

УДК 517.925

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-03

## ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ГІДРОІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛІНІЙНИМ ПРУЖНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

**В. Г. Городецький**

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»  
v.gorodetskyi@ukr.net

**Ключові слова:**

одномасова модель, система диференціальних рівнянь, зовнішня дія, коефіцієнт дисипації, періодична функція.

У роботі проведено дослідження динамічних характеристик одномасової моделі гідравлічної імпульсної системи на прикладі гідравлічного молота з реальними параметрами. При проектуванні таких систем важливо прогнозувати характер коливальних процесів, які, своєю чергою, впливають на характеристики обладнання, такі як ефективність, шум, вібрація тощо.

На початкових етапах дослідження та проектування одномасової моделі можуть бути досить ефективними для деяких видів обладнання. Досліджувана модель являє собою неавтономну систему звичайних диференціальних рівнянь із синусоїдальною зовнішньою дією в одному з рівнянь. Дослідження виявило залежність режимів роботи молота від значень параметрів його математичної моделі. Виявлено, що за номінальних параметрів гідроімпульсна система працює в майже періодичному режимі, коли вищі гармоніки коливань не є кратними основній гармонічній складовій. При збільшенні коефіцієнта дисипації пристрій демонструє періодичну динаміку. При цьому частота коливань у системі співпадає з частотою зовнішньої дії. При зменшенні коефіцієнта дисипації спостерігається біфуркація подвоєння періоду. Також важливою особливістю цієї системи є можливість режиму детермінованого хаосу при певних значеннях коефіцієнта дисипації. Як показало дослідження, коли значення зведеної маси змінюється, система працює в періодичному режимі або в режимі подвоєння періоду коливань. Також при цьому можливий майже періодичний режим. Крім цього, дослідженням встановлено, що підвищення нелінійної жорсткості змушує систему працювати в періодичному режимі.

Всі спостережувані особливості системи проілюстровані часовими залежностями змінних, фазовими портретами та спектрами, які дають наочне уявлення про поведінку гідромолота. Врахування всіх згаданих рис моделі може бути корисним при проектуванні гідроімпульсних систем та виборі режимів їх експлуатації.

---

## INVESTIGATION OF A HYDRO-IMPULSE SYSTEM WITH A NONLINEAR SPRING ELEMENT

**V. G. Gorodetskyi**

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"  
v.gorodetskyi@ukr.net

**Key words:**

single-mass model, system of differential equations, external action, dissipation coefficient, periodic function.

We investigated the dynamic characteristics of a single-mass model of a hydraulic pulse system using the example of a hydraulic hammer with real parameters. When designing such systems, it is important to forecast the nature of the oscillation processes, which in turn affect equipment characteristics such as efficiency, noise and vibration, and more. In the initial stages of research and design, single-mass models may be sufficiently effective for some types of equipment.

The model is a non-autonomous system of ordinary differential equations with a sinusoidal external action in one of the equations. The study revealed the dependence of the modes of operation of the hammer on the values of the parameters of its mathematical model. It is revealed that at

nominal parameters the hydro-impulse system operates in almost-periodic mode, when the higher harmonics of oscillations are not multiples of the basic harmonic component. When the coefficient of dissipation increases, the dynamics of the device is periodic, when the frequency of oscillations in the system coincides with the frequency of external action. When the coefficient of dissipation is reduced, bifurcation of the doubling of the period is observed. Also, an important feature of this system is the possibility of a mode of deterministic chaos at certain values of the coefficient of dissipation. As the study showed, when the value of the consolidated mass changes, the system operates in periodic mode or in double period mode, or it operates in almost periodic mode. Also, studies have found that increasing nonlinear stiffness causes the system to operate periodically.

All these features of the system are illustrated by the time series of the variables, phase portraits and spectra, which give a clear representation of the behavior of the hydro hammer. The above mentioned characteristics of the model can be useful for the design of hydro-pulse systems and for the choice of modes of their operation.

### Вступ та постановка задачі

Задача побудови моделі для фізичних систем різної природи є поширеною і актуальною в багатьох галузях науки та техніки [1]. Окремий клас таких задач пов'язаний з моделюванням неавтономних систем, тобто систем із зовнішньою дією [2,3]. Дуже поширені об'єкти, в яких зовнішня дія має періодичний характер [4]. Особливо актуальною така задача є для інженерних систем. Зокрема, побудова адекватних моделей гідроімпульсних систем сприяє їх вдосконаленню, вибору оптимальних режимів роботи, більш ефективній експлуатації [5]. В процесі проектування таких систем важливо передбачити характер коливальних процесів, які, своєю чергою, впливають на такі характеристики обладнання, як коефіцієнт корисної дії, рівень шуму та вібрації та інші. На початкових етапах дослідження та проектування достатньо ефективними для деяких типів обладнання можуть бути одномасові моделі [6, 7].

В даній роботі здійснено дослідження впливу параметрів моделі у вигляді неавто-

номної системи звичайних диференціальних рівнянь на динамічні характеристики гідроімпульсних систем.

### Метод розв'язання та аналіз одержаних результатів

Розглянемо одномасову модель гідромолота [6], побудовану на основі принципу Даламбера:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + C(x)x = F(t), \quad (1)$$

де  $m$  – зведена маса гідромолота,  $b$  – коефіцієнт затухання,  $C(x)$  – нелінійна жорсткість,  $F(t)$  – сила зовнішньої дії. Розглянемо випадок, коли  $C(x) = c_0 + c_1x^2$ , де  $c_0$ ,  $c_1$  – сталі, а  $F(t) = P \sin(\omega t + \varphi_0)$ , де  $P$  – амплітуда,  $\omega$  – кругова частота коливань,  $\varphi_0$  – початкова фаза.

Дане дослідження передбачає вибір параметрів моделі, які відповідають реальному гідромолоту ГПМ-35 і рекомендовані в [6]. Ці величини наведені в таблиці 1.

Таблиця 1. Параметри гідромолота ГПМ-35

Параметри	Маса $m, \text{кг}$	Жорсткість		Коефіцієнт затухання $b, \text{Нс/м}$	Кругова частота $\omega, \text{рад/с}$	Амплітуда сили $P, \text{Н}$
		$c_0, \text{Н/м}$	$c_1, \text{Н/м}^3$			
Значення	65	$1,5 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^7$	520	31,416	$3,595 \cdot 10^4$

Для аналізу моделі перетворимо рівняння (1) у систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{C(x_1)}{m}x_1 + \frac{F(t)}{m}, \end{cases} \quad (2)$$

де  $x_1 = x$ . Система (2) була розв’язана методом Рунге-Кутта 4-го порядку на часовому інтервалі 5 с з кроком  $5 \cdot 10^{-6}$  с. Аналіз отриманих розв’язків відбувався після закінчення перехідного процесу. Розв’язки системи (2) представлені на рис. 1, а її фазовий портрет – на рис. 2.

Як видно з рис. 2, коливання в системі (2) не є точно періодичними. Для уточнення їх характеру були отримані розкладення в ряд Фур’є кривих з рис. 1. Спектри для обох змінних наведені на рис. 3. Через  $A_1$  та  $A_2$  позначені амплітуди гармонік розкладення в ряд Фур’є функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  відповідно;  $f$  – частота. На основі рис. 3 можна зробити висновок, що наведені криві можна віднести до майже-періодичного типу [3], оскільки частоти деяких вищих гармонік не є кратними основній складовій спектра – 5 Гц.

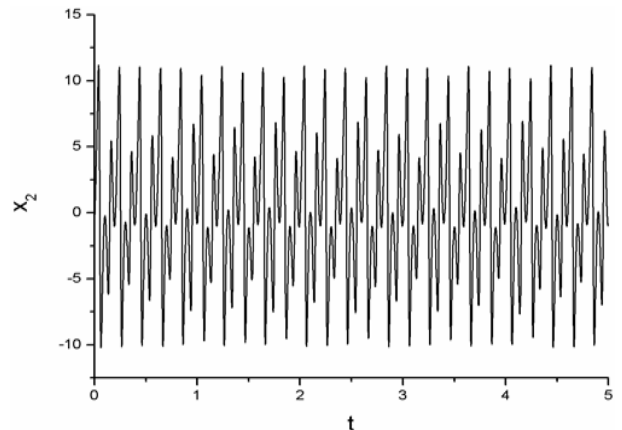
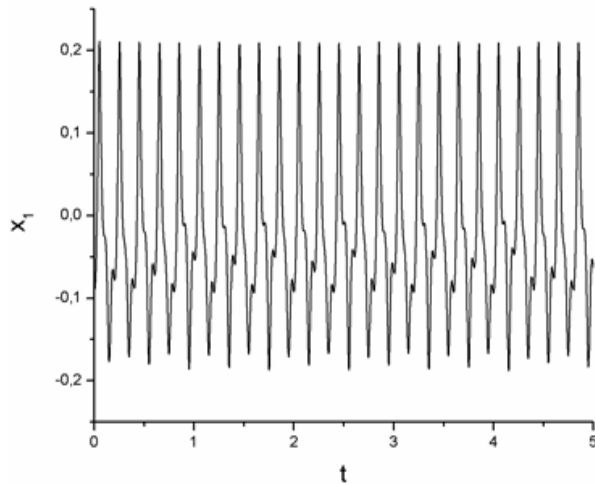


Рис. 1. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідромолота в усталеному режимі

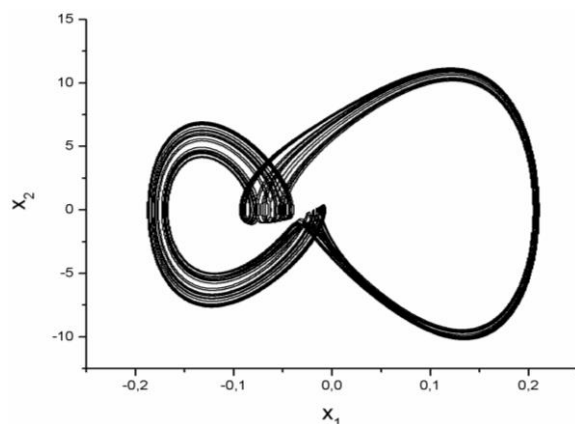


Рис. 2. Фазовий портрет системи (2)

Було проведено дослідження з метою виявлення можливих змін режимів функціонування модельованого пристрою в залежності від коефіцієнта затухання  $b$ . Його величина змінювалась в межах 800...10. З’ясувалось, що при найбільшому затуханні з наведеного діапазону ( $b = 800$ ) модель працює в режимі періодичних коливань, які проілюстровані на рис. 4-6. При цьому частота цих коливань співпадає з частотою зовнішньої дії.

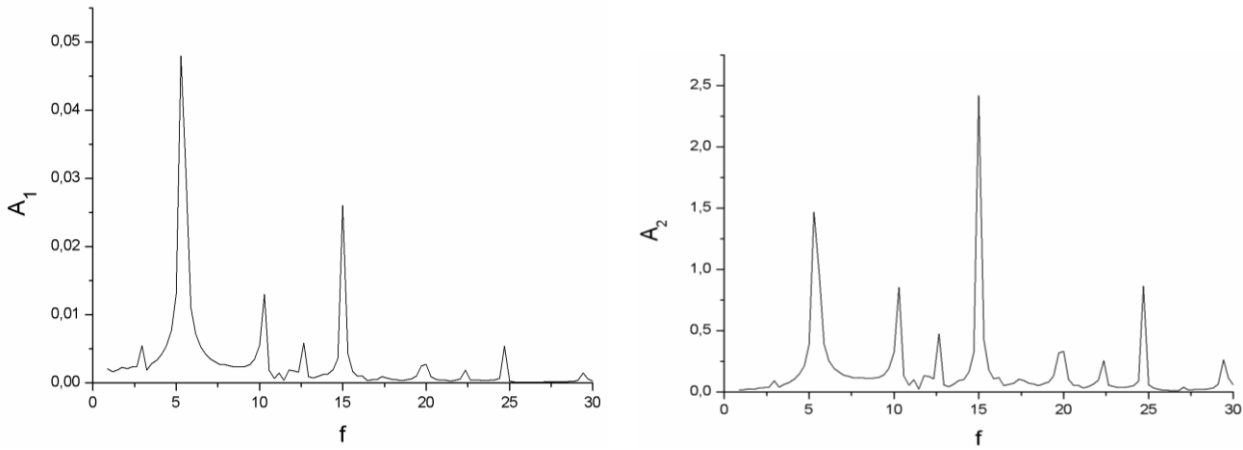


Рис. 3. Спектри функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$

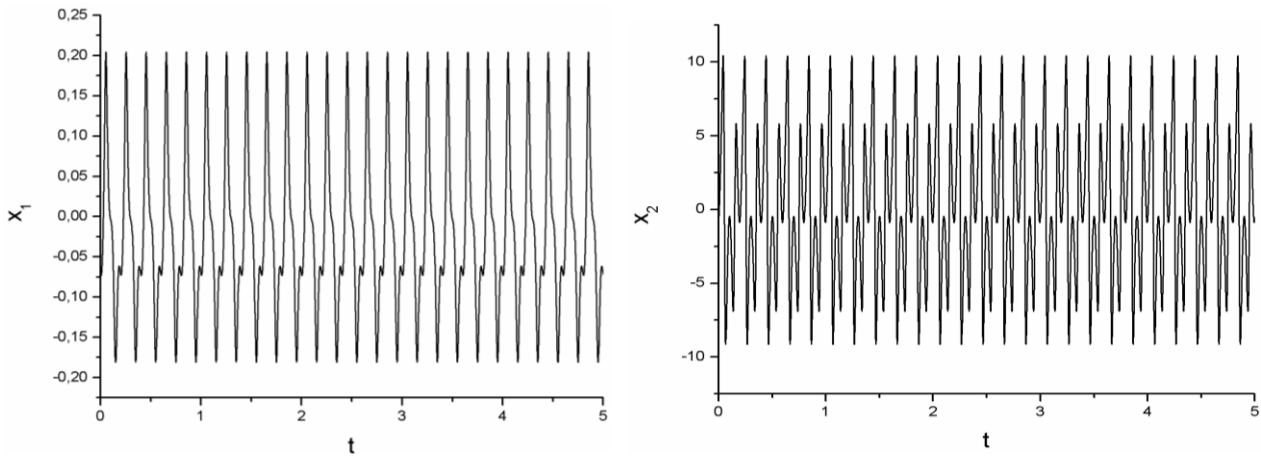


Рис. 4. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідромолота в усталеному режимі при  $b = 800$

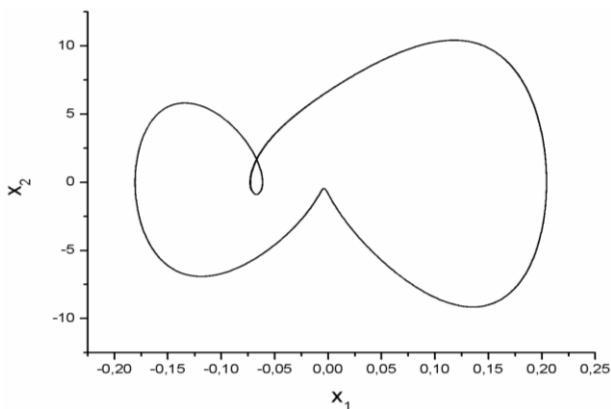


Рис. 5. Фазовий портрет системи (2) при  $b = 800$

При подальшому зменшенні коефіцієнта дисипації при  $b < 680$  спостерігається біфуркація подвоєння періоду [9, с. 173]. Це явище проілюстровано на рис. 7-9. Зокрема, на спектрі  $A_1(f)$  з'являється невеликий пік на позначці 2,5 герц.

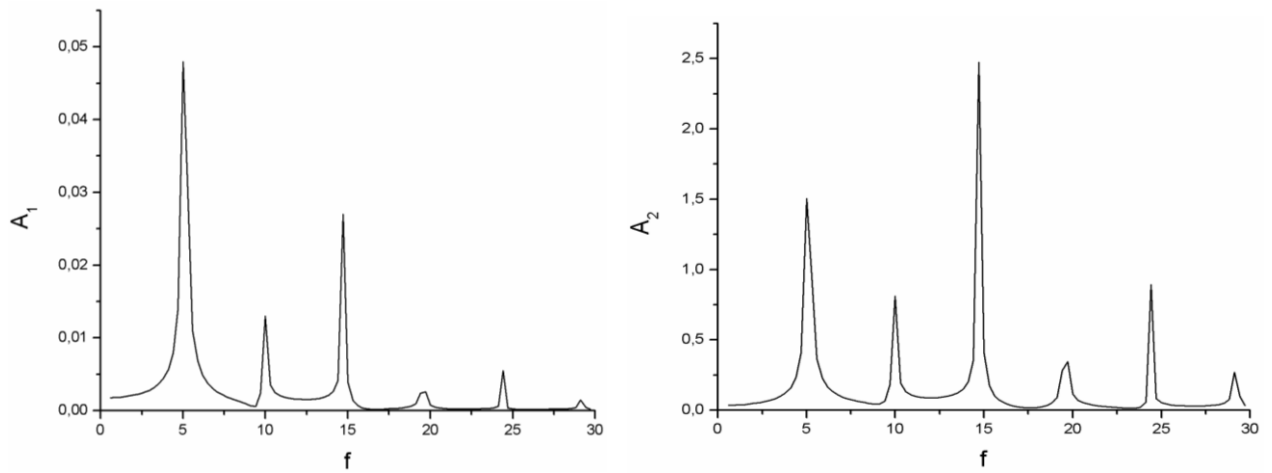


Рис. 6. Спектри функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  при  $b = 800$

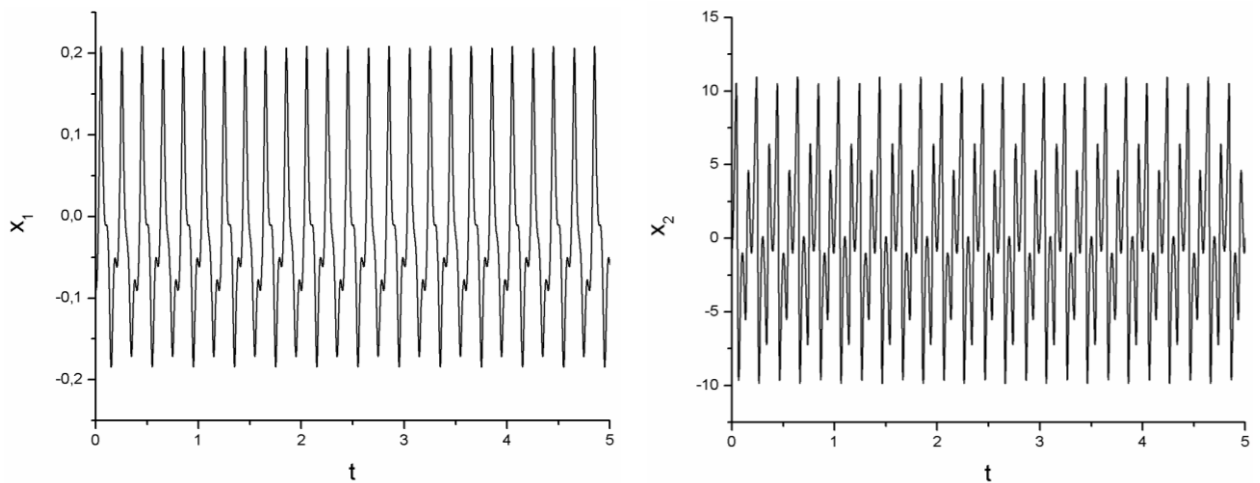


Рис. 7. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідрометала в усталеному режимі при  $b = 585$

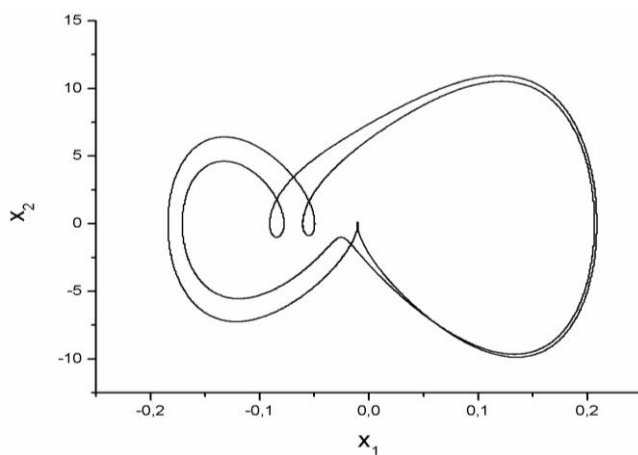
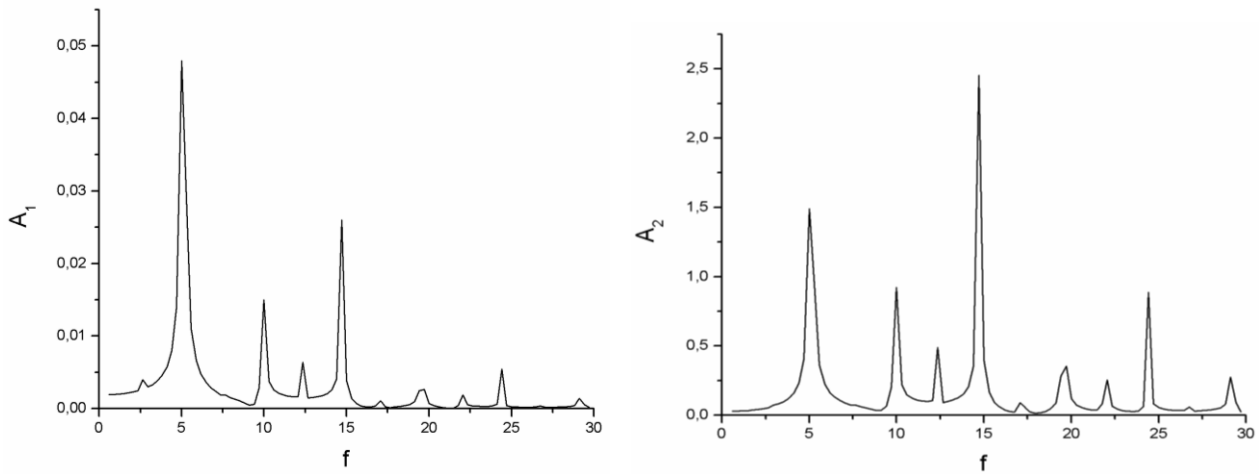
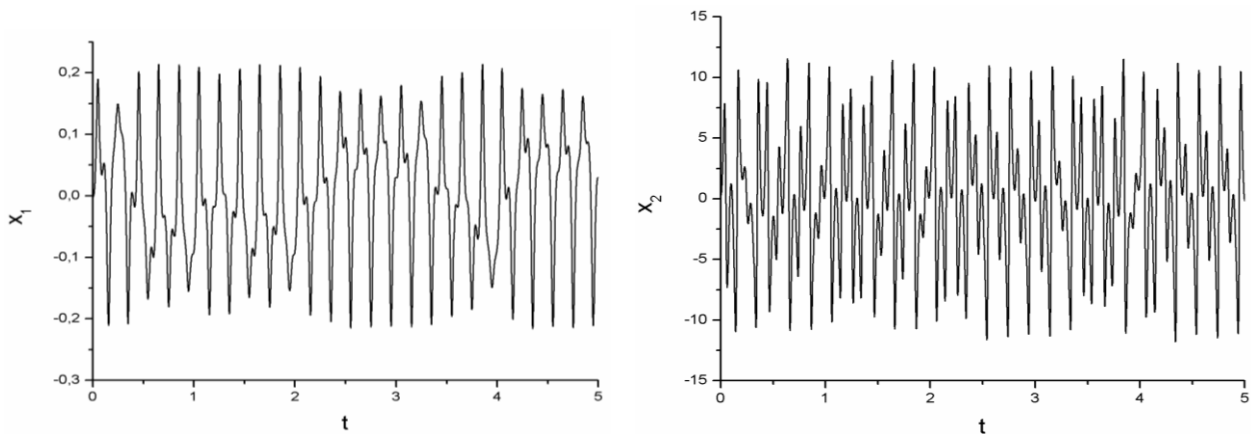
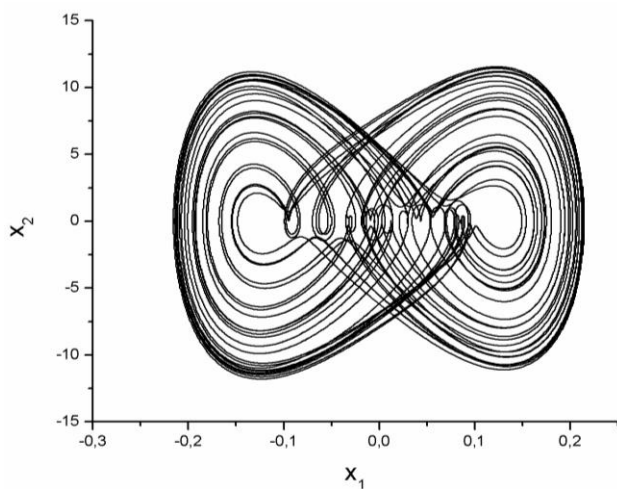


Рис. 8. Фазовий портрет системи (2) при  $b = 585$

При досягненні значень  $b < 450$  криві набувають ознак хаотичного режиму [10-13]. Про це свідчить вигляд функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$ , фазового портрета та спектрів, рис. 10-12. Останні мають суцільні ділянки, типові для хаотичних систем. Така динаміка системи зберігається у всій нижній частині діапазону зміни досліджуваного параметра, тобто до  $b = 10$ .

Рис. 9. Спектри функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  при  $b = 585$ Рис. 10. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідромолота в усталеному режимі при  $b = 300$ Рис. 11. Фазовий портрет системи (2) при  $b = 300$ 

Також було досліджено вплив зміни маси на роботу гідросистеми. Виявилось, що в діапазоні змін маси від 10 до 100 кг (інші параметри мають значення з табл. 1) система функціонує переважно в періодичному режимі. Більш детально приблизні діапазони режимів наведені в таблиці 2.

На рис. 13 та 14 наведені фазові портрети системи (2) для випадку  $m = 50$  та  $m = 80$  відповідно.

Також до періодичного режиму приводить використання підвищеної жорсткості. Цей факт проілюстровано на рис. 15 для випадку  $c_1 = 1,5 \cdot 10^8$ .

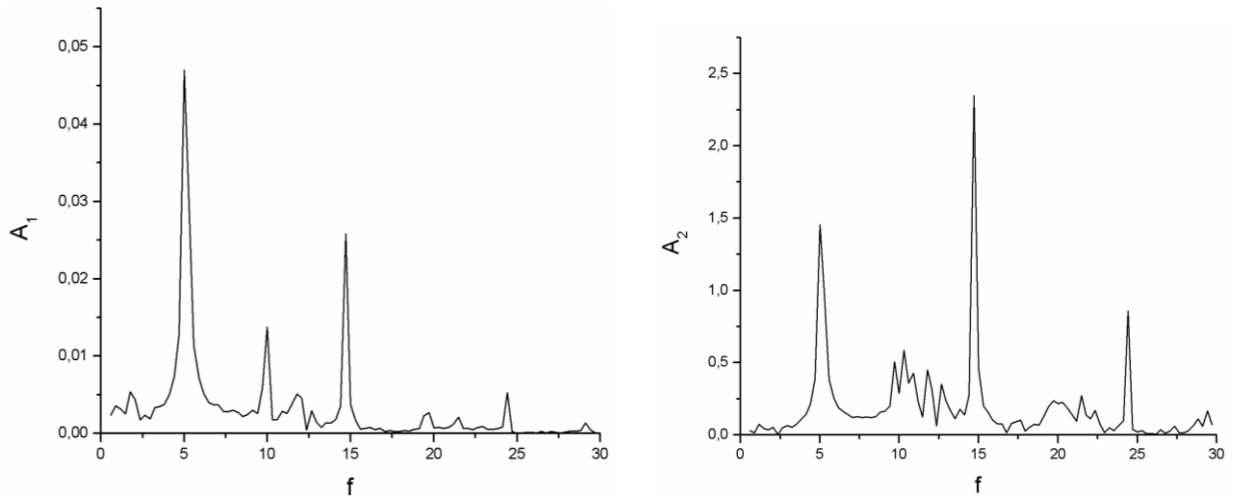


Рис. 12. Спектри функцій  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  при  $b = 300$

Таблиця 2. Зміна режимів гідросистеми при зміні маси

Діапазон значень $m$	10-55	55-70	70-90	90-100
Режим	Періодичний	Майже періодичний	Подвоєння періоду	Періодичний

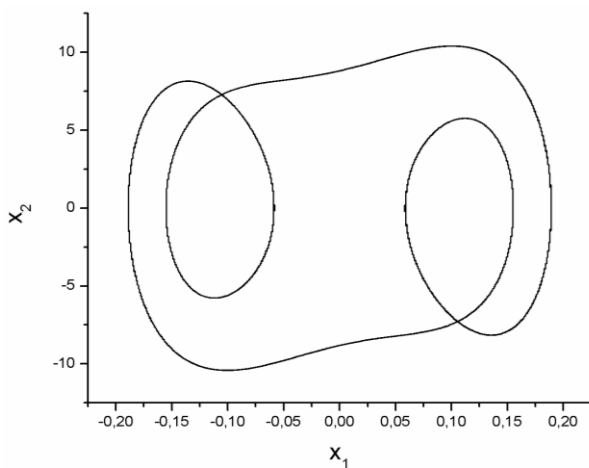


Рис. 13. Фазовий портрет системи (2) при  $m = 50$

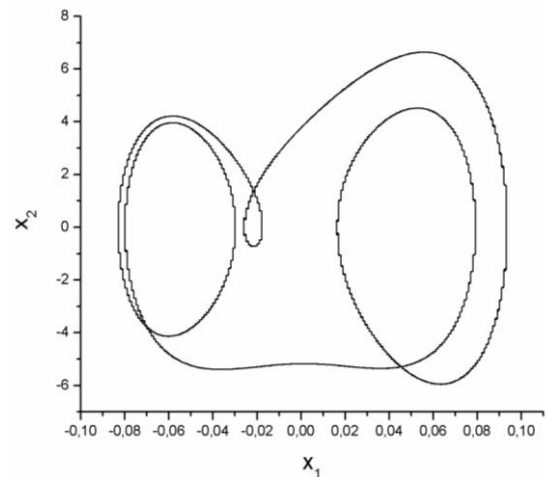


Рис. 15. Фазовий портрет системи (2) при  $c_1 = 1,5 \cdot 10^8$

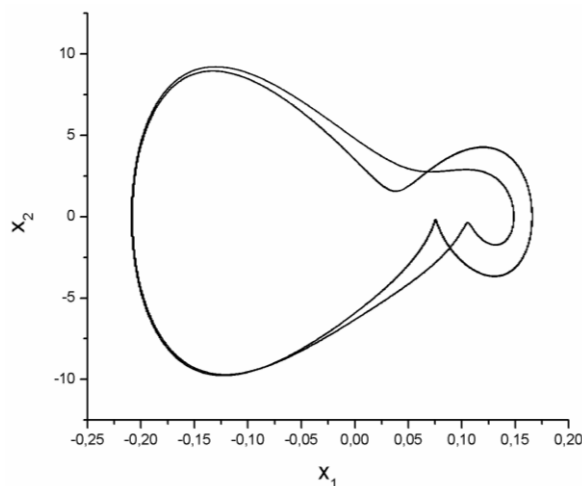


Рис. 14. Фазовий портрет системи (2) при  $m = 80$

### Висновки

В дослідженні виявлено залежність режимів роботи гідромолота від значень параметрів його математичної моделі. Виявлено, що при номінальних параметрах гідроімпульсна система працює в майже-періодичному режимі, коли вищі гармоніки коливань не є кратними основній гармонічній складовій.

При збільшенні коефіцієнта дисипації динаміка пристрою – періодична. При цьому частота коливань зведеної маси співпа-

дає з частотою зовнішньої дії. Але при зниженні коефіцієнта дисипації при  $b < 680$  спостерігається біфуркація подвоєння періоду. Також важливою рисою даної системи є можливість виникнення режиму детермінованого хаосу при певних значеннях коефіцієнта дисипації.

При зміні значень зведеної маси  $m$ , як показало дослідження, система функціонує в періодичному режимі (в тому числі і з

подвійним періодом), а також – в майже-періодичному. Також, в ході досліджень з'ясовано, що підвищення нелінійної жорсткості приводить до функціонування системи в періодичному режимі.

Всі згадані особливості моделі можуть бути корисними при проектуванні гідроімпульсних систем та виборі режимів їх функціонування.

### Література

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. Москва: Наука, 1991. 432 с.
2. Martcheva Maia. A non-autonomous multi-strain SIS epidemic model. *Journal of Biological Dynamics*. 2009. Vol. 3, No. 2–3. P. 235–251.
3. Кременецкий И. А., Сальников Н. Н. Нестохастический подход к определению размерности и параметров линейных авторегрессионных моделей по результатам измерения входных и выходных переменных. *Проблемы управления и информатики*. 2010. № 1. С. 63–75.
4. Sauer T. Detection of periodic driving in nonautonomous difference equations. *Advanced Studies in Pure Mathematics*. 2009. Vol. 53. P. 301–309.
5. Сліденко В. М., Шевчук С. П., Замараєва О. В., Лістовщик Л. К. Адаптивне функціонування імпульсних виконавчих органів гірничих машин. Київ: НТУУ «КПІ», 2013. 180 с.
6. Сліденко В. М., Сліденко О. М. Математичне моделювання ударно-хвильових процесів гідроімпульсних систем гірничих машин. Київ, 2017. 220 с.
7. Быховский И. И., Гольдштейн Б. Г. Основы конструирования вибробезопасных ручных машин. Москва: Машиностроение, 1982. 224 с.
8. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. Москва: Гостехиздат, 1953. 396 с.
9. Мун Ф. Хаотические колебания. Москва: Мир, 1990. 312 с.
10. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 272 с.
11. Кузнецов С. П. Динамический хаос. Москва: Изд-во Физ.-мат. лит-ры, 2001. 296 с.
12. Shvets A. Yu., Makaseyev A. M. Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*. 2012. № 1. P. 195–204.
13. Shvets A. Yu., Sirenko V. O. Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*. 2012. № 2. P. 303–310.

### References

1. Ljung, L. (1991). Identification of systems. Theory for the user. Moscow: Science.
2. Martcheva, Maia (2009). A non-autonomous multi-strain SIS epidemic model. *Journal of Biological Dynamics*, Vol. 3, No. 2–3, pp. 235–251.
3. Kremenetsky, I. A. & Salnikov, N. N. (2010). A non-stochastic approach to determining the dimension and parameters of linear autoregressive models based on the measurement of input and output variables. *Problems of Control and Computer Science*, No. 1, pp. 63–75.
4. Sauer, T. (2009). Detection of periodic driving in nonautonomous difference equations. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. 53, pp. 301–309.



5. Slidenko, V. M., Shevchuk, S. P., Zamarayeva, O. V. & Listovschyk, L. K. (2013). Adaptive functions of impulsive viscous organs in mining machines. Kyiv: NTUU «KPI».
6. Slidenko, V. M. & Slidenko, O. M. (2017). Mathematical modeling of shock-wave processes of hydro-pulse systems of mining machines. Kyiv.
7. Bykhovsky, I. I. & Goldstein, B. G. (1982). Fundamentals of designing vibro-safe hand-held machines. Moscow: Mashinostroyeniye.
8. Levitan, B. M. (1953). Almost-periodic functions. Moscow: Gostehizdat.
9. Moon, F. (1990). Chaotic oscillations. Moscow: Mir.
10. Loskutov, A. Yu. & Mikhailov, A. S. (1990). Introduction to Synergetics. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.
11. Kuznetsov, S. P. (2001). Dynamic chaos. Moscow: Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoy literatury.
12. Shvets, A. Yu. & Makaseyev, A. M. (2012). Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, No. 1, pp. 195–204.
13. Shvets, A. Yu. & Sirenko, V. O. (2012). Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, No. 2, pp. 303–310.