УДК 519.6:004.021
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-02

РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА II РОДУ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Вакал Л. П.
кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України
пр. Академіка Глушкова, 40, Київ, Україна
orcid.org/0000-0002-1658-5432
lara.vakal@gmail.com

Вакал Є. С.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної фізики
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 60, Київ, Україна
orcid.org/0000-0001-8581-9098
jvakal@gmail.com

Довгий Б. П.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної фізики
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 60, Київ, Україна
orcid.org/0000-0002-2468-3542
dovgiy_i_ko@i.ua

Ключові слова: *наближений розв'язок, інтегральна нев'язка, мінімум норми, оптимальні значення параметрів.*

У статті розглядається лінійне інтегральне рівняння Фредгольма II роду з невиродженим ядром. Наводиться огляд методів знаходження його наближених розв'язків. Вивчається випадок, коли за наближений розв'язок рівняння вибирається функція, що лінійно залежить від низки вільних параметрів. Оптимальні значення цих параметрів пропонується визначати з умови мінімуму відповідної норми інтегральної нев'язки, яка утворюється після підстановки вказаної функції в рівняння. У свою чергу, задача мінімізації норми нев'язки розглядається як оптимізаційна задача, і для її розв'язання використовується алгоритм диференціальної еволюції, призначений для пошуку глобального мінімуму (максимуму) функцій багатьох змінних. У цьому алгоритмі для популяції векторів, які представляють собою можливі розв'язки задачі мінімізації, моделюються базові процеси біологічної еволюції: схрещування, мутація та селекція, щоб сформувати наступну популяцію векторів, значення цільової функції (критерію мінімізації) яких будуть меншими, ніж у векторів попередньої популяції. Умовою закінчення алгоритму є досягнення заданого максимального числа популяцій. Координати вектора останньої популяції, який має найменше значення цільової функції, є оптимальними значеннями параметрів наближеного розв'язку. Алгоритм простий у програмній реалізації та застосуванні (містить мало параметрів налаштування), дозволяє використовувати різні норми інтегральної нев'язки (квадратичну, рівномірну, суму модулів значень нев'язки). Схема

запропонованого алгоритму модифікована порівняно зі стандартною і не містить операції схрещування. Це дозволило спростити алгоритм без шкоди для точності отриманих результатів. Як показав обчислювальний експеримент, для знаходження оптимальних значень параметрів цілком достатньо операцій мутації та селекції. Алгоритм імплементований у системі Matlab. Розглядаються приклади знаходження наближених розв'язків з використанням розробленого алгоритму, який можна розглядати як додатковий інструмент до відомих проекційних методів розв'язання рівнянь Фредгольма.

SOLVING FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND USING DIFFERENTIAL EVOLUTION

Vakal L. P.
Candidate of Technical Sciences, Senior Research Fellow
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Academician Glushkov avenue, 40, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-1658-5432
lara.vakal@gmail.com

Vakal Ye. S.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematical Phisics
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Volodymyrska str., 60, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8581-9098
jvakal@gmail.com

Dovgiy B. P.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematical Phisics
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Volodymyrska str., 60, Kyiv, Ukraine
orcid.org/0000-0002-2468-3542
dovgiy_i_ko@i.ua

Key words: *approximate solution, integral residual, minimum of norm, optimal values of parameters.*

Fredholm linear integral equation of the second kind with a nondegenerate kernel is considered in the paper. An overview of methods for finding its approximate solutions is given. We study a case when a function that linearly depends on a number of free parameters is chosen as the approximate solution of the equation. If we substitute the function into the equation, an integral residual is formed. It is proposed to determine optimal values of the parameters from minimum condition for a corresponding norm of the integral residual. We consider the problem of the residual norm minimization as an optimization problem and propose to use a differential evolution algorithm, which is designed to find a global minimum (maximum) of many variables functions. In this algorithm, basic processes of biological evolution – crossover, mutation and selection – are simulated for a population of vectors to form the next population of the vectors with smaller values of the objective function (minimization criterion).The vectors of these populations are the possible solutions of the minimization problem. If a given maximum number of the populations is reached, the evolutionary process in the algorithm ends. Coordinates of the vector of the last population, which has the smallest value of the objective function, are the optimal values of the parameters of the approximate solution. The algorithm is simple in software implementation and application (it contains few settings parameters), it allows to use different norms of integral residual (quadratic, uniform, a sum of residual values modules). The scheme of the proposed algorithm is modified compared to the standard scheme and it does not contain the crossover operation. This allowed simplifying the algorithm without compromising the accuracy of obtained results. A computational experiment has shown that mutation and selection operations are sufficient to find the optimal values of the parameters. The algorithm is implemented in Matlab. Examples of finding the approximate solutions using the algorithm are given. The proposed algorithm can be considered as an additional tool to the known projection methods for solving Fredholm equations.

Вступ. Інтегральні рівняння Фредгольма використовуються для опису різного роду крайових задач. У цьому сенсі вони еквівалентні звичайним диференціальним рівнянням із крайовими умовами. У роботі розглядається лінійне інтегральне неоднорідне рівняння Фредгольма II роду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x) . \qquad (1)$$

де $f(x)$ – задана функція, визначена на $[a,b]$, ядро $K(x,s)$ – задана функція, визначена у квадраті $Q(x,s) = \{a \le x \le b, a \le s \le b\}$, $y(x)$ – шукана функція (розв'язок рівняння) [1]. До таких інтегральних рівнянь приходять при математичному моделюванні, наприклад, в задачах визначення інтенсивності народження часток в атмосфері під впливом світлового потоку, оптимальної лінійної фільтрації за наявності білого шуму, в задачах про вимушені поперечні коливання струни та ін. [1; 2].

На практиці одним із найпоширеніших методів розв'язання рівняння (1) є метод заміни інтеграла скінченною сумою з використанням тієї чи іншої квадратурної формули (прямокутників, трапецій, Сімпсона тощо) [1; 3]. Значення $y_1, \ldots, y_m$ розв'язку у вузлах $x_1, \ldots, x_m$, які відповідають вибраній квадратурній формулі, знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. По цих значеннях за допомогою інтерполяції отримують наближений розв'язок інтегрального рівняння (1) на усьому відрізку $[a,b]$.

Для розв'язання рівняння (1) використовують також метод заміни ядра на вироджене [1; 3; 4]. Порядок системи рівнянь, яку необхідно розв'язувати у цьому методі, як правило, значно менший, ніж у методі квадратур. Для знаходження виродженого ядра, близького до заданого, використовують розклад $K(x,s)$ у ряд Тейлора або в ряд Фур'є [3], найкращу апроксимацію $K(x,s)$ білінійною комбінацією функцій однієї змінної [5–7] та ін.

Для розв'язання рівнянь Фредгольма II роду застосовуються ітераційні методи, наприклад, послідовних наближень [1; 3], простої ітерації [1], Положія [1], гомотопічного збурення [8; 9], декомпозиції Адоміана [9; 10] (деякі з них використовуються і у випадку нелінійних рівнянь).

Проекційні та варіаційні методи (моментів, колокації, найменших квадратів, Рітца тощо [1–5]) ґрунтуються на представленні наближеного розв'язку $y_n(x)$ рівняння (1) функцією певного вигляду

$$y_n(x) = \Phi(x; c_1, \ldots, c_n) , \qquad (2)$$

що залежить від параметрів $c_1, \ldots, c_n$. Невідомі c_i визначають таким чином, щоб мінімізувати деякий функціонал від інтегральної нев'язки, яка утворюється при підстановці функції $y_n(x)$ замість $y(x)$ в рівняння (1). Як правило, це приводить до необхідності розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $c_1, \ldots, c_n$. Проекційні методи можна застосовувати також для розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь, але у цьому випадку система для знаходження c_i буде нелінійною [3].

Як відомо, при розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь також використовується методи пошуку параметрів наближеного розв'язку шляхом мінімізації норми диференціальної нев'язки. У роботах [11; 12] було показано ефективність використання у таких випадках еволюційних алгоритмів, а саме диференціальної еволюції та генетичного алгоритму.

Мета роботи – адаптувати алгоритм диференціальної еволюції (ДЕ) для знаходження оптимальних значень параметрів наближених розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.

Формулювання задачі. Розглядаємо задачу знаходження наближеного розв'язку $y_n(x)$ лінійного інтегрального рівняння Фредгольма II роду (1) з невиродженим ядром. Вибираємо $y_n(x)$ у вигляді функції (2), що лінійно залежить від вільних параметрів $c_1, \ldots, c_n$

$$y_n(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x) , \qquad (3)$$

де $\phi_1, \ldots, \phi_n$ – задані лінійно незалежні функції, які називаються координатними. Функцію $\phi_0(x)$, зокрема, можна покласти $\phi_0(x) = f(x)$ або $\phi_0(x) = 0$. Після підстановки функції (3) в рівняння (1) і переносу усіх членів рівняння в один бік, отримуємо інтегральну нев'язку μ :

$$\mu(x; c_1, \ldots, c_n) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x) , \qquad (4)$$

де

$$\psi_0(x, \lambda) = \phi_0(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \phi_0(s) ds - f(x) ,$$

$$\psi_i(x,\lambda) = \phi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\phi_i(s)\,ds\ ,\ i = 1,\ldots,n .$$

Точний розв'язок перетворює нев'язку (4) в нуль. Слід зауважити, що при строгому розгляді питання близькості наближеного і точного розв'язків за величиною нев'язки потрібно залучення відповідних оцінок [13, 14].

Невідомі коефіцієнти $c_1,\ldots,c_n$ будемо визначати з умови

$$\left\|\mu(x;c_1,\ldots,c_n)\right\| \to \min_{c_1,\ldots,c_n} , \quad (5)$$

де $\|\cdot\|$ – деяка задана норма функції. На практиці найпопулярніші такі норми:

– квадратична

$$\left\|\mu(x;c_1,\ldots,c_n)\right\|_2 = \sum_{k=1}^{m} \mu^2(x_k;c_1,\ldots,c_n)\ , \quad (6)$$

– рівномірна (або чебишовська)

$$\left\|\mu(x;c_1,\ldots,c_n)\right\|_C = \max_{k=1,\ldots,m} \left|\mu(x_k;c_1,\ldots,c_n)\right|, \quad (7)$$

– сума модулів значень функції

$$\left\|\mu(x;c_1,\ldots,c_n)\right\|_1 = \sum_{k=1}^{m} \left|\mu(x_k;c_1,\ldots,c_n)\right|, \quad (8)$$

де $x_1,\ldots,x_m$ – точки деякої сітки $E_m \subset [a,b]$.

Якщо $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$, то взявши достатньо велику кількість параметрів n, можна знайти розв'язок $y(x)$ інтегрального рівняння (1) з будь-якою наперед заданою точністю [4, с. 172].

При традиційному підході для кожної з перелічених норм використовується свій метод пошуку оптимальних значень параметрів, на яких досягається мінімум відповідної норми інтегральної нев'язки. Наприклад, у випадку норми (6) застосовується метод найменших квадратів (дискретний варіант) [3, 4], в якому прирівняють до нуля похідні функції (6) по $c_1,\ldots,c_n$. У випадку норми (7) використовують методи і програмні засоби найкращого рівномірного наближення функції узагальненим поліномом [15; 16].

У статті для знаходження оптимальних значень параметрів $c_1,\ldots,c_n$ пропонується адаптувати алгоритм диференціальної еволюції (ДЕ) [17], який розроблено для пошуку глобального оптимуму недиференційовних, нелінійних, мультимодальних функцій багатьох змінних. Алгоритм простий у програмній реалізації, дозволяє використовувати різні норми нев'язки [12; 18] і потребує обчислення лише значень цільової функції (критерію оптимізації), але не її похідних.

Алгоритм. Алгоритм ДЕ входить у групу еволюційних алгоритмів, які моделюють базові процеси біологічної еволюції – схрещування, мутацію та селекцію. В алгоритмі ДЕ еволюційний процес починається зі створення початкової популяції векторів, які у закодованому вигляді представляють собою можливі розв'язки задачі оптимізації [17]. До них послідовно застосовуються операції мутації, схрещування і селекції, щоб сформувати наступну популяцію векторів, значення цільової функції яких будуть кращими, ніж у векторів попередньої популяції. Вказана послідовність повторюється до тих пір, поки не виконається задана термінальна умова [17].

Схема алгоритму для розв'язання рівняння (1) модифікована порівняно з описаною вище стандартною схемою ДЕ і не містить операції схрещування. Як показано в [12], для створення потрібного різноманіття векторів популяції можна обмежитися операцією мутації, оскільки вплив схрещування на еволюцію при розв'язанні подібної задачі вкрай незначний.

Нижче наводиться покрокова схема алгоритму ДЕ для знаходження оптимальних значень параметрів наближеного розв'язку рівняння (1).

1. Генерується початкова популяція базових векторів $V_i = (v_{i1},\ldots,v_{in})$, $i = 1,\ldots,N$, де N – розмір популяції. Координати $v_{i1},\ldots,v_{in}$ вектора V_i – випадкові дійсні числа з відрізку $[-1,\ 1]$ (у наступних популяціях значення координат можуть виходити далеко за межі вказаного проміжку).

2. Для кожного базового вектора $V_i = (v_{i1},\ldots,v_{in})$ обчислюються значення цільової функції $F(V_i)$:

$$F(V_i) = \left\|\mu(x;v_{i1},\ldots,v_{in})\right\|,\ i = 1,\ldots,N . \quad (9)$$

Для цього відрізок $[a,b]$ замінюється сіткою $E_m = \{x_1,\ldots,x_m\}$ з m точок, і на цій сітці в залежності від вибраної норми наближення – квадратичної, рівномірної або суми модулів значень функції – обчислюється норма μ за формулами (6), (7) або (8) відповідно.

3. Для базового вектора V_i створюється мутантний вектор $\hat{V}_i$:

$$\hat{V}_i = V_{r_1} + Fm \cdot (V_{r_2} - V_{r_3})\ ,\ i = 1,\ldots,N\ ,$$

де $Fm \in (0,2]$ – заданий коефіцієнт мутації, r_1, r_2, r_3 – випадкові цілі числа з проміжку $[1, N]$, $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$, і за формулою (9) обчислюється $F(\hat{V}_i)$.

4. За допомогою селекції здійснюється формування наступної популяції векторів. Якщо $F(\hat{V}_i) < F(V_i)$, то в наступну популяцію включається вектор $\hat{V}_i$, у протилежному випадку – базовий вектор V_i.

5. Якщо кількість популяцій не перевищує задане максимальне число популяцій *Gen*, то здійснюється перехід на п. 3. У протилежному випадку – в популяції з номером *Gen* визначається вектор V^*, який має найменше значення цільової функції $F(V^*) = \min_i F(V_i)$, і алгоритм завершується. Координати вектора V^* представляють собою оптимальні значення $c_1^*,\ldots,c_n^*$ коефіцієнтів наближеного розв'язку (3) інтегрального рівняння (1).

Розмір популяції *N*, коефіцієнт мутації *Fm* і максимальне число популяцій *Gen* є параметрами налаштування запропонованого алгоритму ДЕ. При розв'язанні задачі (5) рекомендується вибирати *N* і *Fm* у таких діапазонах: $5n \le N \le 10n$, $0{,}4 \le Fm \le 0{,}6$. Вибір параметра *Gen* залежить від числа невідомих коефіцієнтів n. З ростом n доцільно збільшувати і значення параметра *Gen* (див. далі приклади 1 і 2).

Аналіз результатів обчислювального експерименту. Запропонований алгоритм ДЕ реалізовано засобами системи комп'ютерної математики Matlab, і проведено обчислювальний експеримент по розв'язанню низки тестових рівнянь Фредгольма II роду. Далі наведено приклади розв'язання інтегральних рівнянь за алгоритмом ДЕ та порівняння отриманих наближених розв'язків з відомими точними розв'язками.

<u>Приклад 1</u>. Розв'язується інтегральне рівняння [4]

$$y(x) - \int_0^1 \frac{s^2 y(s)}{x^2 + s^2} ds = x\, arctg \frac{1}{x}. \qquad (10)$$

Його наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_2(x) = c_1 + c_2 x.$$

У цьому випадку інтегральна нев'язка має вигляд

$$\mu(x; c_1, c_2) = -c_1 x\, arctg \frac{1}{x} +$$

$$+ c_2 \left[x - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right] - x\, arctg \frac{1}{x}.$$

За алгоритмом ДЕ з параметрами $N = 20$, $Fm = 0{,}5$ і $Gen = 30$ знайдено такі оптимальні значення коефіцієнтів і цільової функції для випадку рівномірної норми (7) на рівномірній сітці E_{101}:

$$c_1^* = -1,\ c_2^* = -1,\ F(V^*) \equiv \left\| \mu(x; c_1^*, c_2^*) \right\|_C = 0.$$

Отже, шуканим розв'язком рівняння (10) є функція $y_2(x) = -1$. Рівність цільової функції нулю свідчить про те, що знайдений розв'язок $y_2(x)$ є точним (це також легко перевірити, підставивши його у рівняння).

<u>Приклад 2</u>. Розв'язується інтегральне рівняння [1]

$$y(x) - \int_{-1}^{1} (xs + x^2) y(s) ds = 1. \qquad (11)$$

Наближений розв'язок рівняння (11) шукаємо у вигляді

$$y_3(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}, \qquad (12)$$

де за координатні функції взято поліноми Лежандра. При підстановці функції (12) у рівняння (11) маємо інтегральну нев'язку

$$\mu(x; c_1, c_2, c_3) = c_1(1 - 2x^2) + c_2 \frac{x}{3} + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} - 1.$$

За алгоритмом ДЕ з налаштуваннями $N = 30$, $Fm = 0{,}6$ і $Gen = 60$ на рівномірній сітці E_{201} отримано такі результати:

$$c_1^* = 3,\ c_2^* = 0,\ c_3^* = 4,$$

$$F(V^*) \equiv \left\| \mu(x; c_1^*, c_2^*, c_3^*) \right\|_2 = 0.$$

Таким чином, наближеним розв'язком рівняння (11) є $y_3(x) = 1 + 6x^2$. Легко перевірити, що це точний розв'язок рівняння (11).

Висновки. У статті для знаходження оптимальних значень параметрів наближених розв'язків лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду адаптовано алгоритм ДЕ. Він простий у програмній реалізації та застосуванні (містить мало параметрів налаштування), дозволяє використовувати різні норми інтегральної нев'язки і потребує обчислення лише значень цільової функції, але не її похідних. Схема алгоритму модифікована порівняно зі стандартною і не містить операції схрещування. Це дозволило спростити алгоритм без шкоди для точності. Як показали результати обчислювального експерименту на тестових прикладах, для знаходження оптимальних значень параметрів шуканих наближених розв'язків цілком достатньо операцій мутації та селекції. Запропонований алгоритм можна розглядати як додатковий інструмент до відомих проекційних методів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма II роду. У подальшому планується поширити підхід із використанням ДЕ на нелінійний випадок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы*. Київ : Наукова думка, 1986. 544 с.
2. Федорчук В.А., Іванюк В.А., Верлань Д.А. *Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання*. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. 144 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений. Т.2.* Москва : Наука, 1966. 640 с.
4. Манжиров А.В., Полянин А.Д. *Методы решения интегральных уравнений. Справочник.* Москва : Факториал, 1999. 272 с.
5. Вакал Л.П. Застосування чебишовської апроксимації при розв'язанні інтегральних рівнянь. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2011. № 10. С. 78–84.
6. Верлань Д.А. Градиентный алгоритм билинейной аппроксимации ядер при решении интегральных уравнений Фредгольма II-го рода. *Электронное моделирование*. 2013. Т. 35, № 1. С. 73–80.

7. Вакал Є., Вакал Ю., Вакал Л. Найкраща апроксимація ядра інтегрального рівняння Фредгольма з використанням генетичного алгоритму. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2016. Вип. 2 (36). С. 17–22.
8. Ganji D. D., Afrouzi G. A., Hosseinzadeh H., Talarposhti R. A. Application of homotopy-perturbation method to the second kind of nonlinear integral equations. *Physics Letters A*. 2007. Vol. 371, N 1–2. P. 20–25.
9. Abbasbandy S. Numerical solutions of the integral equations: homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*. 2006. Vol. 173, N 1. P. 493–500.
10. Babolian E., Biazar J., and A. R. Vahidi A.R. The decomposition method applied to systems of Fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*. 2004. Vol. 148, N 2. P. 443–452.
11. Vakal L.P. Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, N 8. P. 52–62. URL: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.50.
12. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь за алгоритмом диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2020. № 1. С. 43–52. URL : https://doi.org/10.34121/1028-9763-2020-1-43-52.
13. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. Москва : Наука, 1970. 512 с.
14. Zemyan S.M. *The classical theory of integral equations: a concise treatment*. New York : Birkhauser Boston Inc., 2012. 344 p.
15. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Пакет программ аппроксимации функцій. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2008. № 7. С. 32–38.
16. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 6. P. 49–59. URL : https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50.
17. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.
18. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв'язання перевизначеної системи трансцендентних рівнянь з використанням диференціальної еволюції. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*. 2017. Вип. 15. С. 24–30.

REFERENCES

1. Verlan' A.F., Sizikov V.S. (1986) *Integral'nyye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kyiv: Naukova dumka. (in Russian).
2. Fedorchuk V.A., Ivanyuk V.A., Verlan' D.A. (2014) *Intehral'ni rivnyannya v zadachakh matematychnoho modelyuvannya* [Integral equations in mathematical simulation problems]. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi national university. (in Ukrainian).
3. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1966) *Metody vychisleniy. T. 2* [Methods of computations/ V. 2]. Moscow: Nauka. (in Russian).
4. Manzhirov A.V., Polyanin A.D. (1999) *Metody resheniya integral'nykh uravneniy. Spravochnik* [Methods for solving integral equations. Handbook]. Moscow: Factorial. (in Russian).
5. Vakal L.P. (2011) Zastosuvannya chebyshovs′koyi aproksymatsiyi pry rozv″yazanni intehral′nykh rivnyan′ [Using chebyshev approximation to solve integral equations]. *Computer means, networks and systems*, no. 10, pp. 78–84. (in Ukrainian).
6. Verlan' D.A. (2013) Gradiyentnyy algoritm bilineynoy approksimatsii yader pri reshenii integral'nykh uravneniy Fredgol'ma II roda [Gradient algorithm for kernels bilinear approximation for solving Fredholm integral equations of the second kind*]. Electronic modeling*, vol. 35, no. 1, pp. 73–80. (in Russian).
7. Vakal Ye., Vakal Yu., Vakal L. (2016) Naykrashcha aproksymatsiya yadra intehral′noho rivnyannya Fredhol′ma z vykorystannyam henetychnoho alhorytmu [Best approximation of Fredholm integral equation kernel with using genetic algorithm]. *Bulletin Taras Shevchenko national university of Kyiv. Mathematics. Mechanics*, no. 2 (36). pp. 17–22. (in Ukrainian).
8. Ganji D. D., Afrouzi G. A., Hosseinzadeh H., Talarposhti R. A. (2007) Application of homotopy-perturbation method to the second kind of nonlinear integral equations. *Physics Letters A*, vol. 371, no. 1–2, pp. 20–25.
9. Abbasbandy S. (2006) Numerical solutions of the integral equations: homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 173, no. 1, pp. 493–500.

10. Babolian E., Biazar J., Vahidi A.R. (2004) The decomposition method applied to systems of Fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 148, no. 2, pp. 443–452.
11. Vakal, L.P. (2015). Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 47, no. 8, pp. 52–62. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.50.
12. Vakal, L.P., Vakal, Y.S. (2020). Rozviazannia kraiovykh zadach dlia zvychainykh dyferentsialnykh rivnian za alhorytmom dyferentsialnoi evoliutsii [Solving boundary value problems for ordinary differential equations with differential evolution algorithm]. *Mathematical machines and systems,* no. 1, pp. 43–52. (in Ukrainian).
13. Mikhlin S.G. (1970) *Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow: Nauka. (in Russian).
14. Zemyan S.M. (2012) *The classical theory of integral equations: a concise treatment*. New York: Birkhauser Boston Inc.
15. Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal L.P. (2008) Paket programm approksimatsii funktsiy [Function approximations package]. *Computer means, networks and systems*, no. 7, pp. 32–38. (in Russian).
16. Vakal, L.P. (2016) Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 48, no.6, pp. 49–59. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i6.50.
17. Storn, R., Price, K. (1997). Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, vol. 11, pp. 341–359.
18. Vakal L.P., Vakal Ye.S. (2017) Rozv″yazannya perevyznachenoyi systemy transtsendentnykh rivnyan′ z vykorystannyam dyferentsial′noyi evolyutsiyi [Solving an overdermined system of transcendental equations using differential evolution]. *Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences*, vol. 15, pp. 24–30. (in Ukrainian).