


Рис. 12. То же для сечения $t = 0,5$ мм

В случае центрального сечения $t = 0$ (рис. 11) для матричного материала функция p_{22} является слабо монотонно убывающей. Исключением является концевой участок перехода от поверхности раздела 99-го и 100-го элементов ко внешней поверхности последнего из элементов. На этом участке p_{22} испытывает очень слабое увеличение,

едва визуально заметное (см. также рис. 9, график 3), которое следует рассматривать как проявление приповерхностного эффекта возле внешней поверхности цилиндра. Функция p_{22} для волокон при $t = 0$, будучи монотонно убывающей, приповерхностного эффекта возле граничных поверхностей цилиндра не отражает.

В случае краевого сечения $t = 0,5$ мм (рис. 12) обе кривые являются монотонно убывающими на интервалах, исключая концевые участки возле внутренней поверхности цилиндра. На участке возле внутренней поверхности данные кривые, которые, как и кривая на рис. 11,а, визуальнo отражают проявление приповерхностного эффекта на глубину в пределах 2 периодов армирования по высоте стенки цилиндра ($h_s = 2h$). (Глубина $h_s = 2h$ соответствует измерениям глубины приповерхностного эффекта целым числом периодов армирования по координате z .) Возле внешней поверхности графики на рис. 11,а и 12,а, б визуальнo отражают проникновение приповерхностного эффекта на глубину одного периода армирования ($h_s = h$).

На рис. 13 и 14 представлены графики, характеризующие в целом для цилиндра изменение напряжений p_{11} в сечениях $t = 0$ и $t = 0,5$ мм. Одни из графиков (рис. 13,а и 14,а) относятся к матричному материалу, а другие к волокнам (рис. 13,б) или к матричному слою напротив срединных линий боковых поверхностей волокон (рис. 14,б). Отметим немонотонное изменение функции p_{11} в сечении $t = 0$ для матрицы и волокна и в сечении $t = 0,5$ мм напротив средин между волокнами и монотонное уменьшение напротив средин волокон на интервале

квазипериодического деформирования. При этом каждый из двух приводимых на обоих рисунках графиков отражает наличие приповерхностного эффекта возле обеих граничных поверхностей цилиндра. Отметим малое растягивающее напряжение $p_{11} = 0,15$ МПа в сечении $t = 0,5$ мм возле внутренней поверхности $z = 0$ и еще более малое $p_{11} = 0,05$ МПа в данном сечении возле наружной поверхности $z = 100$ мм.

На рис. 15 и 16 приведены кривые, отражающие в целом распределения радиальных напряжений p_{33} по высоте стенки цилиндра для сечений $t = 0$ и $t = 0,5$ мм соответственно. В сечении $t = 0$ на интервале $0,5 \leq z \leq 16,5$ мм для волокна и на интервале $0 < z \leq 17$ мм для матрицы напряжения p_{33} являются сжимающими. Сжимающие в данном сечении и напряжения p_{33} возле внешней поверхности цилиндра на интервале $88 \text{ мм} \leq z < 100 \text{ мм}$ для матрицы и на интервале $91,5 \text{ мм} \leq z \leq 99,5 \text{ мм}$ для волокна. Уровень напряжений в сечении $t = 0,5$ мм превосходит уровень напряжений в сечении $t = 0$ (из сравнения кривых на рис. 16,а и рис. 16,б) и примерно в 20 раз меньше уровня напряжений p_{22} в волокнах цилиндра (из сравнения между собой кривых на рис. 16,б и рис. 11,б).

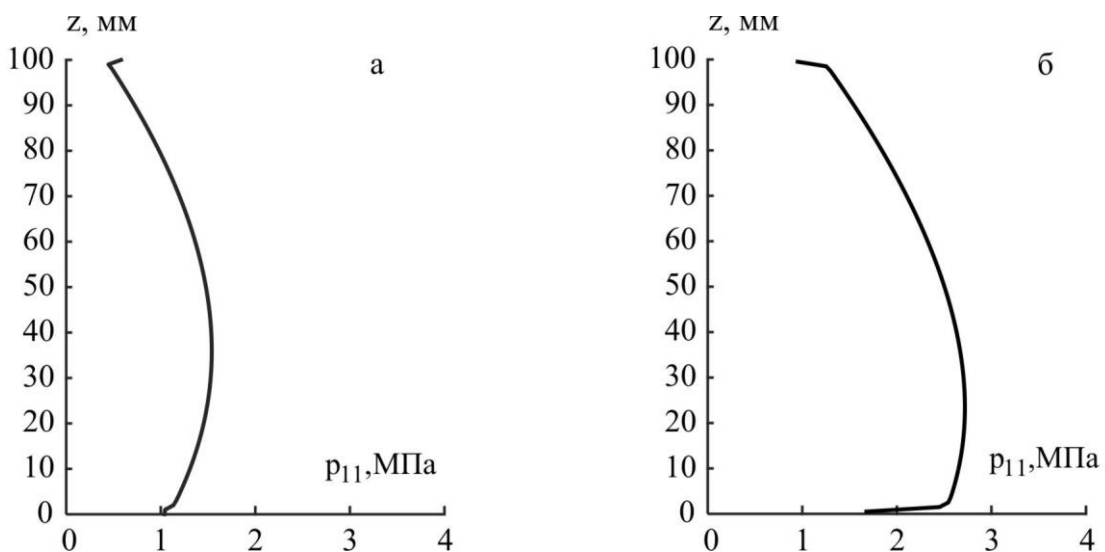


Рис. 13. Распределения осевых напряжений p_{11} в граничных поверхностях элементов (а) и в их срединных поверхностях (б) для сечения $t = 0$

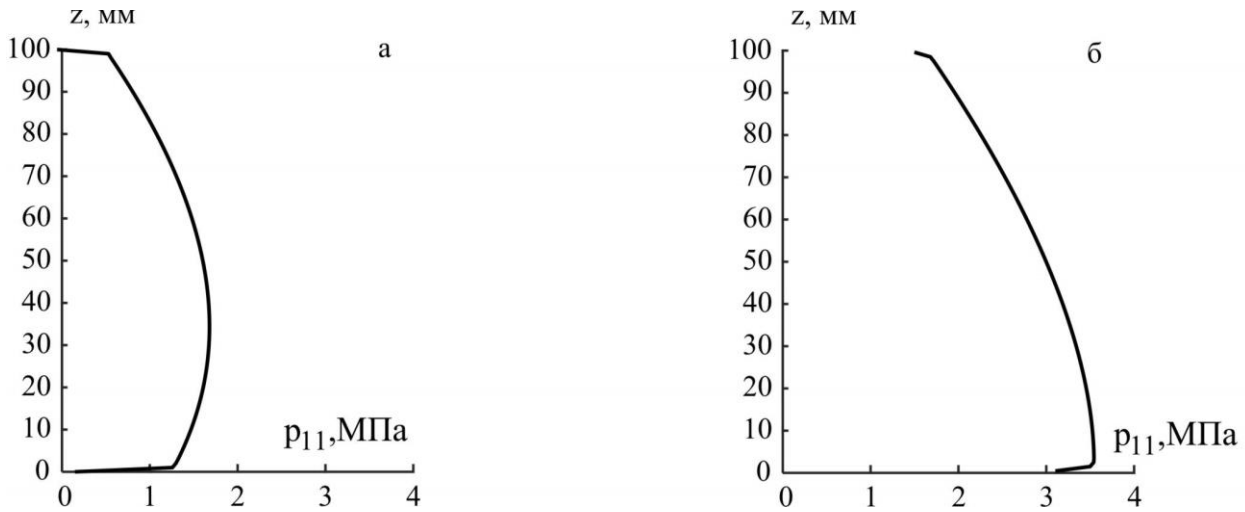


Рис. 14. То же для сечения $t = 0,5$ мм

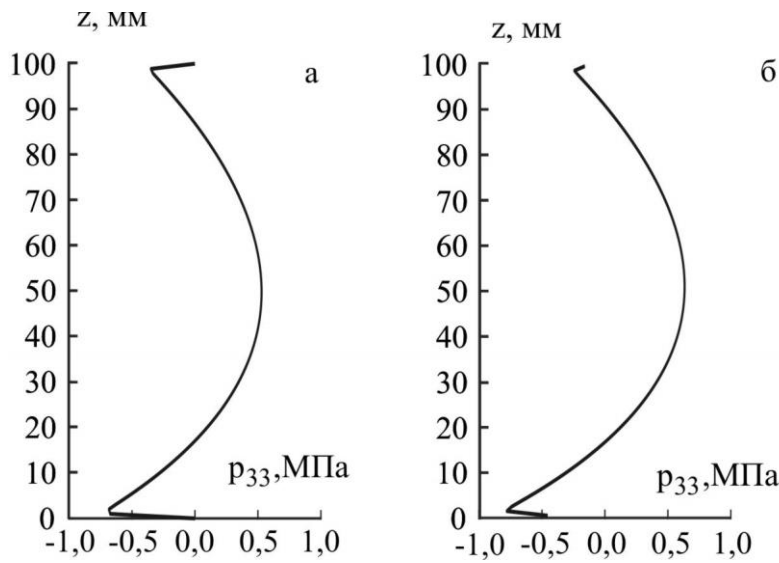


Рис. 15. Распределения радиальных напряжений p_{33} в граничных поверхностях элементов (а) и в их срединных поверхностях (б) для сечения $t = 0$ мм

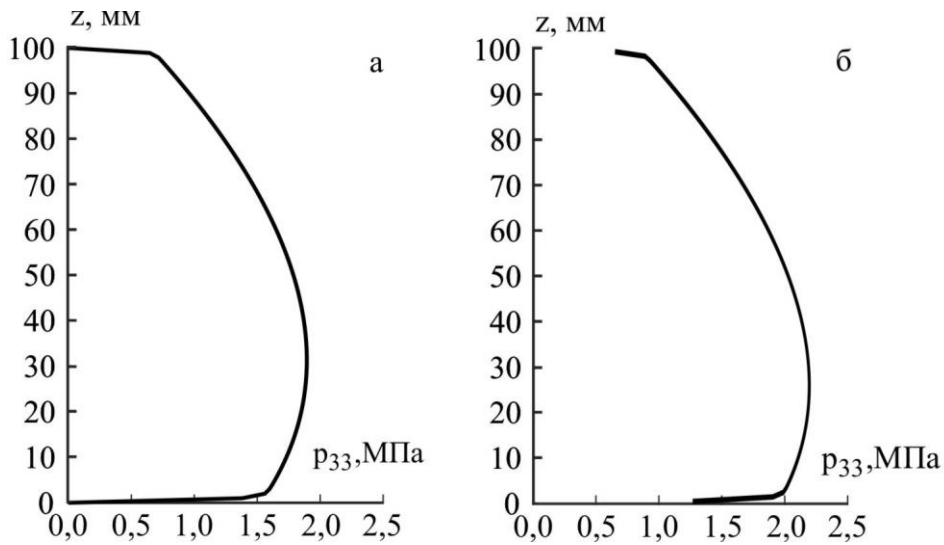


Рис. 16. То же для сечения $t = 0,5$ мм

Выводы

Провели исследование эластичного цилиндра, периодически армированного кольцевыми волокнами квадратного сечения, под воздействием свободного вращения. В условиях больших деформаций компонентов цилиндрического тела рассмотрели приповерхностный эффект в нем, выражающийся в существенно неперiodическом деформировании кольцевых элементов тела, прилегающих к его внутренней и внешней

поверхностям. В качестве критерия неперiodического деформирования кольцевых элементов применили верхнюю грань различия одноименных компонент деформации на противоположно расположенных ограничивающих поверхностях элемента. С помощью данного критерия определили глубину приповерхностного эффекта возле внутренней и внешней поверхностей цилиндра при его конечной скорости вращения. Выявили влияние эффекта на картину распределения напряжений в характерных сечениях тела.

Литература

1. Loffer K. Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen. Göttingen: Springer – Verlag OHG, 1961.
2. Композиционные материалы: справочник / под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. Москва: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. Tervonen M., Pramila A. Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*. 1996. Vol. 32, No. 6. P. 835–841.
4. Portnov G. G., Bakis Ch. E. Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*. 2000. Vol. 36, No. 1. P. 87–94.
5. Джонсон У., Меллор П. Б. Теория пластичности для инженеров. Москва: Машиностроение, 1979. 567 с.
6. Термопрочность деталей машин / под ред. И. А. Биргера и Б. Ф. Шора. Москва: Машиностроение, 1975. 455 с.
7. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Большие деформации однородных и армированных нитями цилиндров под воздействием центробежных сил. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45, № 3. С. 347–366.
8. Ахундов В. М., Скрипочка Т. А. Осесимметричная деформация вращающихся цилиндров из однородных и армированных нитями эластичных материалов. *Механика композитных материалов*. 2011. Т. 47, № 2. С. 301–316.
9. Ахундов В. М. Моделирование больших деформаций волокнистых тел вращения на основе прикладной и каркасной теорий. 3. Вращательное движение. *Механика композитных материалов*. 2014. Т. 50, № 6. С. 1131–1142.
10. Ахундов В. М. Прикладная теория композитов с малыми наполнениями нитями при больших деформациях. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2001. Т. 7, № 1. С. 3–15.
11. Ахундов В. М. Каркасная теория волокнистых сред с неискривленными и локально искривленными волокнами при больших деформациях. *Механика композитных материалов*. 2015. Т. 51, № 6. С. 971–990.
12. Ахундов В. М., Кострова М. М. Нелинейное деформирование кусочно-однородного цилиндра под воздействием вращения. *Механика композитных материалов*. 2018. Т. 54, № 2. С. 345–360.
13. Коханенко Ю. В., Быстров В. М. Краевой эффект в волокнистом композитном материале при равномерном нагружении приповерхностных волокон. *Прикладная механика*. 2007. Т. 43, № 11. С. 15–23.
14. Andrianov I. V., Danishevs'kyu V. V., Weichert D. Analytical study of the load transfer in fiber-reinforced 2D composite materials. *Int. J. of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45. P. 1217–1243.
15. Lignon T., Talles P. Le, Triantafyllidis N. Onset of failure in a fiber reinforced elastomer under constrained bending. *Int. J. of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50, No. 2. P. 275–287.
16. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.

17. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New York.: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
18. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
19. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.

References

1. Loffer, K. (1961). *Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen*. Göttingen: Springer – Verlag OHG.
2. Vasiliev, V. V. & Tarnopolsky, Yu. M. (Eds.). (1990). *Composite materials: reference book / under total*. Moscow: Mashinostroyeniye, 1990.
3. Tervonen, M. & Pramila, A. (1996). Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 32, No. 6, pp. 835–841.
4. Portnov, G. G. & Bakis, Ch. E. (2000). Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 36, No. 1, pp. 87–94.
5. Johnson, W. & Mellor, P. B. (1979). *Plasticity theory for engineers*. Moscow: Mashinostroyeniye.
6. Birger, I. A. & Shor, B. F. (Eds.). (1975). *Thermal strength of machine parts*. Moscow: Mashinostroyeniye.
7. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2009). Large deformations of homogeneous and filament-reinforced cylinders under the influence of centrifugal forces *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 45, No. 3, pp. 347–366.
8. Ahundov, V. M. & Skripochka, T. A. (2011). Axisymmetric deformation of rotating cylinders from uniform and thread-reinforced elastic materials. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 47, No. 2, pp. 301–316.
9. Ahundov, V. M. (2014). Modeling of large deformations of fibrous bodies of revolution based on applied and skeleton theories. 3. Rotational motion. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, Vol. 50, No. 6, pp. 1131–1142.
10. Ahundov, V. M. (2001). Applied theory of composites with small filler fillings at large deformations. *Mekhanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij*, Vol. 7, No. 1, pp. 3–15.
11. Ahundov, V. M. (2015). Skeleton theory of fibrous media with undistorted and locally curved fibers at large strains. *Mekhanika kompozit. Materialov*, Vol. 51, No. 6, pp. 971–990.
12. Ahundov, V. M. & Kostrova, M. M. (2018). Nonlinear deformation of a piecewise homogeneous cylinder under the influence of rotation. *Mekhanika kompozit. Materialov*, Vol. 54, No. 2, pp. 345–360.
13. Kohanenko, Yu. V. & Byistrov, V. M. (2007). Edge effect in a fibrous composite material with uniform loading of surface fibers. *Prikl. Mehanika*, Vol. 43, No. 11, pp. 15–23.
14. Andrianov, I. V., Danishevs'ky, V. V. & Weichert, D. (2008). Analytical study of the load transfer in fiber-reinforced 2D composite materials. *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 1217–1243.
15. Lignon, T., Talles, P. Le & Triantafyllidis, N. (2013). Onset of failure in a fiber reinforced elastomer under constrained bending. *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 50, No. 2, pp. 275–287.
16. Lur'e, A. I. (1980). *Nonlinear theory of elasticity*. Moscow: Nauka.
17. Korn, G. A. & Korn, T. M. (2000). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company.
18. Ortega, Dzh. & Rejnboldt, V. (1975). *Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many unknowns*. Moscow: Mir.
19. Chernyh, K. F. (1986). *Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations*. Leningrad: Mashinostroyeniye.