

## РОЗДІЛ І. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-01>

### АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМІРНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО КВАЗІКРИСТАЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

**Білий Д. В.**

*аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна  
[orcid.org/0000-0001-6873-5765](https://orcid.org/0000-0001-6873-5765)  
[bily.dmitry@gmail.com](mailto:biliy.dmitry@gmail.com)*

**Комаров О. В.**

*кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна  
[orcid.org/0000-0002-8532-2820](https://orcid.org/0000-0002-8532-2820)  
[21\\_21@ukr.net](mailto:21_21@ukr.net)*

**Лобода В. В.**

*доктор фізико-математичних наук, професор,  
завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна  
[orcid.org/0000-0002-0432-629X](https://orcid.org/0000-0002-0432-629X)  
[loboda@dmu.dp.ua](mailto:loboda@dmu.dp.ua)*

**Ключові слова:** *тріщина, квазікристал, задача лінійного спряження.*

Розглянуто тунельну тріщину вздовж межі розділу двох зчеплених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів. Досліджуються провідні електричні умови на берегах тріщини. Вважається, що розташування атомів є періодичним у площині, перпендикулярній фронту тріщини та квазіперіодичним у напрямі фронту, причому остання вісь співпадає з напрямком поляризації матеріалів. Рівномірно розподілені антиплоскі фононні та фазонні зсувні напруження та електричне поле в площині, перпендикулярній фронту тріщини, задані на нескінченності.

Побудовані матрично-векторні представлення для фононних та фазонних напружень та електричного поля, а також для похідних від стрибка фононних та фазонних переміщень та електричного зміщення через вектор-функцію, голоморфну у всій комплексній площині, за винятком області тріщин. Задовольняючи з використанням цих представлень умовам на берегах тріщини, формулюється задача лінійного спряження Рімана-Гільберта з відповідними умовами на нескінченності та будується аналітичний розв'язок цієї задачі. Аналізуючи цей розв'язок, отримали аналітичні вирази для фононних та фазонних напружень та стрибків переміщень уздовж межі поділу матеріалів. Показано, що отриманий

розв'язок має осцилюючу кореневу сингулярність біля вершин тріщини. Важливо, що ця особливість не призводить до взаємного проникнення берегів тріщини, як у плоскому випадку. До того ж області осциляції є дуже малими, тому отримані розв'язки є прийнятними для практичного використання. Чисельний аналіз проведений для комбінації різних квазікристалічних з'єднань. Результати отримані для фононних та фазонних компонент пружно-деформівного стану вздовж межі поділу матеріалів і представлені в графічній формі. Зроблені висновки стосовно зміни фононних та фазонних характеристик на межі поділу матеріалів залежно від зовнішніх навантажень та геометричних факторів.

## ANTIPLANE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL PIEZOELECTRIC QUASICRYSTAL WITH AN INTERFACE CRACK

**Biliy D. V.**

*Postgraduate Student at the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49000, Ukraine  
orcid.org/0000-0001-6873-5765  
bily.dmitry@gmail.com*

**Komarov O. V.**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences,  
Associate Professor at the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49000, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-8532-2820  
21\_21@ukr.net*

**Loboda V. V.**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Head of the Department of Theoretical and Computer Mechanics  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49000, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-0432-629X  
loboda@dnu.dp.ua*

**Key words:** *crack, quasicrystal,  
linear relationship problem.*

A tunnel crack along the interface of two coupled one-dimensional piezoelectric quasicrystalline half-spaces is considered. Conductive electrical conditions on the cracks are investigated. It is believed that the arrangement of atoms is periodic in the plane perpendicular to the crack front and it is quasi-periodic in the direction co-directed with the front, and the last axis coincides with the direction of materials polarization. Uniformly distributed antiplane phonon and phason shear stresses and the electric field in the plane perpendicular to the crack front are given at infinity.

Matrix-vector representations for phonon and phason stresses and electric field, as well as for the derivatives of phonon and phason displacements jumps and electric displacement are constructed. In these representations the mentioned values are expressed through the vector function holomorphic in the whole complex plane, except of the crack region. Satisfying with the use of these representations the conditions on the crack faces, the Riemann-Hilbert problem of linear relationship with the corresponding conditions at infinity is formulated and the analytical solution of this problem is constructed. Analyzing this solution, we obtain analytical expressions for phonon and phason stresses

and displacements jumps along the materials interface. It is shown that the obtained solution has an oscillating square root singularity near the crack vertices. It is important that this singularity does not lead to mutual penetration of the crack faces as in the plane case. In addition, the oscillation regions are very small, so the resulting solutions are acceptable for practical use.

Numerical analysis was performed for a combination of different quasicrystalline compounds. The results are obtained along the material interface for the phonon and phason components of the stress-strain state and are presented in graphical form. Conclusions are made regarding the variation of phonon and phason characteristics at the material interface depending on external loads and geometric factors.

**Вступ.** Квазікристали, що вперше висвітлені в [1], – це новий клас матеріалів, який активно вивчається близько кількох останніх десятиліть. Квазікристали (КК) відрізняються від звичайних кристалів та некристалів своєю високою міцністю, високою зносостійкістю, низькою тепловіддачею, тощо. Ці матеріали сьогодні використовуються для покриття поверхні двигунів, сонячних батарей, термоелектричних перетворювачів, контейнерів з ядерним паливом тощо.

Проблеми механіки руйнування квазікристалів та сучасний рівень досліджень по даній темі представлені в [2–4].

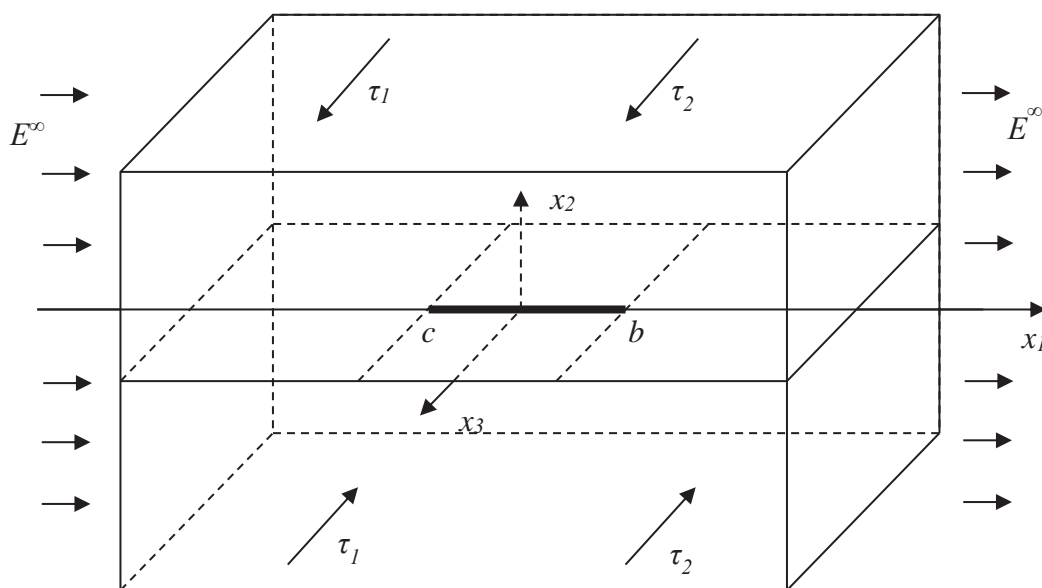
Багато квазікристалічних матеріалів мають п'єзоелектричні властивості. Теоретичні основи п'єзоелектрики в квазікристалах були розглянуті в [5; 6].

Тріщини між двома п'єзоелектричними квазікристалами до цього часу вивчені недостатньо. Із цієї теми в [7; 8] аналітично-чисельним методом досліджено електрично непроникну тріщину в одновимірному гексагональному термоелектропружному квазікристалічному біматеріалі. Міжфазні тріщини типу III між звичайними пружним матеріалом та квазікристалом були розглянуті в [9] без п'єзоелектричного ефекту. Тріщина між

різнорідними одновимірними гексагональними п'єзоелектричними квазікристалами з електропроникними та непроникними умовами на берегах тріщини в антиплоскому випадку вивчалась у роботі [10].

Провідна міжфазна тріщина при антиплоскому механічному навантаженні та плоскому електричному навантаженні була розглянута в роботах [11; 12]. У цих роботах виявлена осцилююча особливість на кінчиках тріщини. Спосіб усунення цієї особливості для провідної тріщини у неплоскому випадку запропоновано в [13]. Взаємодія тунельної провідної тріщини та віддаленого смугового електрода, розташованого на межі розділу двох п'єзоелектричних матеріалів, вивчалася в [14]. Однак, як відомо авторам, електропровідна міжфазна тріщина між двома п'єзоелектричними КК раніше не розглядалася. Саме така проблема для випадку антиплоского механічного та плоского електричного навантаження є основною темою даної статті.

**Постановка задачі.** Розглянемо тунельну тріщину шириною  $(c, b)$  на межі поділу двох одновимірних п'єзоелектричних квазікристалів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$  (Рис. 1). Атоми розміщені періодично в площині  $x_1 - x_2$ , та квазіперіодично по осі  $x_3$ ,



**Рис. 1.** Схематичне зображення тунельної тріщини між двома одновірними квазікристалами з умовами навантаження

яка співпадає з напрямом поляризації матеріалів. Півпростори навантажені на нескінченості зсувними фоновими  $\sigma_{23}^\infty = \tau_1$ , та фазон  $H_{23}^\infty = \tau_2$  напруженнями та електричним полем  $E^\infty$ .

При такому навантаженні в тілі реалізується антиплоска деформація. Тоді визначальні співвідношення для кожної з підобластей мають вигляд:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{j3} \\ H_{j3} \\ D_j \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} u_{3,j} \\ w_{3,j} \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \quad (j=1,2), \quad (1)$$

$$\text{де } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{44} & R_3 & -e_{15} \\ R_3 & K_2 & -\tilde{e}_{15} \\ e_{15} & \tilde{e}_{15} & \xi_{11} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$j=(x_1, x_2)$ , а  $i=1,2$  – для верхнього і нижнього матеріалів відповідно;  $\sigma_{3i}$  – компоненти фонові напруження;  $H_{3i}$  – компоненти фазонів напруження;  $C_{44}, K_2$  – пружні константи у фонових і фазонних полях, відповідно;  $R_3$  – пружна константа зв'язку фонових і фазонних полів;  $e_{15}, d_{15}$  – п'єзоелектричні сталі;  $\lambda_{11}$  – діелектрична проникність.

Врахуємо механічні і електростатичні рівняння рівноваги для антиплоского випадку

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad (3)$$

та зв'язок між електричним полем і потенціалом  $\varphi$

$$E_1 = -\varphi_{,1}, \quad E_2 = -\varphi_{,2} \quad (4)$$

Комбінуючи (1), (2) і (3) та умови зв'язку, можемо записати:

$$\begin{cases} C_{44} \nabla^2 u_3 + R_3 \nabla^2 w_3 + e_{15} \nabla^2 \varphi = 0 \\ R_3 \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + d_{15} \varphi = 0 \\ e_{15} \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + \lambda_{11} \varphi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{де } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Введемо вектори

$$\mathbf{u} = [u_3, w_3, \varphi]^T, \quad \mathbf{t}_j = [\sigma_{3j}, H_{3j}, D_j]^T. \quad (6)$$

Тоді рівняння (1) можна записати у формі

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{R} \mathbf{u}_j \quad (j=1,2). \quad (7)$$

Із рівнянь (5) слідує, що функції  $u_3$ ,  $\varphi$  та  $w_3$  задовольняють рівняння  $\Delta u_3 = 0$ ,  $\Delta \varphi = 0$ ,  $\Delta w_3 = 0$ , відповідно, тобто вони являються гармонічними. Тому представимо вектор  $\mathbf{u}$ , компонентами якого і є функції  $u_3$ ,  $\varphi$  та  $w_3$ , як дійсну частину деякої аналітичної вектор-функції

$$\mathbf{u} = 2 \operatorname{Re} \Phi(z) = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) \quad (8)$$

(2 вводиться для зручності),

де  $\Phi(z) = [\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)]^T$  є довільною аналітичною функцією комплексної змінної  $z = x_1 + ix_2$ .

Підставляючи (8) в (7), отримаємо

$$\mathbf{t}_1 = -i \mathbf{B} \Phi'(z) + i \bar{\mathbf{B}} \bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{B} \Phi'(z) + \bar{\mathbf{B}} \bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (9)$$

де  $\mathbf{B} = i \mathbf{R}$ .

Для розв'язку задачі, поставленої в даній статті, введемо також нові вектори:

$$\mathbf{v}' = [u'_3, w'_3, D_2]^T, \quad \mathbf{P} = [\sigma_{32}, H_{32}, \varphi']^T. \quad (10)$$

На основі раніше отриманих представлень (8) та (9) ці нові вектори можемо записати в наступній формі

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M} \Phi'(z) + \bar{\mathbf{M}} \bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (11)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{N} \Phi'(z) + \bar{\mathbf{N}} \bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (12)$$

де  $\mathbf{M} = [M_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ ,  $\mathbf{N} = [N_{ij}]_{i,j=1,2,3}$  і  $M_{11} = M_{22} = 1$ ,  $M_{12} = M_{13} = M_{21} = M_{23} = 0$ ,  $M_{3j} = B_{3j}$ ,  $N_{ij} = B_{ij}$  ( $i=1,2; j=1,2,3$ ),  $N_{33} = 1$ ,  $N_{31} = N_{32} = 0$ .

Це значить що матриці  $\mathbf{M}$  та  $\mathbf{N}$  будуть мати наступну структуру

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Припустимо, що область, яка розглядається, скомпонована з двох півпросторів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$ . Тоді представлення (11) та (12) можуть бути записаними для обох півпросторів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$  в формі

$$\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{M}^{(m)} \Phi'^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{M}}^{(m)} \bar{\Phi}'^{(m)}(\bar{z}),$$

$$\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{N}^{(m)} \Phi'^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{N}}^{(m)} \bar{\Phi}'^{(m)}(\bar{z}), \quad (14)$$

де  $m=1$  для верхньої частини композиту та  $m=2$  для нижньої частини, відповідно;  $\mathbf{M}^{(m)}, \mathbf{N}^{(m)}$  – матриці, аналогічні  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ , для півпросторів 1 та 2;  $\Phi^{(m)}(z)$  – довільні вектор-функції, аналітичні в півпросторах 1 та 2, відповідно.

Будемо вимагати далі виконання рівності  $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)}$  на усій межі поділу матеріалів. Тоді, на основі формули (14) маємо

$$\begin{aligned} N^{(1)} \Phi'^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0) = \\ = N^{(2)} \Phi'^{(2)}(x_1 - i0) + \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}'^{(2)}(x_1 + i0) \end{aligned} \quad (15)$$

для  $-\infty < x_1 < \infty$ .

Тут було використано позначення  $F(x_1 \pm i0) = F^\pm(x_1)$ , що означає граничне значення функції  $F(z)$  при  $x_2 \rightarrow 0$  з наближенням зверху чи знизу, відповідно.

Рівняння (15) можна записати в наступній формі

$$\begin{aligned} N^{(1)} \Phi'^{(1)}(x_1 + i0) - \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}'^{(2)}(x_1 + i0) = \\ = N^{(2)} \Phi'^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}'^{(1)}(x_1 - i0). \end{aligned}$$

Будемо вважати, що права та ліва частина останньої рівності являє собою граничні значення функцій

$$N^{(1)}\Phi^{(1)}(z) - \bar{N}^{(2)}\bar{\Phi}^{(2)}(z) \text{ для } x_2 > 0 \quad (16)$$

та

$$N^{(2)}\Phi^{(2)}(z) - \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}^{(1)}(z) \text{ для } x_2 < 0, \quad (17)$$

які аналітичні в верхній та нижній півплощинах, відповідно. Але це означає існування функції  $\Pi(z)$ , яка є аналітичною у всій площині і дорівнює функціям (16), (17) для кожної півплощини.

Припустимо, що  $\Pi(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , тоді на основі теореми Ліувілля знайдемо, що кожна з функцій (16), (17) рівна 0 для будь якого  $z$  в кожній з півплощин. Отже отримуємо:

$$\bar{\Phi}^{(2)}(z) = (\bar{N}^{(2)})^{-1} N^{(1)}\Phi^{(1)}(z) \text{ для } x_2 > 0, \quad (18)$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(z) = (\bar{N}^{(1)})^{-1} N^{(2)}\Phi^{(2)}(z) \text{ для } x_2 < 0. \quad (19)$$

Далі знайдемо стрибок наступної вектор функції при переході через інтерфейс

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 + i0) - \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 - i0), \quad (20)$$

Знаходячи з першої формули (14)

$$\mathbf{v}'^{(k)}(x_1 \pm i0) = M^{(k)}\Phi^{(k)}(x_1 \pm i0) + \bar{M}^{(k)}\bar{\Phi}^{(k)}(x_1 \mp i0).$$

і підставляючи в (20), маємо:

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = M^{(1)}\Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{M}^{(1)}\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - M^{(2)}\Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{M}^{(2)}\bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0). \quad (21)$$

Визначаючи з рівняння (19)

$$\Phi^{(2)}(x_1 - i0) = (N^{(2)})^{-1} \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0)$$

і підставляючи цей вираз разом з (18), при  $x_2 \rightarrow +0$ , в (21), визначимо стрибок у формі

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{D}\Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{D}}\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0), \quad (22)$$

де  $\mathbf{D} = M^{(1)} - \bar{M}^{(2)}(\bar{N}^{(2)})^{-1} N^{(1)}$ .

Вводячи нову вектор-функцію

$$W(z) = \begin{cases} \mathbf{D}\Phi^{(1)}(z), & x_2 > 0, \\ -\bar{\mathbf{D}}\bar{\Phi}^{(1)}(z), & x_2 < 0, \end{cases} \quad (23)$$

рівняння (22) можна записати у вигляді

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1). \quad (24)$$

Із другого співвідношення (4) будемо мати наступне:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = N^{(1)}\Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{N}^{(1)}\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0). \quad (25)$$

Взявши до уваги, що на основі (23)

$$\Phi^{(1)}(x_1 + i0) = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}(x_1 + i0),$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) = -(\bar{\mathbf{D}}^{-1})^{-1}\mathbf{W}(x_1 - i0),$$

і підставляючи ці співвідношення в (25), отримуємо

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (26)$$

де  $\mathbf{S} = N^{(1)}D^{-1}$ . З останнього співвідношення отримуємо

$$\mathbf{S} = \left[ M^{(1)}(N^{(1)})^{-1} - \bar{M}^{(2)}(\bar{N}^{(2)})^{-1} \right]^{-1}. \quad (27)$$

Таким чином, отримані наступні важливі рівняння

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (28)$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (29)$$

де  $\mathbf{W}(z)$  – довільна вектор-функція аналітична в кожній з півплощин.

Чисельний аналіз показує, що матриця  $\mathbf{S}$  має таку структуру

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} is_{11} & is_{12} & s_{13} \\ is_{21} & is_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & is_{33} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

де всі  $s_{ij}$  є дійсними.

Введемо однорядкову матрицю  $\mathbf{R} = [R_1, R_2, R_3]$  і помножимо на неї (29). Після цього отримаємо

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1) \quad (31)$$

Введемо нову матрицю  $\mathbf{T}$  наступним чином

$$\mathbf{R}\mathbf{S} = \mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{S}} = -\gamma\mathbf{T}, \quad (32)$$

де  $\mathbf{T} = [T_1, T_2, T_3]$  – однорядкова матриця.

Підставивши нові презентації (32) в (31), отримаємо

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{T}\mathbf{W}^+(x_1) + \gamma\mathbf{T}\mathbf{W}^-(x_1) \quad (33)$$

Введемо нову довільну функцію вигляду

$$F(z) = \mathbf{T}\mathbf{W}(z). \quad (34)$$

Тоді рівняння (33) можна записати так

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1), \quad (35)$$

На основі рівнянь (32) маємо:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{S} = -\gamma^{-1}\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{S}} \Rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{S} + \gamma^{-1}\bar{\mathbf{S}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}(\gamma\mathbf{S} + \bar{\mathbf{S}}) = \mathbf{0}.$$

Транспонуємо ліву і праву частину останнього рівняння, отримаємо

$$(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T)\mathbf{R}^T = \mathbf{0}. \quad (36)$$

Із записаного рівняння видно що  $\gamma$  і  $\mathbf{R}^T = \mathbf{0}$  є власним значенням та власним вектором системи (36), відповідно. Тож для подальшого аналізу потрібно їх визначити.

Рівняння вигляду  $\det(\gamma\mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T) = 0$  можна записати в розгорнутому вигляді як:

$$\det \begin{bmatrix} i(\gamma-1)s_{11} & i(\gamma-1)s_{21} & (\gamma+1)s_{31} \\ i(\gamma-1)s_{12} & i(\gamma-1)s_{22} & (\gamma+1)s_{32} \\ (\gamma+1)s_{13} & (\gamma+1)s_{23} & i(\gamma-1)s_{33} \end{bmatrix} = 0,$$

Розкриваючи визначник, одержуємо:

$$i^3(\gamma-1)^3(s_{11}s_{22}s_{33} - s_{12}s_{21}s_{33}) + i(\gamma-1)(\gamma+1)^2(s_{12}s_{23}s_{31} + s_{13}s_{32}s_{21} - s_{13}s_{22}s_{31} - s_{11}s_{23}s_{32}) = 0 \quad (37)$$

Розв'язавши рівняння, отримаємо три корені:

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_2 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_3 = 1, \quad (38)$$

$$\text{де } \delta^2 = \frac{s_{12}s_{23}s_{31} + s_{13}s_{32}s_{21} - s_{13}s_{22}s_{31} - s_{11}s_{23}s_{32}}{s_{33}(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})}. \quad (39)$$

Для знаходження ж власних векторів, згідно з (36), маємо

$$\begin{bmatrix} i(\gamma-1)s_{11} & i(\gamma-1)s_{21} & (\gamma+1)s_{31} \\ i(\gamma-1)s_{12} & i(\gamma-1)s_{22} & (\gamma+1)s_{32} \\ (\gamma+1)s_{13} & (\gamma+1)s_{23} & i(\gamma-1)s_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (40)$$

Використавши раніше визначене  $\gamma = \gamma_1$ , можна записати (40) у вигляді:

$$\begin{bmatrix} i(\gamma_1-1)s_{11} & i(\gamma_1-1)s_{21} & (\gamma_1+1)s_{31} \\ i(\gamma_1-1)s_{12} & i(\gamma_1-1)s_{22} & (\gamma_1+1)s_{32} \\ (\gamma_1+1)s_{13} & (\gamma_1+1)s_{23} & i(\gamma_1-1)s_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (41)$$

Позначимо одну з компонент власного вектора як  $R_2 = 1$  та розглянемо I і II рівняння (41). Отримаємо

$$\begin{bmatrix} i(\gamma_1-1)s_{11} & (\gamma_1+1)s_{31} \\ i(\gamma_1-1)s_{12} & (\gamma_1+1)s_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -i(\gamma_1-1)s_{21} \\ -i(\gamma_1-1)s_{22} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

З цієї системи рівнянь, одержуємо

$$R_1 = \frac{s_{22}s_{31} - s_{21}s_{32}}{D}, \quad R_3 = i\delta \frac{s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}}{D},$$

$$\text{де } D = s_{11}s_{32} - s_{12}s_{31}, \quad \delta = \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}.$$

Аналогічно взявши з (38) значення  $\gamma = \gamma_3 = 1$  і підставивши в (40) отримаємо

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & s_{31} \\ 0 & 0 & s_{32} \\ s_{13} & s_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Звідки слідує що  $R_3 = 0$ , а вибравши  $R_2 = 1$ , визначаємо значення  $R_1 = -s_{23} / s_{13}$ .

Для зручного представлення отриманих результатів, введемо наступні позначення  $r_{11} = \frac{s_{22}s_{31} - s_{21}s_{32}}{D}$ ,  $r_{13} = \delta \frac{s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}}{D}$ ,  $r_{31} = -s_{23} / s_{13}$ , після чого можна записати матрицю  $\mathbf{R}$ , скомпоновану з власних векторів, у вигляді

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 1 & ir_{13} \\ -r_{11} & 1 & -ir_{13} \\ r_{31} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

Враховуючи, що  $\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{S}$  отримаємо наступне представлення

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} it_{11} & it_{12} & t_{13} \\ it_{21} & it_{22} & t_{23} \\ it_{31} & it_{32} & 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Важливо зазначити, що всі елементи  $r_{ij}$  та  $t_{ij}$  в (43) та (44), відповідно, дійсні.

Використавши раніше отримані рівняння (35) та (43), можемо записати:

$$r_{j1}\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j3}E_1^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (j=1, 3) \quad (45)$$

де  $r_{33} = 0$ .

Враховуючи представлення (34), на його основі отримаємо

$$F^+(x_1) - F^-(x_1) = \mathbf{T} \{ \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1) \},$$

а також використовуючи формули (15) і (44), можна записати наступну рівність

$$it_{j1} \langle u'_3(x_1) \rangle + it_{j2} \langle w'_3(x_1) \rangle + t_{j3} \langle D_2(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (46)$$

при цьому  $t_{33} = 0$ .

### Електропровідна тріщина

Рівняння (45) та (46) можуть бути використані для формування та знаходження розв'язку різних антиплоских задач для 1D п'єзоелектричних біматеріальних квазікристалічних композитів зі змішаними граничними умовами. Розглянемо електропровідну тріщину  $c \leq x_1 \leq b$  на інтерфейсі  $x_2 = 0$  між двома півпросторами  $x_2 > 0$  і  $x_2 < 0$ , скомпонованими з 1D п'єзоелектричних квазікристалів, поляризованих в напрямку осі  $x_3$  (Рис. 1). Півпростори піддаються рівномірно розподіленому зсувному фонону  $\sigma_{23}^\infty$  та фазону  $H_{23}^\infty$  напруженням, а також електричному полю  $E_1^\infty$  на нескінченності. Сама ж тріщина вважається вільною від механічних навантажень. Такий тип зовнішніх полів навантажень призводять до антиплоского стану, а отже, можна розглядати переріз у площині, ортогональній  $x_3$ .

Граничні умови в такій задачі можна сформулювати у вигляді

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = H_{23}^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(1)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < b, \quad (47)$$

$$\langle \sigma_{23} \rangle = 0, \quad \langle H_{23} \rangle = 0, \quad \langle D_2 \rangle = 0, \quad \langle u'_3 \rangle = 0, \quad \langle E_1 \rangle = 0, \quad w'_3 = 0 \quad \text{для } x_1 \notin (c, b). \quad (48)$$

Умови (48) з використанням представлень (46) забезпечують неперервність функції  $F_1(z)$  на відрізках  $x_1 \notin (c, b)$  інтерфейсу матеріалу, а умова (47) з використанням (45) веде до наступного рівняння:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < b. \quad (49)$$

Беручи до уваги що для відрізка  $x_1 \notin (c, b)$  справедливі співвідношення  $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$ , на основі (45) одержуємо для  $x_1 \rightarrow \infty$

$$(1 + \gamma_j) F_j(x_1) = r_{j1} \sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j3} E_1^{(1)}(x_1, 0).$$

Але враховуючи що функції  $F_j(z)$  аналітичні у всій площині за виключенням відрізка  $x_1 \in (c, b)$  та використовуючи умови на нескінченності, з останнього рівняння отримаємо

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \quad (50)$$

$$\text{де } \tilde{\tau}_j = \frac{r_{j1}\tau^\infty + H_{23}^\infty}{1 + \gamma_j}, \tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}E^\infty}{1 + \gamma_j}, (j=1,2,3).$$

Розв'язок рівняння (49) за умов на нескінченності (50) було знайдено з використанням [15] у формі:

$$F_j(z) = (\tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j) \frac{z - (b+c)/2 - i\varepsilon_j l \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{ie_j}}{\sqrt{(z-c)(z-b)} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{ie_j}}, \quad (51)$$

$$\text{де } \varepsilon_j = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_j, l = b - c.$$

Фонон та фазон напруження, та електричне поле на інтерфейсі отримані з рівнянь (45), (51) у такій формі:

$$\begin{aligned} & r_{j1}\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j3}E_1^{(1)}(x_1, 0) = \\ & = (r_{j1}\tau^\infty + H_{23}^\infty + ir_{j3}E^\infty) \frac{x_1 - (b+c)/2 - i\varepsilon_j l \left(\frac{x_1-c}{x_1-b}\right)^{ie_j}}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)} \left(\frac{x_1-c}{x_1-b}\right)^{ie_j}} \end{aligned} \quad (52)$$

для  $x_1 > a$ .

Електричну індукцію та похідну від стрибка переміщення знайдемо на основі формул (46), (51) у вигляді

$$\begin{aligned} & it_{j1}\langle u'_3(x_1) \rangle + it_{j2}\langle w'_3(x_1) \rangle + t_{j3}\langle D_2(x_1) \rangle = \\ & = \frac{r_{j3}E^\infty - ir_{j1}\tau^\infty - iH_{23}^\infty}{\sqrt{\gamma_j}} \times \frac{x_1 - (b+c)/2 - i\varepsilon_j l \left(\frac{x_1-c}{b-x_1}\right)^{ie_j}}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)} \left(\frac{x_1-c}{b-x_1}\right)^{ie_j}} \end{aligned} \quad (53)$$

для  $c < x_1 < a$ .

Інтегруючи останню рівність, отримуємо

$$\begin{aligned} & it_{j1}\langle u_3(x_1) \rangle + it_{j2}\langle w_3(x_1) \rangle + t_{j3}\langle \widehat{D}_2(x_1) \rangle = \\ & = \sqrt{(x_1-c)(b-x_1)} \left\{ \frac{ir_{j1}\tau^\infty + iH_{23}^\infty - r_{j3}E^\infty \left(\frac{x_1-c}{b-x_1}\right)^{ie_j}}{\sqrt{\gamma_j}} \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

для  $c < x_1 < a$ ,

$$\text{де } \langle \widehat{D}_2(x_1, 0) \rangle = \int \langle D_2(x_1, 0) \rangle dx_1.$$

Всі необхідні компоненти фонон та фазон напружень та стрибків переміщення можуть бути отримані з рівнянь (52) та (54), розглядаючи їх при  $j=1$  та  $j=3$ , відповідно. З одержаних результатів видно, що біля вершин тріщини виникає коренева осциляційна особливість. Важливо, що ця особливість не призводить до взаємного проникнення берегів тріщини як в плоскому випадку [16]. До того ж області осциляції є дуже малими, тому отримані розв'язки є прийнятними для практичного використання.

### Чисельні результати та обговорення

У даному розділі основна увага буде приділена випадку електропровідних умов, які мають місце при наявності електродів на берегах тріщини. Використаємо для нижнього та верхнього матеріалів п'єзоелектричні квазікристали з наступними характеристиками [17]:

$$\begin{aligned} c_{44}^{(1)} &= 3.55 \times 10^{10} \text{ Па}, & e_{15}^{(1)} &= 17 \text{ К/м}^2, \\ K_2^{(1)} &= 0.15 \times 10^9 \text{ Па}, & R_3^{(1)} &= 1.765 \times 10^9 \text{ Па}, \\ \tilde{e}_{15}^{(1)} &= 17 \text{ К/м}^2, & \xi_{11}^{(1)} &= 15.1 \times 10^{-9} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) \end{aligned}$$

для верхнього матеріалу,

$$\begin{aligned} c_{44}^{(2)} &= 5.0 \times 10^{10} \text{ Па}, & e_{15}^{(2)} &= -0.318 \text{ К/м}^2, \\ K_2^{(2)} &= 0.3 \times 10^9 \text{ Па}, & R_3^{(2)} &= 1.2 \times 10^9 \text{ Па}, \\ \tilde{e}_{15}^{(2)} &= -0.16 \text{ К/м}^2, & \xi_{11}^{(2)} &= 8.25 \times 10^{-12} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) \end{aligned}$$

для нижнього матеріалу. Результати отримані для  $c = -0,05 \text{ м}$ ,  $b = 0,05 \text{ м}$ .

На Рис. 2 показані фононне  $\langle u_3 \rangle$  (а) і фазонне  $\langle w_3 \rangle$  (б) розкриття тріщини, побудовані для різних значень електричного поля  $E_1^\infty$ , а саме  $E_1^\infty = 5000 \text{ В/м}$  (криві I),  $0$  (криві II),  $-5000 \text{ В/м}$  (криві III) при  $\sigma_{23}^\infty = 10^5 \text{ Па}$ ,  $H_{23}^\infty = 0$ , а на Рис. 3 показані відповідні графіки цих же величин, побудовані при таких же значеннях електричного поля, що і на рисунку 2, і  $\sigma_{23}^\infty = 0 \text{ Па}$ ,  $H_{23}^\infty = 10^5 \text{ Па}$ . Як видно з цих рисунків, більший вплив на стрибки переміщення  $\langle u_3 \rangle$  та  $\langle w_3 \rangle$  викликає саме фазон навантаження, а вплив електричного поля є досить суттєвим.

Фонон напруження на правому продовженні тріщини, отримані при нульовому електричному полю і  $\sigma_{23}^\infty = 10^6 \text{ Па}$  (крива I),  $5 \times 10^5 \text{ Па}$  (II),  $10^5 \text{ Па}$  (III), наведені на Рис. 5. Легко помітити, що при зміні навантаження на нескінченності змінюються і значення полів напружень на продовженні тріщини. Водночас вплив електричного поля, прикладеного на нескінченності, не суттєво впливає на фонон та фазон напруження в околі тріщини.

**Висновки.** Досліджено нову задачу для електропровідної тріщини вздовж межі розділу двох зчеплених одновимірних п'єзоелектричних квазікристалічних півпросторів під дією антиплоского механічного навантаження і плоского електричного поля, перпендикулярного фронту тріщини. Сформульовані подання для напружень та електричного поля (33), а також для похідних від стрибка механічного та електричного переміщення (34) через вектор-функцію, голоморфну у всій комплексній площині, за винятком області тріщин. На основі цих рівнянь отримана задача лінійного спряження (37) з відповідними умовами на нескінченності (38) та побудований її аналітичний розв'язок. На основі цього розв'язку отримані аналітичні подання для фононних та фазонних напружень, стрибків переміщень та електричного поля уздовж межі розділу матеріалів. Виявлено,

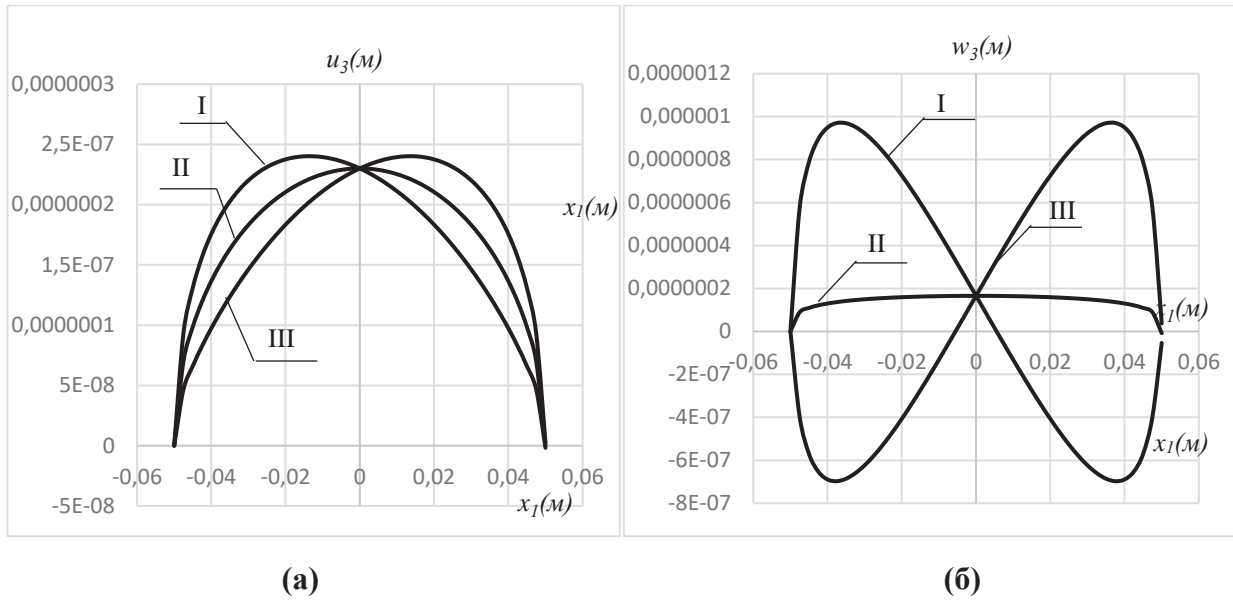


Рис. 2. Стрибок переміщення  $\langle u_3 \rangle$  (а) та  $\langle w_3 \rangle$  (б) в залежності від електричного поля  $E_1^\infty$  при  $\sigma_{23}^\infty = 10^5$  Па,  $H_{23}^\infty = 0$

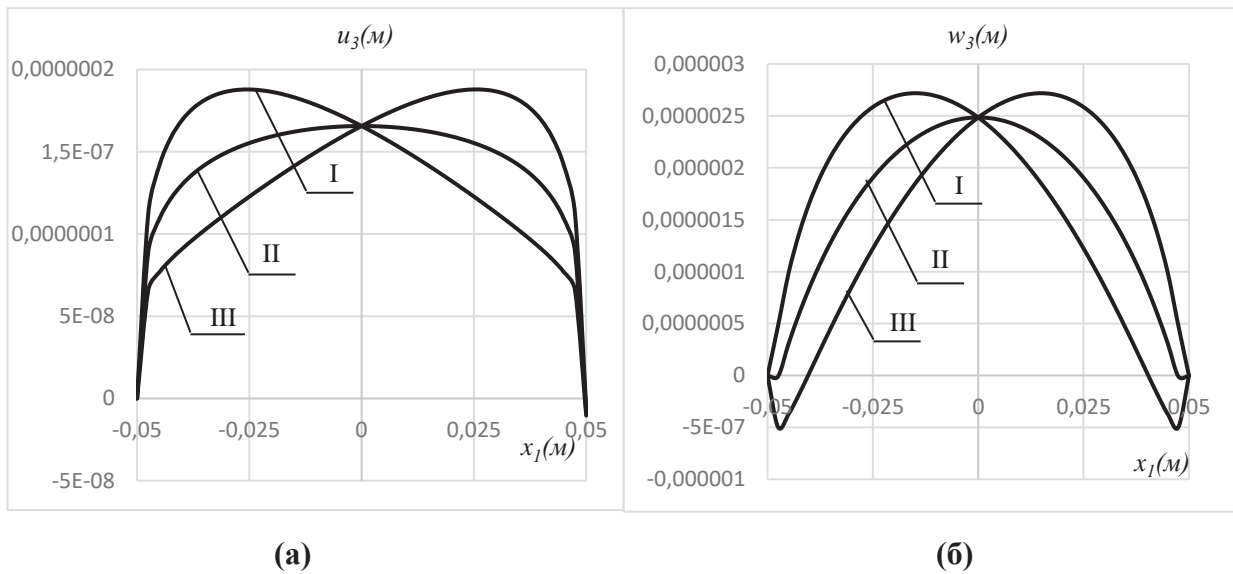


Рис. 3. Стрибок переміщення  $\langle u_3 \rangle$  (а) та  $\langle w_3 \rangle$  (б) в залежності від електричного поля  $E_1^\infty$  при  $\sigma_{23}^\infty = 0$  Па,  $H_{23}^\infty = 10^5$  Па

що отриманий розв'язок має осцилюючу кореневу особливість в околі вершин тріщини.

Для конкретної комбінації квазікристалічних матеріалів проведена чисельна реалізація отриманих результатів. У графічній формі представлені результати розрахунку фононних та фазон-

них компонент пружно-деформівного стану вздовж межі поділу матеріалів. Встановлено, що електричне поле, прикладене на нескінченності, особливо суттєво впливає на фазонні розкриття тріщини і менш суттєво на напруження в її околі.



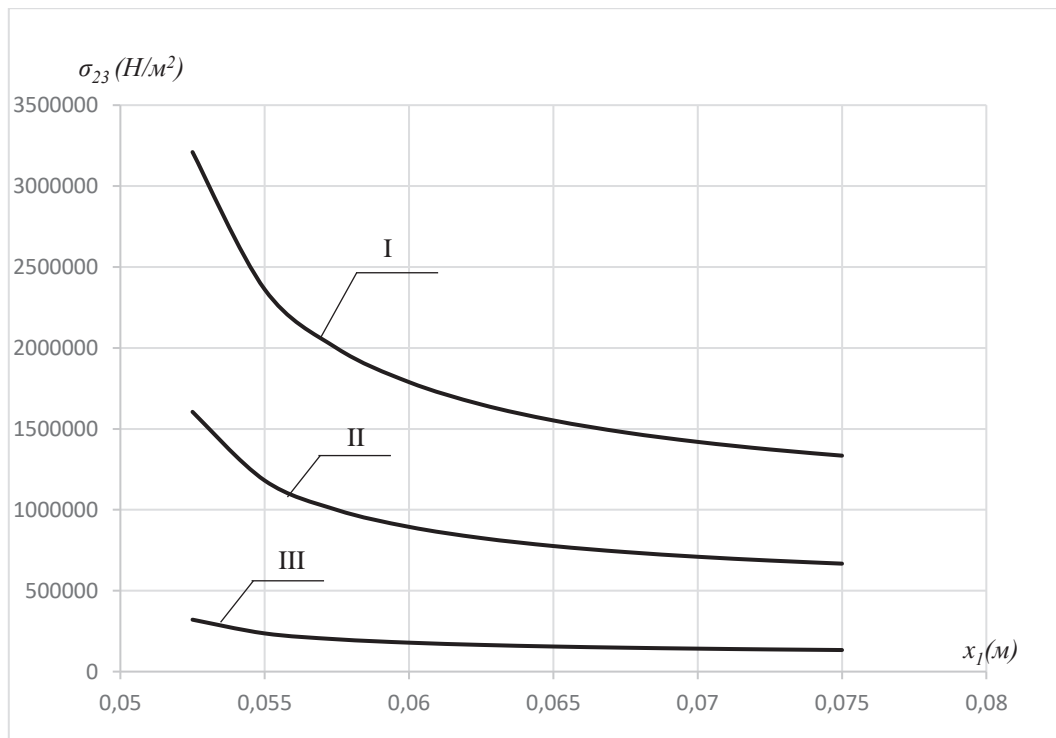


Рис. 4. Зміна фоновану напруження на продовженні тріщини, при  $E_1^\infty = 0B / m$  і різних значеннях зовнішнього зсувного напруження  $\sigma_{23}^\infty$ .

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Shechtman, D.; Blech, I.; Gratias, D.; Cahn J. W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters* 1984, 53 (20), 1951-1953. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1951.
2. Ding, D. H.; Yang W.; Hu C. Z.; Wang R. Generalized elasticity theory of quasicrystals. *Phys Rev B* 1993, 48:7003–10. DOI: 10.1103/PhysRevB.48.7003.
3. Hu C. Z.; Wang R. H.; Ding D. H. Symmetry groups, physical property tensors, elasticity and dislocations in quasicrystals. *Reports on Progress in Physics* 2000, 63 (1), 1-39. DOI: 10.1088/0034-4885/63/1/201.
4. Fan T. Y. *Mathematical theory of elasticity of quasicrystals and its applications*. Beijing: Springer, 2011.
5. Rao K. R. M.; Rao P. H.; Chaitanya B. S. K. Piezoelectricity in quasicrystals. *Pramana-Journal of Physics* 2007, 68 (3), 481-487. DOI: 10.1007/s12043-007-0051-3.
6. Altay G.; Dömeçi M. C. On the fundamental equations of piezoelectricity of quasicrystal media. *International Journal of Solids and Structures* 2012, 49 (23-24), 3255-3262. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2012.06.016.
7. Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 1: Theoretical solution. *Engineering Fracture Mechanics* 2017, 179, 59–78. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.019.
8. Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 2: Numerical method. *Engineering Fracture Mechanics* 2017, 180, 268-281. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.05.042.
9. Shi W. C.; Li H. H.; Gao Q. H. Interfacial cracks of antiplane sliding mode between usual elastic materials and quasicrystals. *Key Eng. Mater.* 2007, 340–341, 453–458. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.340-341.453.
10. Hu K. Q.; Jin H.; Yang Z.; Chen X. Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect. *Acta Mech.* 2019, 230, 2455–2474. DOI: 10.1007/s00707-019-02404-z.

11. Wang X.; Zhong Z. A conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix. *Int. J. Solids Struct.* 2002, 39, 5895–5911. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00474-2.
12. Wang X.; Zhong Z.; Wu F. L. A moving conducting crack at the interface of two dissimilar piezoelectric materials. *Int. J. Solids Struct.* 2003, 40, 2381–2399. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00060-X.
13. Onopriienko O.; Loboda V.; Sheveleva A.; Lapusta Y. Bond zone model for a conductive crack at the interface of piezoelectric materials under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Z Angew Math Mech.* 2019, e201800230. DOI: 10.1002/zamm.201800230.
14. Sheveleva A.; Loboda V.; Lapusta Y. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Math. Modeling* 2020, 87, 287-299. DOI: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
15. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen, 1975.
16. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics* 1988, 55, 98-103. DOI: 10.1115/1.3173668.
17. Zhou Y.-B.; Li X.-F. Exact solution of two collinear cracks normal to the boundaries of a 1D layered hexagonal piezoelectric quasicrystal. *Philos. Mag.* 2018, 98, 1780–1798. DOI: 10.1080/14786435.2018.1459057.