УДК 539.3 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-02

ГОМОГЕНІЗАЦІЯ В’ЯЗКОПРУЖНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ

А. В. Гаценко, М. І. Клименко, М. О. Корзюков, Н. О. Діоба

Запорізький національний університет,
m1655291@gmail.com

Ключові слова:
композиційний матеріал, матриця, волокно, поздовжнє розтягнення, поздовжній зсув, ефективна характеристика, енергетичний критерій.

У роботі наводиться розв’язання задачі визначення ефективних характеристик трансверсально-ізотропного в’язкопружного нестаріючого композита. Пропонується методика знаходження ядер релаксації для інтегральних операторів, що визначають поздовжній модуль пружності першого роду та поздовжній модуль зсуву в умовах в’язкопружного деформування. На основі отриманого пружного розв’язку та застосування інтегрального перетворення Лапласа визначено зображення ядер релаксації інтегральних операторів, що визначають в’язкопружні характеристики однорідного композита.

THE HOMOGENIZATION OF VISCOELASTIC TRANSTROPIC COMPOSITE MATERIAL

A. V. Gatsenko, M. I. Klymenko, M. O. Korzyukov, N. O. Dioba

Zaporizhzhia National University,
m1655291@gmail.com

Key words:
composite material, matrix, fiber, longitudinal tension, longitudinal shear, effective characteristic, energy criterion.

The paper proposes a method for determining the parameters of integral operators for the effective characteristics of a composite material. It is assumed that the fibrous composite is viscoelastic and transversely isotropic. The fibers in the matrix are oriented in one direction. The fiber and matrix are transversely isotropic, the fiber is perfectly elastic, and the matrix is viscoelastic. The isotropy planes of the matrix and fiber coincide and are perpendicular to the fiber axis. The representative element of the composite is a cylindrical cell. It consists of two coaxial cylinders. The fiber is a solid cylinder, the matrix is hollow. In the considered model, the Poisson's ratios of the viscoelastic material are assumed to be constant, the longitudinal elastic modulus of the first kind and the longitudinal shear modulus are defined as integral operators. The characteristics of the operators of the longitudinal elastic modulus of the first kind and the longitudinal shear modulus are determined. The mechanical behavior is determined after solving following problems 1) joint elastic deformation of the matrix and the fiber; 2) modelling of homogeneous composite. The axisymmetric stress-strain state of the matrix, fiber, and homogeneous composite is considered. For longitudinal tension, it is assumed that the axial displacements of the matrix and fiber coincide, the radial displacements and stresses at the interface of the matrix and the fibers are continuous, and there are no stresses at the cell boundary. For the longitudinal shear at the interface between the matrix and the fiber, the tangential stresses and axial displacements coincide, and the harmonic tangential stress is specified on the outer surface of the composite. For each boundary value problem, stresses, displacements, and deformations are determined. This makes it possible to determine for each case the energy of elastic volumetric deformation of the matrix, fiber, and homogeneous composite. An energy criterion is applied to determine the effective constants of an elastic composite. It consists in the fact that the energy of elastic bulk deformation of a homogeneous composite is equal to the sum of the values of such energies for the matrix and fiber. The solution of this problem in the viscoelastic case is obtained as elastic solution of the problem of composite homogenization. The rheological characteristics of the matrix and the homogeneous composite are determined by the relations of the hereditary Boltzmann-Volterra theory. The viscoelastic characteristics of the material are modeled by convolution-type integral equations. This allows to apply the Laplace transform.

1. Вступ

Широке застосування композиційних матеріалів у сучасній техніці пояснюється тим, що це дозволяє проєктувати матеріали з заданими жорсткістю, міцністю, пластичністю, антикорозійною стійкістю та іншими важливими при практичному застосуванні властивостями. Вони залежать від структури композита та властивостей його складових елементів. Тому задача знаходження ефективних механічних характеристик композиційних матеріалів за аналогічними характеристиками їх складових елементів, тобто задача гомогенізації композита, є однією з актуальних задач сучасної механіки. Розв'язання цієї задачі дозволяє при розрахунках напружено-деформованого стану елементів будівельних конструкцій, окремих деталей машин та механізмів розглядати композит як однорідний матеріал.

Ефективні характеристики у пружному випадку являють собою коефіцієнти, що пов'язують усереднені за об'ємом компоненти тензорів напружень та деформацій, визначені за певних крайових умов [1]. Для композитів з в'язкопружними властивостями ця задача ускладнюється використанням інтегральних операторів для їх моделювання. Характеристики таких операторів можуть визначатися як експериментально, так і з використанням аналітичних та чисельних методів.

Визначення ефективних характеристик для пружних трансверсально-ізотропних композитів розглянуте у публікації [2]. Тут для осесиметричного деформування композита визначені залежності його ефективних пружних сталих від аналогічних характеристик його елементів та об'ємного вмісту волокна у ньому. Композиційні матеріали, що застосовуються на практиці, у багатьох випадках являють собою систему шарів, що складаються з розташованих у одному напрямі волокон, поєднаних між собою матеріалом матриці. Експериментально доведено, що такі композити мають трансверсально-ізотропні властивості, причому для багатьох з них відзначається наявність в'язкопружності. У зв'язку з цим важливою для практики є задача гомогенізації в'язкопружних трансверсально-ізотропних композитів, що розглядається у даній роботі. Розв'язанню цієї задачі присвячено значну кількість досліджень. Зокрема, проблеми прогнозування реологічних властивостей композитів з в'язкопружними властивостями розглянуті у [3–6]. Механічні властивості композитів при поздовжньому деформуванні розглянуті у [3]. У працях [3, 5, 6] розглянуто випадок поздовжньої деформації композита з в'язкопружною ізотропною матрицею. У [7] пропонується методика чисельного визначення ефективних термов'язкопружних характеристик односпрямованих полімерних композитів, що ґрунтується на застосуванні методу квазіконстантних операторів з частинними апроксимаціями. Визначення характеристик в'язкопружного деформування композитів шляхом застосування спадкової теорії в'язкопружності Больцмана-Вольтерра розглянуте у [8]. Тут пропонується підхід, що ґрунтується на апроксимації функції деформування ланцюговим дробом та застосуванні методу операторних ланцюгових дробів.

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених моделюванню часових залежностей у в'язкопружному деформуванні композиційних матеріалів, поки що відсутня загальна методика розв'язання цієї задачі, що не застосовує наближених та чисельних методів. Одним з кроків у цьому напрямі є дане дослідження.

2. Постановка задачі та загальна схема її розв'язання

У даній роботі розглядається задача гомогенізації в'язкопружного композита за відомими характеристиками його складових. Об'єктом дослідження є односпрямований волокнистий в'язкопружний трансверсально-ізотропний композит з гексагональним розташуванням волокон. Його компонентами є в'язкопружна матриця та ідеально пружне волокно, причому обидві ці складові є трансверсально-ізотропними. Представницьким елементом композита є елементарна комірка, що складається з двох коаксіальних циліндрів. Матриця моделюється порожнистим циліндром $a \leq r \leq b$, волокно – суцільним циліндром $0 \leq r \leq a$. Далі символом $*$ будемо позначати характеристики матриці, символом $\circ$ – волокна.

Введемо циліндричну систему координат (r, θ, z). Механічні властивості в'язкопружного трансверсально-ізотропного композита визначаються за допомогою п'яти характеристик. Дві з них – поздовжній модуль пружності першого роду $\bar{E}_1$ та модуль зсуву $\bar{G}_{12}$ є інтегральними операторами:

$$\bar{E}_1[\varepsilon(t)] =$$
$$= E_1\left(\varepsilon(t) - \int_0^t R_E(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau\right),$$
$$\bar{G}_{12}[\varepsilon(t)] =$$
$$= G_{12}\left(\varepsilon(t) - \int_0^t R_G(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau\right).$$

Інші три характеристики – коефіцієнти Пуассона ν_{12}, ν_{21} та ν_{23} у вибраній моделі вважаємо сталими. У цих позначеннях індекс 1 відповідає осі z, паралельній осі волокна та перпендикулярній площині ізотропії (r, θ), індекс 2 – координаті r, індекс 3 – θ. Сталі E_1 та G_{12} є відповідно миттєвими модулями пружності та зсуву. Вони є значеннями цих характеристик при $t = 0$. Ці константи, а також коефіцієнти Пуассона можуть бути знайдені шляхом розв'язання задачі гомогенізації ідеально пружного композита. На основі розв'язку цієї задачі для пружного матеріалу можна отримати ефективні часові характеристики в'язкопружного композита – ядра релаксації $R_E(t)$ та $R_G(t)$. Визначення цих характеристик є метою даного дослідження.

Для її досягнення використовується інтегральне перетворення Лапласа. Перехід у простір лапласових зображень дозволяє замінити задачу розв'язання системи інтегральних рівнянь для визначення ядер релаксації задачею розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв'язання задачі гомогенізації пружного композита пропонується використати енергетичний критерій узгодження.

Цей критерій полягає у тому, що ефективні характеристики ідеально пружного композита визначаються з умови рівності енергії пружного деформування елементарної комірки, що складається з матриці та волокна, та енергії пружного деформування елементарної комірки однорідного композита. Потім для знаходження розв'язку відповідної в'язкопружної задачі використаємо отриманий пружний розв'язок задачі та перейдемо до простору лапласових зображень.

3. Гомогенізація композита при поздовжньому розтягненні

Розглянемо напружено-деформований стан елементарної комірки композита при її поздовжньому розтягненні. Вважається, що радіальні переміщення та напруження на межі контакту $r = a$ є неперервними, а осьові переміщення матриці та волокна співпадають. На межі елементарної комірки $r = b$ нормальне напруження відсутнє. Спочатку визначаються переміщення, напруження та деформації точок матриці та волокна при їх сумісному поздовжньому розтягненні. Далі розв'яжемо аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит.

Вирази для компонент напружено-деформованого стану трансверсально-ізотропного пружного волокна подаються наступними формулами:

$$u_r^\circ(r) = Cr,$$
$$u_z^\circ(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)} \times$$
$$\times\left(\frac{\sigma_0^\circ(1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ\right)z,$$
$$\sigma_r^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C\right),$$
$$\sigma_\theta^\circ(r) = \frac{E_2^\circ}{(1-\nu_{23}^\circ)}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ} + C\right),$$
$$\sigma_z^\circ = \sigma_0^\circ,$$
$$\varepsilon_r^\circ(r) = C, \varepsilon_\theta^\circ(r) = C,$$
$$\varepsilon_z^\circ(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^\circ)} \times$$
$$\times\left(\frac{\sigma_0^\circ(1-\nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C\nu_{21}^\circ\right).$$

Тут C – стала інтегрування.

Для трансверсально-ізотропної пружної матриці компоненти напружено-деформованого стану визначаються формулами:

$$u_r^*(r) = Ar + \frac{B}{r},$$

$$u_z^*(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^*)}\times$$
$$\times\left(\frac{\sigma_0^*(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^*\right)z,$$

$$\sigma_r^*(r) =$$
$$= E_2^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} - \frac{B}{r^2(1+\nu_{23}^*)}\right),$$

$$\sigma_\theta^*(r) =$$
$$= E_2^*\left(\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*(1-\nu_{23}^*)} + \frac{A}{1-\nu_{23}^*} + \frac{B}{r^2(1+\nu_{23}^*)}\right),$$

$$\sigma_z^* = \sigma_0^*,$$

$$\varepsilon_r^*(r) = A - \frac{B}{r^2}, \varepsilon_\theta^*(r) = A + \frac{B}{r^2},$$

$$\varepsilon_z^*(z) = \frac{1}{(1-\nu_{23}^*)}\times$$
$$\times\left(\frac{\sigma_0^*(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^*\right).$$

У останніх рівностях A, B – сталі інтегрування. Модулі пружності та коефіцієнти Пуассона пов'язані співвідношенням

$$\frac{E_1^*}{\nu_{12}^*} = \frac{E_2^*}{\nu_{21}^*}.$$

Вирази для напружень та деформацій пружного трансверсально-ізотропного композиційного матеріалу описуватимуться формулами:

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0, \varepsilon_z = \frac{1}{E_1}\sigma_0, \varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_0,$$
$$\sigma_z = \sigma_0, \sigma_r = 0, \sigma_\theta = 0.$$

Запишемо умову узгодження при використанні енергетичного критерію, тобто умову рівності пружної енергії деформації трансверсально-ізотропного однорідного циліндра, що моделює композиційний матеріал, та пружної енергії деформації системи з двох коаксіальних циліндрів – суцільного циліндра, що моделює волокно, та порожнистого циліндра, що моделює матрицю:

$$U^* + U^\circ = U. \qquad (1)$$

Вираз для пружної енергії деформації однорідного композиційного матеріалу має вигляд:

$$U = \frac{1}{2}\iiint\limits_V (\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \sigma_z\varepsilon_z +$$
$$+\tau_{r\theta}\gamma_{r\theta} + \tau_{\theta z}\gamma_{\theta z} + \tau_{zr}\gamma_{zr})rdrd\theta dz.$$

Сума пружних енергій деформації матриці та волокна виражається формулою:

$$U^* + U^\circ =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_a^b(\sigma_r^*\varepsilon_r^* + \sigma_\theta^*\varepsilon_\theta^* + \sigma_z^*\varepsilon_z^*)rdrd\theta dz +$$
$$+\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_a^b(\sigma_r^\circ\varepsilon_r^\circ + \sigma_\theta^\circ\varepsilon_\theta^\circ + \sigma_z^\circ\varepsilon_z^\circ)rdrd\theta dz.$$

Враховуючи вирази для напружень та деформацій волокна при поздовжньому розтягненні, а також вирази для коефіцієнтів A, B та C, знайдені з крайових умов, отримуємо наступний вираз для суми пружних енергій деформації матриці та волокна:

$$U^* + U^\circ = \frac{\pi h a^2(\sigma_0)^2}{2E_1^\circ(1-\nu_{23}^\circ)}\times$$
$$\times\frac{1}{(d_1-d_2)^2\left(d^\circ + f(d^*-d^\circ)\right)^2}\times$$
$$\times\Big(\big(((d_1-d_2)^2(1-\nu_{23}^\circ) - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ d_1\times$$
$$\times(d_1-2d_2)\big)(d^*)^2 -$$
$$-4\nu_{21}^\circ E_1^\circ d_1 d_2\frac{\nu_{12}^*}{E_1^*}d^*d^\circ +$$
$$+2E_1^\circ E_2^\circ(d_1)^2\frac{\nu_{12}^*\nu_{12}^*}{E_1^*E_1^*}(d^\circ)^2\Big) +$$
$$+\frac{\pi h(\sigma_0)^2(b^2-a^2)}{E_1^*\left(d^\circ+f(d^*-d^\circ)\right)^2(d_1-d_2)^2}\times$$
$$\times\left(\left(\left(\frac{(d_1-d_2)}{2} + 2\nu_{21}^*\nu_{12}^* f E_2^\circ\right)(d_1-d_2) +\right.\right.$$
$$+\nu_{21}^*\nu_{12}^* f E_2^\circ d_2)\times(d^\circ)^2 +$$
$$+f\nu_{21}^\circ\nu_{21}^\circ E_2^* E_1^*(f(1-\nu_{23}^*) +$$
$$+(1+\nu_{23}^*))(d^*)^2 -$$
$$-2E_2^* f\nu_{21}^\circ\nu_{12}^* d_1 d^* d^\circ). \qquad (2)$$

Вираз для пружної енергії деформації однорідного композита набуває вигляду:

$$U =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_a^b (\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \sigma_z\varepsilon_z) r dr d\theta dz =$$
$$= \frac{\pi h b^2}{2}\frac{(\sigma_0)^2}{E_1}. \qquad (3)$$

На основі енергетичної умови узгодження з рівності (1) матимемо:

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{\left(d^\circ + f(d^* - d^\circ)\right)^2}\left(\frac{(1-f)}{E_1^*}\times\right.$$
$$\times\left(1 + \frac{2\nu_{21}^*\nu_{12}^* f E_2^\circ}{d_1 - d_2}\right)(d^\circ)^2 +$$
$$+\frac{f}{E_1^\circ}\left(1 + \frac{2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ E_2^*(1-f)}{d_1 - d_2}\right)(d^*)^2 -$$
$$\left.-\frac{4\nu_{21}^* f \nu_{21}^\circ(1-f)}{d_1 - d_2} d^* d^\circ\right). \qquad (4)$$

У цих рівностях

$$d^\circ = (E_2^*(f-1)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) -$$
$$-E_2^\circ\left(f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^*) + (1 + \nu_{23}^*)\right)\Big)/E_1^\circ,$$
$$d^* = (E_2^*(f-1)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^\circ) -$$
$$-E_2^\circ\left(f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*) + (1 + \nu_{23}^*)\right)\Big)/E_1^*,$$
$$d_1 = (1-f)^3\times$$
$$\times\frac{(\nu_{21}^*)^2\nu_{12}^\circ(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)(1 - \nu_{23}^\circ)}{E_1^\circ\nu_{12}^*},$$
$$d_2 = \nu_{21}^*(1-f)^2\times$$
$$\times(\nu_{21}^\circ(f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^*) + 1 + \nu_{23}^*)\times$$
$$\times(1 - \nu_{23}^\circ) + f\frac{\nu_{21}^*\nu_{12}^\circ}{\nu_{12}^*}\times$$
$$\times(1 - \nu_{23}^\circ)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^\circ) -$$
$$-(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)\nu_{21}^\circ\times$$
$$\times(\nu_{23}^*(f-1) - 1 - f)\Big),$$
$$d_3 = \nu_{21}^*(f-1)f(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^\circ)\times$$
$$\times\nu_{21}^\circ E_1^\circ(\nu_{23}^*(f-1) - 1 - f) - (\nu_{21}^\circ)^2\times$$
$$\times\frac{\nu_{12}^*}{\nu_{12}^\circ}E_1^\circ(\nu_{23}^*(f-1) - 1 - f)\times$$
$$\times(f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^*) + 1 + \nu_{23}^*)\times$$
$$\times(1-f) - f\nu_{21}^\circ E_1^\circ\times$$
$$\times(f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*) + 1 + \nu_{23}^*)\times$$
$$\times\nu_{21}^*(f-1)(1 - \nu_{23}^\circ),$$
$$d_4 = f(\nu_{21}^\circ)^2(E_1^\circ)^2\nu_{12}^*\times$$
$$\times(f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*) + 1 + \nu_{23}^*)\times$$
$$\times(\nu_{23}^*(f-1) - 1 - f),$$
$$d_5 =$$
$$= \frac{(\nu_{21}^*)^2\nu_{12}^\circ(f-1)^2(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ)(1 - \nu_{23}^\circ)}{E_1^\circ\nu_{12}^*},$$
$$d_6 = \nu_{21}^*(f-1)(1 - \nu_{23}^0)\times$$
$$\times\nu_{21}^\circ(f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) + 1 + \nu_{23}^*) +$$
$$+\nu_{21}^\circ\left(1 + \nu_{23}^* + f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*)\right)\times$$
$$\times\nu_{21}^*(f-1)(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ) +$$
$$+2f(\nu_{21}^\circ)^2\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ(f-1)\times$$
$$\times(1 - \nu_{23}^\circ - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^\circ),$$
$$d_7 = \frac{(\nu_{21}^\circ)^2\nu_{12}^* E_1^\circ}{\nu_{12}^\circ}\times$$
$$\times\left(1 + \nu_{23}^* + f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*)\right)\times$$
$$\times(f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^\circ) + 1 + \nu_{23}^*) +$$
$$+2(\nu_{21}^\circ)^2 E_1^\circ\nu_{12}^*\nu_{21}^*\times$$
$$\times\left(1 + \nu_{23}^* + f(1 - \nu_{23}^* - 2\nu_{21}^*\nu_{12}^*)\right).$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення ефективного поздовжнього модуля пружності для пружного композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними пружними матрицею та волокном у вигляді:

$$E_1 = \frac{d_1(E_1^*)^3 + d_2(E_1^*)^2 + d_3 E_1^* - d_4}{d_5(E_1^*)^2 - d_6 E_1^* + d_7}. \qquad (5)$$

Для знаходження параметрів ефективного інтегрального оператора поздовжнього модуля пружності в'язкопружного композита замінимо в отриманому виразі для E_1 пружні сталі зображеннями відповідних інтегральних операторів при перетворенні Лапласа. Зображення інтегрального оператора $\bar{E}_1$ та $\bar{E}_1^*$ мають вигляд:

$$\bar{E}_1 \div E_1\left(1 - \tilde{R}\right), \bar{E}_1^* \div E_1^*\left(1 - \tilde{R}^*\right), \qquad (6)$$

де E_1 та E_1^* – миттєві модулі пружності відповідно для однорідного композита та матриці, $\tilde{R}$ та $\tilde{R}^*$ – зображення відповідних ядер релаксації. Отже, отримуємо:

$$E_1\left(1 - \tilde{R}\right) =$$
$$= \frac{1}{d_5\left(E_1^*\left(1 - \tilde{R}^*\right)\right)^2 - d_6 E_1^*\left(1 - \tilde{R}^*\right) + d_7}\times$$
$$\times\left(d_1\left(E_1^*\left(1 - \tilde{R}^*\right)\right)^3 + d_2\left(E_1^*\left(1 - \tilde{R}^*\right)\right)^2 +\right.$$
$$\left.+d_3 E_1^*\left(1 - \tilde{R}^*\right) - d_4\right). \qquad (7)$$

З останньої рівності знаходимо вираз для зображення ядра релаксації:

$$\tilde{R} = 1 - \frac{1}{E_1} \times$$

$$\times \frac{1}{d_5 \left(E_1^*\left(1-\tilde{R}^*\right)\right)^2 - d_6 E_1^*\left(1-\tilde{R}^*\right) + d_7} \times$$

$$\times \left(d_1 \left(E_1^*\left(1-\tilde{R}^*\right)\right)^3 + d_2 \left(E_1^*\left(1-\tilde{R}^*\right)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + d_3 E_1^*\left(1-\tilde{R}^*\right) - d_4\right). \qquad (8)$$

4. Гомогенізація композита при поздовжньому зсуві

Застосуємо енергетичний критерій узгодження до гомогенізації в'язкопружного транстропного композита в умовах чистого поздовжнього зсуву. Розглянемо спочатку задачу про сумісний чистий поздовжній зсув ідеально пружних матриці та волокна. Його отримуємо, приклавши до зовнішньої циліндричної поверхні елементарної комірки навантаження, що створює там дотичне напруження

$$\tau_{zr}(b,\theta) = \sigma_0 \cos\theta.$$

Умови неперервності переміщень та напружень на поверхні контакту матриці та волокна $r = a$ мають вигляд:

$$\sigma_{zr}^{\circ}(t,\theta) = \sigma_{zr}^*(t,a,\theta),$$
$$u_z^{\circ}(t,a,\theta) = u_z^*(t,a,\theta).$$

Розв'язуючи цю задачу, отримаємо наступні співвідношення для ненульових компонент напружено-деформованого стану матриці при сумісному поздовжньому зсуві матриці та волокна:

$$u_z^*(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*\left(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)\right)} \times$$
$$\times \left(-(G_{12}^* + G_{12}^{\circ})r + \frac{a^2(G_{12}^{\circ} - G_{12}^*)}{r}\right) \cos\theta,$$

$$\gamma_{\theta z}^*(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*\left(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)\right)} \times$$
$$\times \left(G_{12}^* + G_{12}^{\circ} - \frac{a^2(G_{12}^{\circ} - G_{12}^*)}{r^2}\right) \sin\theta,$$

$$\gamma_{zr}^*(r,\theta) = \frac{-\sigma_0}{G_{12}^*\left(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)\right)} \times$$
$$\times \left(G_{12}^* + G_{12}^{\circ} + \frac{a^2(G_{12}^{\circ} - G_{12}^*)}{r^2}\right) \cos\theta,$$

$$\sigma_{zr}^*(r,\theta) = \frac{-\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)} \times$$
$$\times \left(G_{12}^* + G_{12}^{\circ} + \frac{a^2(G_{12}^{\circ} - G_{12}^*)}{r^2}\right) \cos\theta,$$

$$\sigma_{z\theta}^*(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)} \times$$
$$\times \left(G_{12}^* + G_{12}^{\circ} - \frac{a^2(G_{12}^{\circ} - G_{12}^*)}{r^2}\right) \sin\theta.$$

Основні співвідношення для зображень ненульових компонент напружено-деформованого стану волокна при сумісному поздовжньому зсуві мають вигляд:

$$u_z^{\circ}(r,\theta) = \frac{-2\sigma_0 r \cos\theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)},$$

$$\gamma_{\theta z}^{\circ}(\theta) = \frac{2\sigma_0 \sin\theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)},$$

$$\gamma_{zr}^{\circ}(\theta) = \frac{-2\sigma_0 \cos\theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)},$$

$$\sigma_{zr}^{\circ}(\theta) = \frac{-2\sigma_0 G_{12}^{\circ} \cos\theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)},$$

$$\sigma_{z\theta}^{\circ}(\theta) = \frac{2\sigma_0 G_{12}^{\circ} \sin\theta}{G_{12}^*(f-1) - G_{12}^{\circ}(f+1)}.$$

Розв'язки аналогічної задачі про чистий поздовжній зсув для транстропного в'язкопружного однорідного матеріалу, що моделює композит, мають вигляд:

$$u_z(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} r \cos\theta,$$

$$\gamma_{\theta z}(r,\theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} \sin\theta,$$

$$\gamma_{zr}(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} \cos\theta,$$

$$\sigma_{zr}(r,\theta) = \frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \cos\theta,$$

$$\sigma_{z\theta}(r,\theta) = -\frac{\sigma_0}{G_{12}} G_{12} \sin\theta.$$

Згідно з енергетичним критерієм, сума величин енергії пружного деформування при сумісному поздовжньому зсуві матриці та волокна дорівнює енергії пружного деформування елементарної комірки однорідного композита при поздовжньому зсуві. Маємо наступну рівність:

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\tau_{z\theta}^* \gamma_{z\theta}^* + \tau_{zr}^* \gamma_{zr}^*) r dr d\theta dz +$$
$$+ \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\tau_{zr}^{\circ} \gamma_{zr}^{\circ} + \tau_{z\theta}^{\circ} \gamma_{z\theta}^{\circ}) r dr d\theta dz =$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\tau_{z\theta}\gamma_{z\theta} + \tau_{zr}\gamma_{zr}) r dr d\theta dz. \quad (9)$$

Підставивши сюди вирази для напружень та деформацій матриці, волокна та однорідного композита, отримуємо наступну рівність:

Звідси знаходимо:

$$\frac{b^2(\sigma_0)^2}{G_{12}^*\left(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)^2} \times$$
$$\times \left(\left(G_{12}^* + G_{12}^\circ\right)^2(1-f) + \right.$$
$$\left. + f\left(G_{12}^\circ - G_{12}^*\right)^2(1-f)\right) +$$
$$+ \frac{4a^2 G_{12}^\circ(\sigma_0)^2}{\left(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)^2} = \frac{b^2(\sigma_0)^2}{G_{12}}.$$

Для переходу до розв'язку задачі про гомогенізацію в'язкопружного композита в умовах поздовжнього зсуву замінимо пружні сталі G_{12} та G_{12}^* на зображення відповідних інтегральних операторів при перетворенні Лапласа. Отримуємо:

$$\frac{1}{\tilde{G}_{12}} =$$
$$= \frac{\left(\tilde{G}_{12}^*\right)^2 + 2\tilde{G}_{12}^* G_{12}^\circ + \left(G_{12}^\circ\right)^2 - f^2\left(\tilde{G}_{12}^*\right)^2}{\tilde{G}_{12}^*\left(\tilde{G}_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)^2} +$$
$$+ \frac{2f^2 G_{12}^* G_{12}^\circ - f^2\left(G_{12}^\circ\right)^2}{G_{12}^*\left(G_{12}^*(f-1) - G_{12}^\circ(f+1)\right)^2}.$$

Звідси після спрощення знаходимо вираз для зображення інтегрального оператора, що описує модуль зсуву:

$$\tilde{G}_{12} = \frac{\tilde{G}_{12}^*\left(G_{12}^\circ(1+f) + \tilde{G}_{12}^*(1-f)\right)}{(1-f)G_{12}^\circ + (1+f)\tilde{G}_{12}^*}. \quad (10)$$

Знайдемо ядро релаксації $R(t)$. Для цього з рівняння (10), враховуючи, що $\tilde{G}_{12} = G_{12}\left(1 - \tilde{R}(p)\right)$, знайдемо зображення $\tilde{R}(p)$:

$$\tilde{R}(p) = \frac{C_1(x^*)^2 + C_2 x^* + C_3}{C_4(x^* + C_5)}. \quad (11)$$

Тут $x^* = 1 - \tilde{R}^*(p)$, коефіцієнти C_i, $i = 1, \dots, 5$, набувають наступних значень:

$$C_1 = (f-1)\left(G_{12}^*\right)^2,$$
$$C_2 = G_{12}^*\left(G_{12} - G_{12}^\circ\right)(1+f),$$
$$C_3 = G_{12} \cdot G_{12}^\circ(1-f),$$
$$C_4 = G_{12} \cdot G_{12}^*(1+f),$$
$$C_5 = \frac{G_{12}^\circ(1-f)}{G_{12}^*(1+f)}.$$

5. Висновки

Виконане у даній роботі дослідження свідчить про те, що пропонований підхід до розв'язання задачі гомогенізації в'язкопружного композита дозволяє повністю визначити реологічні характеристики в'язкопружного трансверсально-ізотропного композита. Він полягає у застосуванні енергетичного критерію узгодження для визначення ефективних пружних модулів E_1 та G_{12} з подальшим отриманням ефективних в'язкопружних характеристик на основі застосування інтегрального перетворення Лапласа.

Значні труднощі при реалізації даного підходу викликає обернення перетворення Лапласа. Якщо використовується ядро релаксації матриці експоненціального типу, то зображенням ядра релаксації для ефективного поздовжнього модуля пружності є раціональна функція параметру перетворення і для знаходження оригіналу можна використати відомі точні алгоритми. Для більш складних ядер релаксації матеріалу матриці виникає потреба у наближеному оберненні перетворення Лапласа. Для переходу від пружного до в'язкопружного розв'язку задачі гомогенізації можна застосувати також принцип Вольтерра.

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямі пов'язані з вдосконаленням переходу від пружного до в'язкопружного розв'язку задачі, а також побудовою моделей гомогенізації, у яких операторними величинами є коефіцієнти Пуассона.

Література

1. Класторны М., Кондерла П., Пиекарский Р. Точная теория жесткости однонаправленных волокнисто-армированных композитов. *Механика композитных материалов*. 2009. Т. 45, № 1. С. 109–144.
2. Гребенюк С. Н. Определение упругих постоянных резинокордного материала при помощи энергетического критерия согласования. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць.* Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. Вип. 11. С. 79–86.
3. Максимов Р. Д., Плуме Э. З. Прогнозирование ползучести однонаправлено армированного пластика с термореологически простыми структурными компонентами. *Механика композитных материалов.* 1982. № 6. С. 1081–1089.
4. Зелин В. И., Янсон Ю. О. Определение ядер ползучести по результатам кратковременных испытаний. *Механика полимеров.* 1977. № 6. С. 972–975.
5. Максимов Р. Д., Плуме Э. З. Длительная ползучесть органопластика. *Механика композитных материалов.* 2001. № 4. С. 435–450.
6. Уржумцев Ю. С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. Москва: Наука, 1982. 222 с.
7. Куимова Е. В., Труфанов И. А. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами. *Вестник Самарского государственного университета.* 2009. № 4(70). С. 129–148.
8. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. *Прикладная механика.* 2005. Т. 41, № 5. С. 9–21.

References

1. Klastorny, M., Konderla, P. & Piekarskiy, R. (2009). An exact theory of rigidity unidirectional fiber-reinforced composites. Mechanics of Composite Materials. Vol. 45, No 1, pp. 109–144.
2. Grebenyuk, S. N. (2010). Determination of the elastic constants of the material with the help of rubber-energy criterion matching. Methods for applied problems solving of mechanics deformable bodies: Collected Works. Vol. 11, pp. 79–86.
3. Maksimov, R. D. & Plume, E. Z. (1982). Prediction of creep reinforced plastic with termoreological simple structural components. Mechanics of Composite Materials. No 6, pp. 1081–1089.
4. Zelin, V. I. & Yanson, Yu. O. (1977). Definition of nuclei as a result of short-term creep tests. Mechanics of polymers. No 6, pp. 972–975.
5. Maksimov, R. D. & Plume, E. Z. (2001). Long-term creep organoplastic. Mechanics of Composite Materials. No 4, pp. 435–450.
6. Urzhumtsev, Yu. S. (1982). Prediction of long-term resistance of polymeric materials. Moscow: Nauka.
7. Kuimova, E. V. & Trufanov, I. A. (2009). Numerical prediction of effective thermoviscoelastic characteristics of unidirectional fiber composite with viscoelastic components. Bulletin of the Samara State University. No 4(70), pp. 129–148.
8. Kaminskiy, A. A. & Selivanov, M. F. (2005). On a method for determining the characteristics of viscoelastic deformation of composites. Journal of Applied Mechanics. Vol. 41, No 5, pp. 9–21.