

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-04

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ З УВІГНУТИМ ГОФРОВАНИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ

Я. М. Григоренко<sup>1</sup>, Л. С. Рожок<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

<sup>2</sup>Національний транспортний університет МОН України

ayagrigorenko@yandex.ua, r.l.s@ua.fm

### Ключові слова:

некругові порожнисті циліндри, увігнутий гофрований поперечний переріз, дискретні ряди Фур'є, метод дискретної ортогоналізації, локальне навантаження, напружений стан.

Розв'язання задачі про рівновагу порожнистих ізотропних некругових циліндрів при дії локального навантаження, дано в просторовій постановці за певних граничних умов на торцях. Поперечний переріз циліндрів, що розглядаються описаний рівняннями скороченої гіпоциклоїди. При цьому застосовуються: метод відокремлення змінних вздовж твірної та напрямної циліндра, метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Наводяться результати розрахунків у вигляді графіків розподілу полів переміщень та напружень.

## INVESTIGATION OF INFLUENCE OF LOCAL LOADING ON THE STRESSED STATE OF HOLLOW CYLINDERS WITH CONCAVE CORRUGATED CROSS SECTIONS

Ya. M. Grigorenko<sup>1</sup>, L. S. Rozhok<sup>2</sup>

<sup>1</sup>S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine,

<sup>2</sup>National transport university, MEC of Ukraine

ayagrigorenko@yandex.ua, r.l.s@ua.fm

### Key words:

noncircular hollow cylinders, concave semi-corrugations, discrete Fourier series, discrete-orthogonalization method, local loading, stress state

The paper considers solving the problem on equilibrium of noncircular hollow cylinders is performed in spatial formulation at certain boundary conditions at the ends. There were considered hollow cylinders which cross sections are concave semi-corrugations. The paper presents a non-traditional approach to solving boundary-value problems on stress state of spatial bodies. The approach is based on the reduction of two-dimensional problems to one-dimensional one using the discrete Fourier series. The two-dimensional problem contains the geometrical and mechanical parameters as the multipliers on solving functions what makes it impossible to separate variables. Introduction of additional functions, which include resolving functions, and their derivatives together with indicated multipliers, allows to reduce the problem to one-dimensional one through expansion of all the functions into the Fourier series in one coordinate direction. In integrating the one-dimensional boundary-value problem, the amplitude values of additional functions are determined through the Fourier series of functions which are specified at the discrete set of points. The one-dimensional boundary-value problem is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization. The results can be used for calculation of construction elements and details of machines of this type. The results of the paper can be used when selecting the cross section of the cylinders of a similar type.

## 1. Вступ

Значна кількість елементів конструкцій сучасної техніки, що виконана у вигляді оболонки різної товщини зі складною формою і структурою, знаходиться під дією розподілених та локальних навантажень. Дія локального навантаження на оболонки в динамічних та статичних задачах досліджувалась в роботах [1 – 3]. Широке застосування оболонкових елементів пояснюється бажанням задовольнити вимогам, які зумовлені складними умовами роботи машин, літальних та транспортних апаратів, різноманітних промислових та громадських споруд.

Розв'язання задачі про вплив локального навантаження на характеристики напружено-деформованого стану елементів конструкцій у вигляді оболонки, тобто коли розміри поверхні прикладання навантаження невеликі порівняно з загальними розмірами конструкції, пов'язане зі значними труднощами. В роботах [4, 5] при розв'язанні таких задач розглядалась задача про деформування оболонки під впливом зосередженого навантаження, розв'язок якої вдалося знайти із застосуванням асимптотичного методу. При цьому припускалось, що інформація, яку отримано в результаті розв'язання останньої задачі, може слугувати для певної оцінки напруженого стану оболонки при дії локального навантаження.

Якщо у випадку пластин розв'язок задачі при зосередженому навантаженні може бути порівняним з розв'язком задачі для локального навантаження, то у випадку оболонки таке співставлення дає лише наближену оцінку [4, 6]. Труднощі розв'язання задачі при локально розподілених на малій ділянці чи відрізьку лінії навантаження пов'язані з обчислювальною реалізацією побудованого розв'язку. В роботі [6] зазначено, що

Квадрат довжини лінійного елемента в обраній системі координат має вигляд

$$dS^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2(t, \gamma) dt^2 + H_3^2 d\gamma^2, \quad (1)$$

де  $H_1 = 1$ ;  $H_2 = 1 + \gamma/R_t$ ;  $H_3 = 1 -$  параметри Ламе,  $R_t$  – радіус кривизни поверхні відліку поперечного перерізу.

$$\sigma_s = u_t = u_\gamma = 0 \text{ при } s = 0; s = l. \quad (2)$$

Циліндри знаходяться під дією локального навантаження  $\mathbf{q}_\gamma = \mathbf{q}_\gamma(s, t)$ , прикладеного на частині зовнішньої бічної поверхні. Граничні умови мають вигляд:

розв'язання задачі про дію на оболонку зосередженої сили простіше, ніж розв'язання задачі про дію на оболонку локального навантаження, розподіленого на ділянці зі скінченими розмірами. Це можна пояснити тим фактом, що у випадку локального навантаження, якщо його задавати ступінчастою функцією, яке має розриви на границі ділянки прикладання, то її розвинення у ряди Фур'є потребує обчислення значної кількості членів цього ряду. В роботі [7] для заміни локального навантаження використовується його заміна дельтоподібною послідовністю, при цьому за критерій відповідності отримуваних розв'язків обирається степінь збігу максимальних значень основних факторів напружено-деформованого стану оболонки.

У даній роботі проводиться дослідження впливу локального навантаження на напружений стан порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних увігнутих напівгофрів, що знаходяться під дією локального навантаження за певних граничних умов на торцях. При цьому застосовуються: метод відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельний метод дискретної ортогоналізації.

## 2. Постановка задачі

Розглядаються ізотропні порожнисті циліндри з некруговим поперечним перерізом в криволінійній системі координат  $s, t, \gamma$ , яка побудована таким чином. В ортогональній криволінійній системі координат  $s, t$  обирається криволінійна циліндрична поверхня за поверхню відліку (серединна поверхня, рівновіддалена від бічних поверхонь), а координата  $\gamma$  відкладається вздовж нормалі до цієї поверхні.

На торцях розглядаються граничні умови типу простого опирання

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_p; \sigma_\gamma = 0; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{t\gamma} = 0; \\ \gamma &= \gamma_q; \sigma_\gamma = q_\gamma(t); \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{t\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

За вихідні приймаються основні рівняння лінійної просторової теорії пружності [8]. За розв'язувальні обираються функції, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях (3) – три компоненти напружень  $\sigma_\gamma^i$ ,  $\tau_{s\gamma}^i$ ,  $\tau_{t\gamma}^i$  та три компоненти пере-

міщень  $u_\gamma^i$ ,  $u_s^i$ ,  $u_t^i$ . Після певних перетворень з вихідних рівнянь можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описує напружений стан розглядуваних циліндрів в області  $\{0 \leq s \leq l; t_1 \leq t \leq t_2; \gamma_p \leq \gamma \leq \gamma_q\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t} + b_{22} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma + \\ &+ b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s}{\partial s} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma} - b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} - b_{11} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} - \\ &- b_{66} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) - (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s \partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right) - \\ &- (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s \partial t} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) - b_{66} \frac{\partial^2 u_t}{\partial s^2}; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma - c_1 \frac{\partial u_s}{\partial s} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_t}{\partial t}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_t$$

$$(b_{11} = \frac{a_{22} a_{66}}{\Omega}; b_{12} = -\frac{a_{12} a_{66}}{\Omega}; b_{22} = \frac{a_{11} a_{66}}{\Omega}; b_{66} = \frac{(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}{\Omega};$$

$$\Omega = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) a_{66};$$

$$c_1 = -(b_{11} a_{13} + b_{12} a_{23}); \quad c_2 = -(b_{12} a_{13} + b_{22} a_{23}); \quad c_4 = a_{33} + c_1 a_{13} + c_2 a_{23}).$$

Тут

$$a_{11} = \frac{1}{E_s}; \quad a_{12} = -\frac{v_{st}}{E_t} = -\frac{v_{ts}}{E_s};$$

$$a_{13} = -\frac{v_{s\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{v_{\gamma s}}{E_s}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_t};$$

$$a_{23} = -\frac{v_{\gamma t}}{E_t} = -\frac{v_{t\gamma}}{E_\gamma}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_\gamma}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{t\gamma}};$$

$$a_{55} = \frac{1}{G_{s\gamma}}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_{st}},$$

де  $E_s$ ,  $E_t$ ,  $E_\gamma$  – модулі пружності в напрямку координатних осей,  $G_{t\gamma}$ ,  $G_{s\gamma}$ ,  $G_{st}$  – модулі зсуву для площин, паралельних координатним поверхням,  $v_{st}$ ,  $v_{ts}$ ,  $v_{s\gamma}$ ,  $v_{\gamma s}$ ,  $v_{t\gamma}$ ,  $v_{\gamma t}$  – коефіцієнти Пуассона.

У випадку ізотропного матеріалу усі напрямки еквівалентні стосовно пружних властивостей і  $E_s = E_t = E_\gamma = E$ ,  $v_{st} = v_{ts} =$

$$= v_{s\gamma} = v_{\gamma s} = v_{t\gamma} = v_{\gamma t} = \nu, \quad G_{t\gamma} = G_{s\gamma} = G_{st} = E/2(1 + \nu).$$

### 3. Метод розв'язування

Наявність граничних умов (2) дозволяє понизити розмірність задачі шляхом відокремлення змінних. Для цього розв'язувальні функції та компоненти навантаження подаються у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж твірної циліндра. В результаті підстановки зазначених рядів до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (4) та граничних умов (3) і відокремлення змінних отримуємо двовимірну задачу, яка описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами відносно амплітудних значень зазначе-

них рядів [9]. Отримана система диференціальних рівнянь не дозволяє відокремити змінні вздовж напрямної циліндра, оскільки містить в собі доданки, що являють собою добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які залежать від двох координат

$$\begin{aligned} \phi_1^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right\} (j = \overline{1,5}); \quad \phi_2^j = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \tau_{t\gamma}; u_t \right\} (j = \overline{1,2}); \\ \phi_3^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\} (j = \overline{1,3}); \quad \phi_4^j = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t}; \frac{\partial u_t}{\partial t}; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\} (j = \overline{1,3}); \\ \phi_5 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1^3; \quad \phi_6 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_3^3; \quad \phi_7 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_4^2. \end{aligned} \quad (5)$$

З врахуванням виразів (5) розв'язувальна система диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= \lambda_n \tau_{t\gamma} + (c_2 - 1) \phi_1^1 - \phi_4^1 + b_{22} \phi_1^5 + b_{12} \lambda_n \phi_1^4 + b_{22} \phi_4^3; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_\gamma + b_{11} \lambda_n^2 u_s - \phi_{1,n}^2 - b_{12} \lambda_n \phi_1^3 - b_{66} \phi_6 - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_4^2; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -b_{66} \lambda_n^2 u_t - c_2 \phi_3^1 - 2\phi_2^1 - b_{22} \phi_5 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_3^3 - b_{22} \phi_7; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -b_{66} \lambda_n^2 u_t - c_2 \phi_3^1 - 2\phi_2^1 - b_{22} \phi_5 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_3^3 - b_{22} \phi_7; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma + c_1 \lambda_n u_s - c_2 \phi_4^2 - c_2 \phi_1^3; \quad \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \phi_3^2 + \phi_2^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Формально коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (6) не залежать від координати напрямної  $t$  і дозволяють відокре-

мити змінні в цьому напрямку шляхом розвинення розв'язувальних, доповняльних функцій і компонент навантаження в ряди Фур'є вздовж напрямної циліндра. Зазначені ряди Фур'є подаються у вигляді

$$\tilde{X}(t, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k t, \quad \tilde{Y}(t, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k t, \quad (7)$$

де

$$\tilde{X} = \{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \phi_1^j, \phi_4^j, \phi_6, q_\gamma, q_s \}, \quad \tilde{Y} = \{ \tau_{t\gamma}, u_t, \phi_2^j, \phi_3^j, \phi_5, \phi_7, q_t \}, \quad \lambda_k = \frac{2k\pi}{T}.$$

Підстановка рядів (7) до розв'язувальної системи рівнянь (6) та граничних умов на бічних поверхнях дозволяє відокремити змінні і прийти до одномірної крайової за-

дачі, яку описано системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів (7) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + (c_2 - 1) \phi_{1,k}^1 - \phi_{4,k}^1 + b_{22} \phi_{1,k}^5 + b_{12} \lambda_n \phi_{1,k}^4 + b_{22} \phi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,k} - \phi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \phi_{1,k}^3 - b_{66} \phi_{6,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{t\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66} \lambda_n^2 u_{t,k} - c_2 \phi_{3,k}^1 - 2\phi_{2,k}^1 - b_{22} \phi_{5,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \phi_{3,k}^3 - b_{22} \phi_{7,k}; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_1 \lambda_n u_{s,k} + c_4 \sigma_{\gamma,k} - c_2 \phi_{4,k}^2 - c_2 \phi_{1,k}^3; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{du_{s,k}}{d\gamma} = a_{55}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{t\gamma,k} - \phi_{3,k}^2 + \phi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K})$$

з граничними умовами

$$\gamma = \gamma_p: \sigma_{\gamma,k} = 0; \tau_{s\gamma,k} = 0; \tau_{t\gamma,k} = 0, \quad (9)$$

$$\gamma = \gamma_q: \sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \tau_{s\gamma,k} = 0; \tau_{t\gamma,k} = 0.$$

Отримана крайова задача (8), (9) розв'язується одночасно для всіх гармонік рядів (7). В процесі інтегрування на кожному кроці застосування чисельного методу необхідно знаходити амплітудні значення

доповняльних функцій. При цьому для кожного фіксованого значення  $\gamma_k$  відрізка  $[\gamma_p; \gamma_q]$  обчислюють в ряді точок напрямної  $t_i$  ( $i = \overline{1, R}$ ) величини

$$h_1^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} = \frac{1}{R_t(t_i) + \gamma_k}; \quad h_2^i = \frac{1}{H_2} = \frac{R_t(t_i)}{R_t(t_i) + \gamma_k} \quad (i = \overline{1, R});$$

$$\phi_{1,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{\sigma_{\gamma,m}; \tau_{s\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m}\} \cos \lambda_m t_i, \quad (j = \overline{1,4});$$

$$\phi_{1,i}^5 = (h_1^i)^2 \sum_{m=0}^M u_{\gamma,m} \cos \lambda_m t_i; \quad (10)$$

$$\phi_{2,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{\tau_{t\gamma,m}; u_{t,m}\} \sin \lambda_m t_i, \quad (j = 1,2);$$

$$\phi_{3,i}^j = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{\sigma_{\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m}\} \sin \lambda_m t_i, \quad (j = \overline{1,3});$$

$$\phi_{4,i}^j = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \{\tau_{t\gamma,m}; u_{t,m}\} \cos \lambda_m t_i, \quad (j = 1,2); \quad \phi_{4,i}^3 = h_1^i h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m u_{t,m} \cos \lambda_m t_i.$$

Застосовуючи стандартну процедуру обчислення коефіцієнтів Фур'є для функцій, яку задано таблицею, знаходять ці коефіцієнти для функцій (10). Значення

$\phi_{1,m}^3, \phi_{3,m}^3, \phi_{4,m}^2$  ( $m = \overline{0, M}$ ) використовують для обчислення табличних значень функцій

$$\phi_{5,i} = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \phi_{1,m}^3 \sin \lambda_m t_i; \quad \phi_{6,i} = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \phi_{3,m}^3 \cos \lambda_m t_i;$$

$$\phi_{7,i} = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \phi_{4,m}^2 \sin \lambda_m t_i \quad (i = \overline{1, R}), \quad (11)$$

після чого обчислюють коефіцієнти Фур'є для функцій (11). Знайдені коефіцієнти для функцій (10), (11) підставляють до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (8) і виконують наступний крок інтегрування, переходячи від точки  $\gamma_k$  до точки  $\gamma_{k+1}$ . На кінцях інтервалу  $[\gamma_p; \gamma_q]$  задовольняють граничним умовам (9).

#### 4. Аналіз числових результатів

Нехай поперечний переріз поверхні відліку розглядуваних циліндрів задається рівняннями скороченої гіпоциклоїди у вигляді

$$x = (A - a) \cos \psi + \lambda a \cos \left( \frac{A - a}{a} \psi \right);$$

$$z = (A - a) \sin \psi - \lambda a \sin \left( \frac{A - a}{a} \psi \right), \quad (12)$$

де  $A$  – радіус нерухомого кола,  $a$  ( $a > 0$ ) – радіус рухомого кола,  $\lambda a$  ( $\lambda < 1$ ) – відстань до радіуса рухомого кола,  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ) – кутовий параметр, центральний кут в поперечному перерізі.

Перехід від координати  $t$  до координати  $\psi$  для функції  $V(t(\psi), \gamma)$  здійснюється таким чином

$$\frac{dt}{d\psi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2} = \omega(\psi); \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{d\psi}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\psi)} \frac{\partial V}{\partial \psi}.$$

При цьому радіус кривизни поверхні відліку буде  $R(\psi) = \frac{\omega^3(\psi)}{\left(\frac{dx}{d\psi} \frac{d^2z}{d\psi^2} - \frac{dz}{d\psi} \frac{d^2x}{d\psi^2}\right)}$ .

Розглядаються два варіанти прикладання локального навантаження: на двох та на чотирьох ділянках бічної поверхні.

Локальне навантаження, прикладене на двох ділянках бічної поверхні, має вигляд

$$q_\gamma(\psi) = \begin{cases} -q_0(\cos \psi - \cos \beta), & 2\pi - \beta \leq \psi \leq \beta; \\ q_0(\cos \psi + \cos \beta), & 0, \beta \leq \psi \leq \pi - \beta; \\ 0, & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \\ 0, & \pi + \beta \leq \psi \leq 2\pi - \beta. \end{cases} \quad (13)$$

Таке навантаження можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$q_\gamma(\psi) = \frac{2q_0}{\pi} \left[ \sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=2,4,\dots}^{2K} \left( \frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k \beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k \psi \right]. \quad (14)$$

Параметр  $\beta$  характеризує інтервал прикладання локального навантаження.

Якщо розглядається чотири ділянки прикладання локального навантаження

$$q_\gamma(\psi) = \begin{cases} q_0(\cos \psi - \cos \beta), & 0 \leq \psi \leq \beta; \\ q_0(\sin \psi - \cos \beta), & 2\pi - \beta \leq \psi \leq 2\pi; \\ q_0(\sin \psi - \cos \beta), & 0, \beta \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} - \beta; \\ -q_0(\cos \psi + \cos \beta), & \frac{\pi}{2} - \beta \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} + \beta; \\ -q_0(\cos \psi + \cos \beta), & 0, \frac{\pi}{2} + \beta \leq \psi \leq \pi - \beta; \\ -q_0(\sin \psi + \cos \beta), & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \\ -q_0(\sin \psi + \cos \beta), & 0, \pi + \beta \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2} - \beta; \\ -q_0(\sin \psi + \cos \beta), & \frac{3\pi}{2} - \beta \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2} + \beta; \\ -q_0(\sin \psi + \cos \beta), & 0, \frac{3\pi}{2} + \beta \leq \psi \leq 2\pi - \beta, \end{cases} \quad (15)$$

то його можна подати у вигляді ряду Фур'є таким чином:

$$q_\gamma(\psi) = \frac{4q_0}{\pi} \left[ \sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=4,8,\dots}^{4K} \left( \frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k \beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k \psi \right]. \quad (16)$$

На рис. 1, 2 наведено графіки частини локального навантаження дійсного та апроксимованого рядами Фур'є при двох ділянках прикладання для інтервалу  $\beta = \pi/8$  (рис. 1) та  $\beta = \pi/32$  (рис. 2) в області зміни кутового параметра  $\psi \in [0; \pi/2]$ .

На рис. 3, 4 наведено графіки частини локального навантаження дійсного та апроксимованого рядами Фур'є при чотирьох ділянках прикладання для інтервалу  $\beta = \pi/8$  (рис. 3) та  $\beta = \pi/32$  (рис. 4) в області зміни кутового параметра  $\psi \in [0; \pi/4]$ .

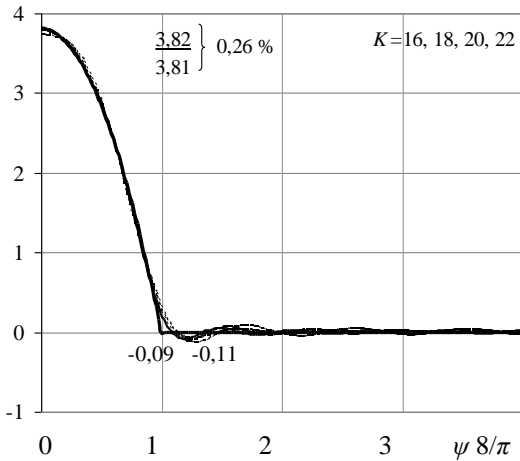


Рис. 1.

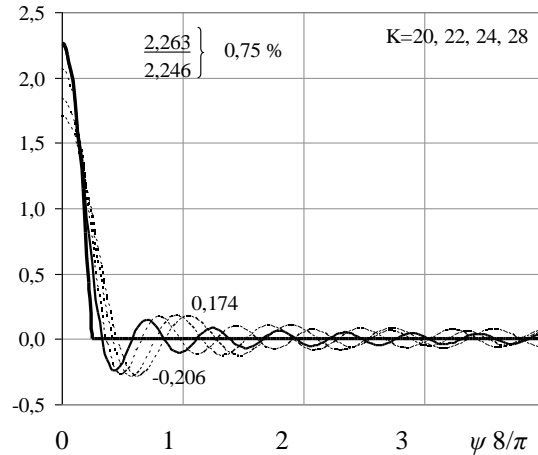


Рис. 2.

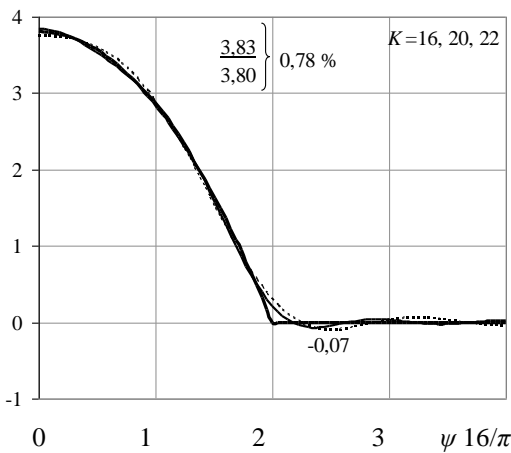


Рис. 3.

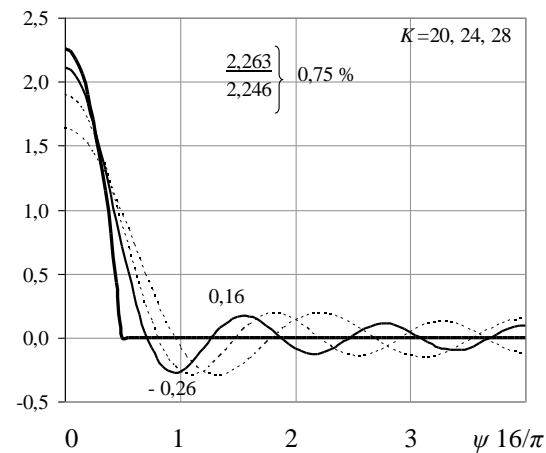


Рис. 4.

Як видно з наведених на рис. 1–4 графіків, більшої кількості членів рядів (14), (16) апроксимоване навантаження потребує не для способу його прикладання, а для довжини інтервалу. Чим менший інтервал прикладання локального навантаження, тим більшої кількості членів відповідних рядів Фур'є він потребує.

При врахуванні 20 – 22 членів рядів (14), (16) для інтервалу  $\beta = \pi/8$  максимальне значення навантаження при  $\psi = 0$  відрізняється від заданого на 0,84% – 0,78%, що свідчить про достатню точність такого подання.

Для інтервалу  $\beta = \pi/32$  при врахуванні 28 членів аналогічних рядів максимальне значення навантаження при  $\psi = 0$  відрізняється від заданого на 0,75%, що свідчить про достатню точність такого подання.

При розв'язуванні задачі прийняті такі вихідні дані: довжина циліндра  $l = 40$ , товщина  $h = 2$ , радіус нерухомого кола  $A = 24$ , радіус рухомого кола  $a = 6$ , параметр  $\lambda = 0,4$ .

На рис. 5 показаний поперечний переріз розглядуваних циліндрів з прикладеним навантаженням. Було обрано два способи прикладання локального навантаження: з двома інтервалами прикладання (13) (рис. 5, а), яке подається рядом (14), та з чотирма – (15), яке подається рядом (16) (рис. 5, б).

Для параметра  $\beta$  розглядаються дві ділянки:  $\beta = \pi/8$ ;  $\beta = \pi/16$ . При цьому коефіцієнт  $q_0$  обирається таким чином, щоб загальне навантаження залишалось однаковим, рівним навантаженню при  $\beta = \pi/16$ .

Результати розв'язку задачі в середньому перерізі довжини циліндра наведені на рис. 6 для полів переміщень  $u_\gamma$  та для полів напружень  $\sigma_\psi$  – на рис. 7 вздовж напрямної. Суцільною лінією показані криві для двох ділянок прикладання локального навантаження, штриховою – для чотирьох. В силу симетрії розглянуто чверть поперечного перерізу циліндра для інтервалу  $[0; \pi/2]$ .

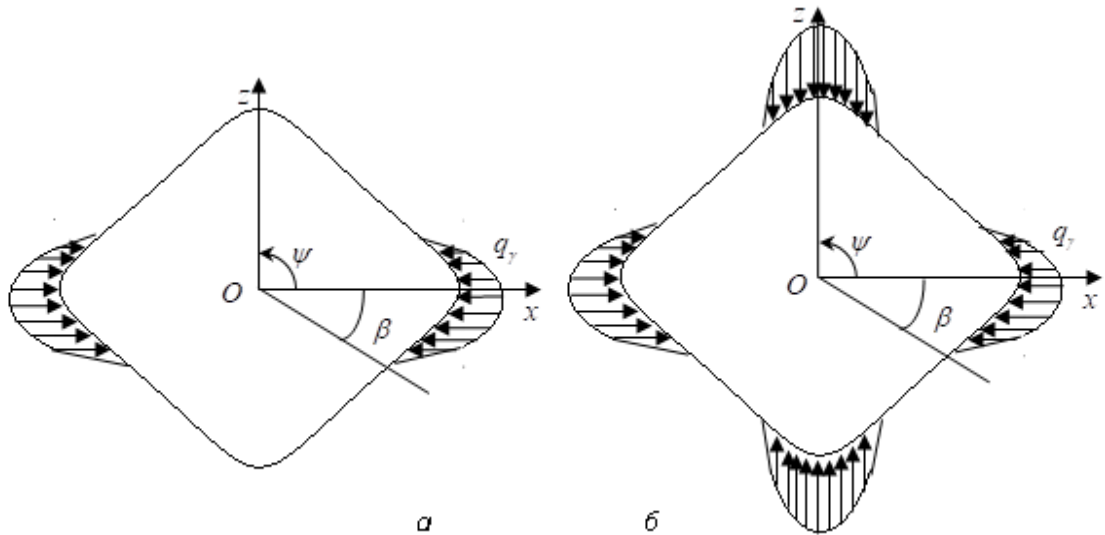


Рис. 5.

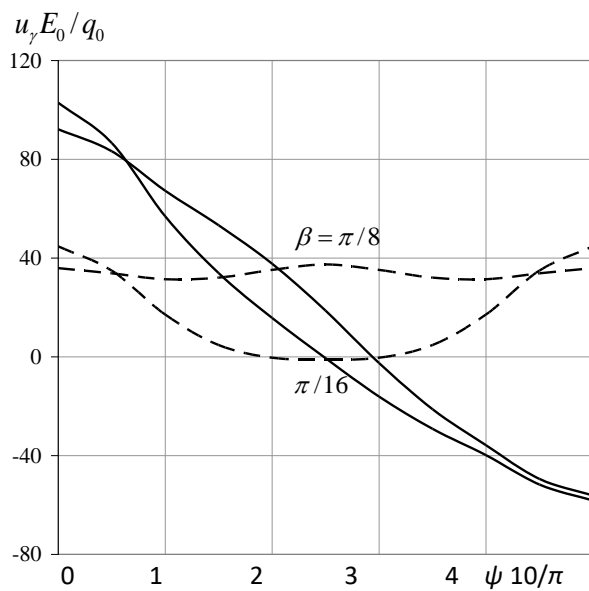


Рис. 6.

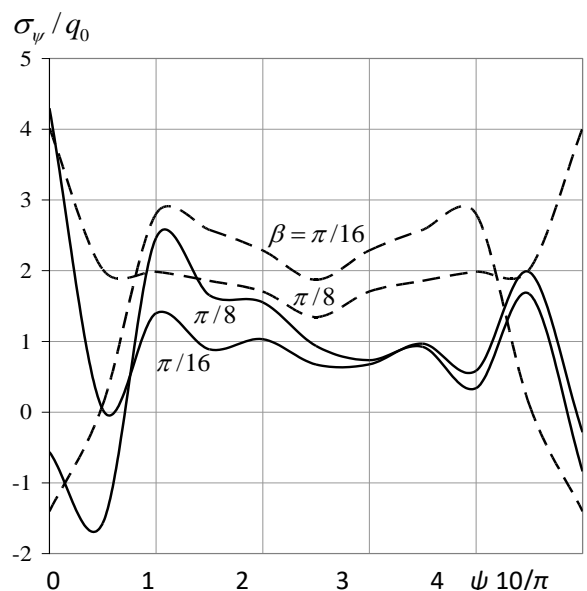


Рис. 7.

З рис. 6, рис. 7 видно, що при чотирьох ділянках локального навантаження переміщення та напруження розподіляються симетрично відносно зони з'єднання напівгофрів ( $\psi = \pi/8$ ).

При цьому зі збільшенням інтервалу прикладання навантаження значення переміщень зменшуються в зоні вершини напівгофрів ( $\psi = 0$ ) в 1,2 рази для двох інтервалів навантаження та для чотирьох інтервалів прикладання локального навантаження.

Крім того, збільшення інтервалу прикладання навантаження для  $\beta = \pi/8$  при чотирьох ділянках прикладання веде до більш плавного перерозподілу значень перемі-

щень, в той час, коли для  $\beta = \pi/16$  при переході з зони вершин напівгофрів ( $\psi = 0; \pi/4$ ) до зони з'єднання ( $\psi = \pi/8$ ) переміщення зменшуються майже в 40 разів.

Для двох ділянок прикладання навантаження (рис. 7) зміна інтервалу  $\beta$  приводить до суттєвого перерозподілу полів напружень в перерізі  $0 \leq \psi \leq \pi/4$  на внутрішній поверхні оболонки.

При цьому в зоні вершини напівгофрів ( $\psi = 0$ ) величина напружень збільшується в 7,6 рази при зменшенні інтервалу  $\beta$ , а для чотирьох ділянок навантаження – напруження збільшуються майже в 3 рази.

На зовнішній поверхні оболонки збільшення зони прикладання навантаження веде



до зменшення величини напружень як для двох, так і для чотирьох ділянок. При цьому для першого способу навантаження в зоні вершини напівгофрів ( $\psi = 0$ ) напруження зменшуються у 2,3 раза а для другого способу – у 3,5 раза.

### 5. Висновки

У просторовій постановці, з використанням методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації, розв'язано задачу про вплив локального навантаження на напружений стан ізотропних порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних увігнутих напівгофрів. Поперечний переріз розглядуваних циліндрів описується гладкою кривою без особливостей та розривів, що являє собою скорочену гіпоциклоїду. Обрання за розв'язувальні функції, в

яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях, дозволяє отримати розв'язок задачі з достатнім ступенем точності [10]. Прикладене локальне навантаження подається рядами Фур'є, для яких обрано необхідну кількість членів, за яких максимальне значення дійсного навантаження і апроксимованого відповідними рядами не перевищує 1%. Досліджено два способи прикладання локального навантаження – на двох та чотирьох ділянках різних інтервалів. Було встановлено, що зміна інтервалу більшою мірою відчутна для чотирьох ділянок прикладання навантаження в розподілі полів нормальних переміщень в зоні, вільній від навантаження, та в зоні максимального навантаження в розподілі напружень для обох способів прикладання локального навантаження.

### Література

1. Lugovoi P. Z., Sirenko V. N., Skosarenko Yu. V., Batutina T. Ya. Lugovoi P. Z. Dynamics of a Discretely Reinforced Cylindrical Shell Under a Local Impulsive Load. *Int. Appl. Mech.* 2017. Vol. 52, No 2. P. 173–180.
2. Kwanghyun Ahn, Lim In-Gyu, Yoon Jonghun, Huh Hoon. A simplified prediction method for the local buckling load of cylindrical tubes. *Int. J. of Precision Eng. and Manufacturing.* 2016. Vol. 17, No 9. P. 1149–1156.
3. Marchuk A. V., Gnidash S. V. Analysis of the Effect of Local Loads on Thick-Walled Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions. *Int. Appl. Mech.* 2016. Vol. 52, No 4. P. 368–377.
4. Даревский В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки). В: Труды VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку. Москва: Наука, 1966. С. 115–119.
5. Жигалко Ю. П. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки (обзор литературы, метод и результаты). *Исследования по теории пластин и оболочек.* Вып. IV. Казань: Изд-во Казанского универ-та, 1966. С. 3–41.
6. Даревский В. М. Оболочки под действием локальных нагрузок. Справочник «Прочность, устойчивость, колебания». Москва: Машиностроение, 1968. С. 49–96.
7. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1973. 228 с.
8. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Киев: Наук. думка, 1975. 564 с.
9. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Влияние изменения параметров кривизны на напряженное состояние полых цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых полугофров. *Прикл. механика.* 2018. Т. 54, № 3. С. 27 – 35.
10. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статички пружних тіл неканонічної форми. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2005. Т. 48, № 2. С. 79–100.

### References

1. Lugovoi, P. Z., Sirenko, V. N., Skosarenko, Yu. V. & Batutina, T. Ya. (2017). Dynamics of a Discretely Reinforced Cylindrical Shell Under a Local Impulsive Load. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 52, No 2, pp. 173–180.
2. Kwanghyun, Ahn, In-Gyu, Lim, Jonghun, Yoon & Hoon, Huh (2016). A simplified prediction method for the local buckling load of cylindrical tubes. *Int. J. of Precision Eng. and Manufacturing*, Vol. 17, No 9, pp. 1149–1156.
3. Marchuk, A. V. & Gnidash, S. V. (2016). Analysis of the Effect of Local Loads on Thick-Walled Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 52, No 4, pp. 368–377.
4. Darevskii, V. M. (1966). Contact problems of shell theory (the effect of local loads on shells). V: Trudi VI Vses. konf. po teorii obolochek i plastin, Baku. Moscow: Nauka, 1966. pp. 115–119 (In Russian).
5. Zhigalko Yu. P. (1966) Calculation of thin elastic cylindrical shells for local loads (literature review, method and results) In: *Studies in the Theory of Plates and Shells*. Kazan: IV Izd-vo Kazanskogo univer-ta, pp. 3–41 (In Russian).
6. Darevskii, V. M. (1968). Shell under the influence of local loads. Reference book «Strength, stability, oscillations». Moscow: Mashinostroenie (In Russian).
7. Grigorenko, Ya. M. (1973). Isotropic and anisotropic layered shells of rotation of variable stiffness. Kyev: Nauk. dumka (In Russian).
8. Timoshenko, S. P. (1975). Theory of elasticity course. Kyev: Nauk. dumka (In Russian).
9. Grigorenko, Ya. M. & Rozhok, L. S. (2018). Effect of Change in the Curvature Parameters on the Stress State of Concave Corrugated Hollow Cylinders. *Int. Appl. Mech.*, Vol. 54, No 3, pp. 266–274.
10. Grigorenko, Ya. M. & Rozhok, L. S. (2005). Application of discrete Fourier series to solving boundary value problems of non-canonical elastic body static. *Mat. metody ta fiz.-mekh. Polia*, Vol. 48, No 2, pp. 79–100 (In Ukrainian).