УДК 519.175
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-06

РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ЧИСЛА НЕІЗОМОРФНИХ (*n*,*m*)-ГРАФІВ

Стєганцева П. Г.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри загальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0001-8871-139X
stegpol@gmail.com

Артеменко А. О.
аспірант
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-6536-3086
krummisvafiklettagja@gmail.com

Ключові слова: *вектор степенів графа, ізоморфізм, інваріант, звичайний граф, непомічений граф, перетворення.*

Задача перерахування графів та підрахунку їх числа включає задачі перерахування та підрахунку числа помічених і числа непомічених графів. Друга з них вважається більш складною. Виділяють також задачі перерахування графів спеціального виду. Наприклад, помічених звичайних неорієнтованих графів, помічених звичайних орієнтованих графів, помічених зв'язних неорієнтованих графів, помічених дерев, непомічених гусениць та інших. Класичним результатом щодо перерахування графів вважають теорему Редфілда-Пойї, яка випливає з леми Бернсайда.

Граф G з n вершинами та m ребрами називають (n,m)-графом. Два (n,m)-графа називаються ізоморфними, якщо існує бієкція між множинами вершин, яка зберігає їх суміжність. Ця стаття присвячена задачі підрахунку числа $T(n,m)$ неізоморфних звичайних (n,m)-графів з використанням поняття вектора степенів графа. Вектор степенів графа є його неповним інваріантом відносної изоморфізмів. Послідовності чисел $T(n,m)$ для $n \le 20$ можна знайти в Online енциклопедії цілочислових послідовностей під номером A008406. У цій статті досліджено властивості вказаної таблиці, одна з яких демонструє залежність між кількостями всіх попарно неізоморфних графів з m ребрами та кількостями вершин, що відрізняються на один. Показано, що коли в сукупності всіх попарно неізоморфних (n,m)-графів присутній граф з вектором степенів (1,1,…,1), то $n = 2m$.

Отримано рекурентні співвідношення, що дозволили знайти деякі не наведені в таблиці кількості неізоморфних графів з n вершинами та m ребрами при $n > 20$. Для доведення рекурентних співвідношень введено поняття редукції вектора степенів графа (Р-перетворення). За допомогою Р-перетворення досліджено зв'язок між наборами попарно неізоморфних графів з однаковими кількостями ребер та різними кількостями вершин. Для підтвердження отриманих результатів була використана відома формула Харарі для знаходження числа неізоморфних звичайних графів.

THE RECURRENCE RELATIONS FOR THE NUMBER OF THE NONISOMORPHIC (*n*,*m*)-GRAPHS

Stegantseva P. G.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Senior Lecturer at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0001-8871-139X
stegpol@gmail.com

Artemenko A. O.
Postgraduate Student
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-6536-3086
krummisvafiklettagja@gmail.com

Key words: *degree sequence of graph, isomorphism, invariant, simple graph, unlabeled graph, transformation.*

The problem connected with the enumeration and the calculation of the graphs includes the problems connected with the enumeration and calculation of the labeled graphs and the unlabeled graphs. The second one is considered to be more difficult. There are also the problems connected with the enumeration of the graphs of certain type. For example, the enumeration of the labeled ordinary nondirected graphs, the labeled ordinary directed graphs, the labeled connected nondirected graphs, the labeled trees, the unlabeled trees and the others. Redfield – Polya theorem, which follows from Burnside lemma, is the classical result on the enumeration of the graphs.

The graph G with n vertices and m edges is called (n,m)-graph. Two (n,m)-graphs are called the isomorphic ones if the bijection exists between the sets of the vertices, which preserves their adjacency. The article deals with the problem connected with the calculation of $T(n,m)$ nonisomorphic ordinary (n,m)-graphs using the concept of the vector of the degrees of the graph. The vector of the degrees of the graph is its noncomplete invariant with respect to the isomorphisms. The sequences of the numbers $T(n,m)$ for $n \le 20$ can be found in the Online Encyclopedia of Integer Sequences under the number A008406. The properties of this table have been studied in the present article. One of these properties expresses the relation between the quantity of all pairwise nonisomorphic graphs with m edges and the number of vertices which differ by 1. It has been shown that if the collection of all pairwise nonisomorphic (n,m)-graphs contains the graph with the vector of the degrees (1,1,…,1), then $n = 2m$.

The recurrence relations, which give an opportunity to find certain numbers of the nonisomorphic graphs with n vertices and m edges under $n > 20$ which are not given in the table, have been obtained. The concept of the reduction of the vector of the degrees of the graph (P-transformation) has been introduced in order to prove the recurrence relations. The relation between the collections of the pairwise nonisomorphic graphs with the same number of the edges and the different number of the vertices has been studied with the help of P-transformation. The well-known Harary formula for the finding of the number of the nonisomorphic simple graphs has been used in order to confirm the correctness of the obtained results.

Вступ. Проблема ізоморфності графів є однією з основних задач теорії графів і поки що нерозв'язаною. Питанню перерахування неізоморфних непомічених графів приділялась увага у наукових роботах Харарі та Палмера. В цих роботах використовувався метод Пойа, який передбачає побудову групи підстановок та використання інваріантів цієї групи відносно ізоморфізмів. Зокрема, в роботі [1] кількість графів із заданим числом вершин та ребер подається у вигляді многочлену степеня C_n^2, де n – кількість вершин графа. Аналогічний підхід, пов'язаний з теорією інваріантів, було використано в роботі [2] у разі виведення формули для генеруючої функції кількості простих графів з n вершинами. Ще один варіант формули для обчислення кількості непомічених графів з'явився у результаті досліджень науковців з Нижнього Новгорода [3]. Відомий досить великий перелік інваріантних властивостей графів стосовно ізоморфізмів, які ефективно застосовуються для доведення неізоморфності графів. Зокрема, є цілий ряд так званих алгебраїчних інваріантів графа, які є предметом сучасних досліджень, як теоретичних, так і комп'ютерних [4]. Однією з таких властивостей є вектор степенів графа – неспадна послідовність степенів всіх вершин графа [5]. Позначають зазвичай $S(G)=(s_1,s_2,...,s_n)$, де s_i – степінь вершини v_i. Очевидно, що вектори степенів ізоморфних графів співпадають, але обернене не завжди точне. У такому разі інваріант називають неповним.

Для звичайних графів, що розглядаються у статті, поняття вектора степенів графа використовується для дослідження властивостей числової таблиці, яка дає число $T(n,m)$ неізоморфних (n,m)-графів для $n \in N \setminus \{1\}, m \in N \bigcup \{0\}$. Фрагмент таблиці зображено на рисунку 1.

n \ m	Ø	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
II	1	1														
III	1	1	1	1												
IV	1	1	2	3	2	1	1									
V	1	1	2	4	6	6	6	4	2	1	1					
VI	1	1	2	5	9	15	21	24	24	21	15	9	5	2	1	1

Рис. 1. Фрагмент таблиці чисел неізоморфних (n,m)-графів

У кожному рядку равновіддалені від його кінців елементи дорівнюють числу неізоморфних (n,m)-графів та (n,C_n^2-m)-графів. Ці числа рівні меж собою, оскільки з неізоморфності графів випливає неізоморфність їх доповнень.

Елементи таблиці можна також записати у вигляді послідовності. Вона наведена в Online енциклопедії цілочислових послідовностей під номером A008406 [6] і містить числа з 20 рядків таблиці. Для знаходження в цій послідовності числа $T(n,m)$ при $n \le 20$ та будь-якому $m=\overline{0,C_n^2}$ користуються формулою $\dfrac{(n-2)^3+6m+8}{6}$, яка у разі заданих значень m та n дає номер шуканого члена послідовності.

У цій статті отримано рекурентні співвідношення, що дозволяють обчислити деякі з елементів у 21–26 рядках вказаної таблиці.

1. Зв'язок між наборами неізоморфних графів з m ребрами та деякі властивості таблиці

Сформулюємо два очевидні твердження.

Твердження 1. Якщо в кожному з двох неізоморфних (n,m)-графів є принаймні одна ізольована вершина, то $(n-1,m)$-графи, отримані з таких графів видаленням однієї ізольованої вершини, також будуть неізоморфними. Обернено якщо два (n,m)-графа неізоморфні, то $(n+1,m)$-графи, отримані з них додаванням однієї ізольованої вершини, також неізоморфні.

Твердження 2. Нехай *M* – сукупність усіх попарно неізоморфних (n,m)-графів. Тоді у сукупності всіх попарно неізоморфних $(n+1,m)$-графів є підмножина, еквівалентна множині *M*, кожен граф якої отримується з деякого графа множини *M* додаванням однієї ізольованої вершини.

Твердження 3. Якщо у сукупності всіх попарно неізоморфних (n,m)-графів є граф з вектором степенів (1,1,…,1), то $n=2m$.

Доведення. Розглянемо граф з вектором степенів (1,1,…,1). Оскільки число ребер дорівнює m, то сума степенів усіх вершин за лемою про рукопотискання дорівнює $2m$, а оскільки кожна вершина має степінь 1, то число вершин дорівнює $2m$. Відзначимо, що $(2m,m)$-граф з вектором степенів (1,1,…,1) є єдиним графом без ізольованих вершин у сукупності всіх попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів.

Твердження 4. Нехай k – число всіх попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів. Тоді число всіх попарно неізоморфних (n,m)-графів за будь-якого $n>2m$ також дорівнює k.

Доведення випливає з тверджень 2 та 3. Із твердження 4 випливає, що в m-тому стовпці таблиці досить знайти числа в рядках з номерами до $2m$ включно, тобто в наведеній таблиці відомі всі елементи стовпців з номерами до 10 включно.

Твердження 5. Нехай k – число всіх попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів. Тоді число всіх попарно неізоморфних $(2m-1,m)$-графів дорівнює $k-1$.

Доведення. Серед k попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів тільки один має вектор степенів $\underbrace{(1,1,...,1)}_{2m}$, усі інші $k-1$ графів мають принаймні одну ізольовану вершину. У відповідності до твердження 2 після видалення з кожного графа однієї ізольованої вершини отримаємо набір з

$k-1$ попарно неізоморфних $(2m-1,m)$-графів, що і треба довести.

2. Редукція вектора степенів графа (Р-перетворення)

Означення 1. Нехай $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ – вектор степенів (n,m)-графа G. Нехай для деякого i виконується нерівність $s_i \geq 2$ і (v_i,v_j) – одне з ребер, інцидентних вершині v_i. Додамо до графа нову ізольовану вершину v_{n+1}. Ребро (v_i,v_j) видалимо, а ребро (v_j,v_{n+1}) додамо. Тоді степінь вершини v_i зменшиться на 1, а степінь нової вершини буде рівною 1. Будемо говорити, що виконано перетворення графа G, й називати його Р-перетворенням.

За допомогою Р-перетворення можна описати перехід від набора попарно неізоморфних $(2m-k,m)$-графів при $k>0$ до набору попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів. У відповідності до твердження 2 у множині всіх попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів є підмножина, еквівалентна множині всіх попарно неізоморфних $(2m-k,m)$-графів. Виділимо з множини всіх попарно неізоморфних $(2m-k,m)$-графів підмножину графів без ізольованих вершин. Серед них немає графа з вектором степенів (1,1,…,1), оскільки тоді у відповідності до твердження 3 число вершин було б рівне $2m$. Застосуємо до них Р-перетворення, понизивши степінь однієї з вершин на 1. Отримаємо набір попарно неізоморфних $(2m-k+1,m)$-графів без ізольованих вершин. Якщо серед них немає графа з вектором степенів (1,1,…,1), то до нового набору графів знову застосуємо Р-перетворення. Зрозуміло, що після k-того кроку отримаємо $(2m,m)$-граф з вектором степенів (1,1,…,1). Для отримання повного набору попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів треба всі отримані графи доповнити необхідною кількістю ізольованих вершин. Цей прийом застосовується в доведенні теореми 1.

3. Доведення рекурентних співвідношень

Теорема 1. Нехай $T(n,m)$ – число попарно неізоморфних (n,m)-графів. Тоді мають місце такі співвідношення:

$$T(2m,m)=T(2m,1)+T(2m-1,m),\ m>1 \quad (1)$$

$$T(2m,m)=T(2m,2)+T(2m-2,m),\ m>2 \quad (2)$$

$$T(2m,m)=T(2m,3)+T(2m-3,m),\ m>3 \quad (3)$$

$$T(2m,m)=T(2m,4)+T(2m-4,m)+1,\ m>5 \quad (4)$$

$$T(2m,m)=T(2m,5)+T(2m-5,m)+4,\ m>7 \quad (5)$$

$$T(2m,m)=T(2m,6)+T(2m-6,m)+4,\ m>9 \quad (6)$$

Доведення. З таблиці та твердження 4 маємо: $T(2m,1)=T(2,1)=1$ при $m>1$; $T(2m,2)=T(4,2)=2$ при $m>2$; $T(2m,3)=T(6,3)=5$ при $m>3$; $T(2m,4)=T(8,4)=11$ при $m>4$; $T(2m,5)=T(10,5)=26$ при $m>5$; $T(2m,6)=T(12,6)=68$ при $m>6$. Тотожність (1) безпосередньо випливає з рівності $T(2m,1)=T(2,1)=1$ та твердження 5. Зупинимось, наприклад, на доведенні тотожності (3).

Нехай $T(2m-3,m)=k$. Розглянемо ті з цих графів, які не мають ізольованих вершин. Їх вектори степенів можуть мати тільки один з видів $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-4}4)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-5}2,3)$ и $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-6}2,2,2)$. При $m>5$ можливі 7 попарно неізоморфних графів G_1, $G_2,\ldots,G_7$ з такими векторами степенів. На рисунку 2 вони зображені при $m=6$ При $m>6$ ці графи доповнюються компонентами зв'язності, які є $(2,1)$-підграфами. При $m=5$ з цього набору треба видалити граф G_1, а при $m=4$ – графи G_1, G_2 та G_5.

Будемо поступово додавати до цих графів по одній вершині, одночасно виконуючи Р-перетворення. Нам треба зробити три кроки, щоб отримати графи з $2m$ вершинами. На кожному кроці у відповідності до означення 1 $(2,1)$-підграфи не перетворюються.

Після першого кроку отримаємо набір з трьох графів G_1', G_2' та G_3' (рисунок 3). Вектори їх степенів мають вигляд $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-3},3)$ та $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-4},2,2)$.

На другому кроці графи G_1', G_2', G_3' перетворюються в один і той самий граф G'', який

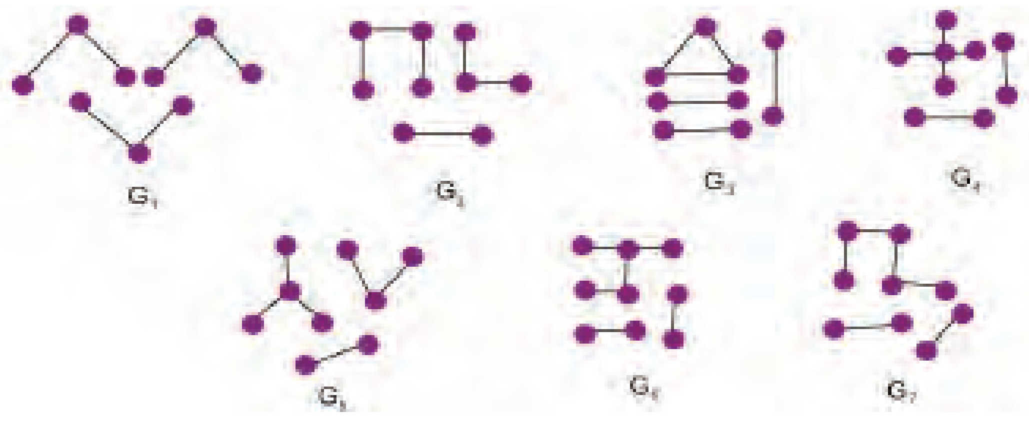

Рис. 2. Графи без ізольованих вершин при $m=6$

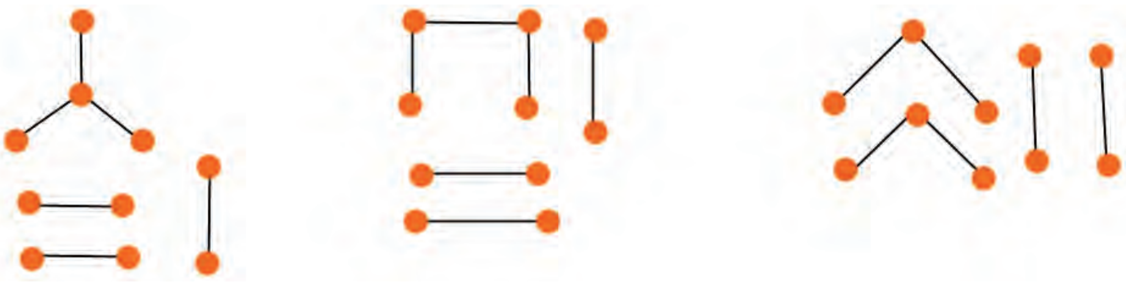

Рис. 3. Графи G'_1, G'_2, G'_3 при $m=6$

складається з $(2,1)$-підграфів й одного $(3,2)$-підграфа, та має вектор степенів вигляду $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-2},2)$ Нарешті, після третього кроку отримаємо граф G з вектором степенів $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m})$, тобто він складається з m штук $(2,1)$-підграфів.

Повний набір попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів складається з k вихідних графів, доповнених трьома ізольованими вершинами, графів G'_1, G'_2, G'_3, доповнених двома ізольованими вершинами, графа G'', доповненого однією ізольованою вершиною, та графа G. Тотожність (3) доведена.

Для доведення тотожності (4) покладемо $T(2m-4,m)=k$. Серед них маємо графи без ізольованих вершин з векторами степенів вигляду $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-5}5)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-6}24)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-6}33)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-7},2,2,3)$ та $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-8},2,2,2,2)$. Після Р-перетворення цих графів при $m>5$ отримаємо 7 попарно неізоморфних графів з $2m-3$ вершинами. Наступне Р-перетворення дасть три графа з $2m-2$ вершинами. На наступному кроці отримаємо один граф з вектором степенів $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-2}2)$. Останнє Р-перетворення дасть граф з вектором степенів $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m})$. Таким чином, повний набір попарно неізоморфних $(2m,m)$-графів складається з $k+12$ графів і це число співпадає з правою частиною співвідношення (4). Відзначимо, що при $m=5$ має місце рівність $T(2m,m)=T(2m,4)+T(2m-4,m)$.

Аналогічно доводяться співвідношення (5) та (6). Зрозуміло, що зі зростанням m збільшується й число графів без ізольованих вершин у сукупності неізоморфних $(2m-k,m)$-графів. Відзначимо, що необов'язково зображувати ці графи, оскільки їх кількість не має значення. Досить аналізувати $(2m-k+1,m)$–графи, які отримуються у результаті першої редукції. Їх вектори степенів отримуються з векторів степенів $(2m-k,m)$-графів додаванням до них зліва нуля (це відповідає додаванню до графа ізольованої вершини), а потім заміною нуля одиницею з одночасним зменшенням на 1 степінь однієї з вершин. Наприклад, у разі співвідношення (5) маємо $(2m-5,m)$-графи без ізольованих вершин з векторами степенів вигляду $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-6},6)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-7},2,5)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-7},3,4)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-8},2,3,3)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-8},2,2,4)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-9},2,2,2,3)$ та $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-10},2,2,2,2,2)$. Після першої редукції отримаємо вектори степенів вигляду $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-5},5)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-6},2,4)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-6},3,3)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-7},2,2,3)$ та $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-8},2,2,2,2)$. Існує 18 попарно неізоморфних $(2m-4,m)$-графів без ізольованих вершин з такими векторами степенів. Після другої редукції набір векторів степенів стає таким: $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-4},4)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-5},2,3)$, $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-6},2,2,2)$. Відповідних їм графів буде 7. Після третьої редукції маємо вектори степенів $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-3},3)$ та $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-4},2,2)$ і три відповідних їм попарно неізоморфних графів. Далі отримаємо $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m-2},2)$ і єдиний можливий граф. І, нарешті, остання редукція приводить до графа з вектором степенів $(\underbrace{1,1,...,1}_{2m})$. Таким чином, якщо $T(2m-5,m)=k$, то ліва та права частини рівності (5) набудуть значення $k+30$. При $m=6$ та $m=7$ мають місце рівності $T(2m,m)=T(2m,5)+T(2m-5,m)+1$ та $T(2m,m)=T(2m,5)+T(2m-5,m)+3$ відповідно. При $m=8$ та $m=9$ мають місце рівності $T(2m,m)=T(2m,6)+T(2m-6,m)+1$ та $T(2m,m)=T(2m,6)+T(2m-6,m)+3$ відповідно. В цьому можна переконатись безпосередньо, скориставшись таблицею.

4. Обчислення деяких відсутніх у таблиці елементів

З доведених співвідношень випливає ряд інших рекурентних співвідношень, наприклад:

$$T(2m-1,m)=T(2m-2,m)+1,\ m>2 \qquad (7)$$

$$T(2m-2,m)=T(2m-3,m)+3,\ m>3 \qquad (8)$$

n \ m	Ø	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
XIX	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4612	15211	52914	193186
XX	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15214	52932	193295
XXI	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15215	52939	193337
XXII	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52942	193355
XXIII	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52943	193362
XXIV	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193365
XXV	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193366
XXVI	1	1	2	5	11	26	68	177	497	1476	4613	15216	52944	193367

Рис. 4. Новий фрагмент таблиці чисел неізоморфних (n,m)-графів

$$T(2m-2,m)=T(2m-4,m)+10\,,\ m>5 \qquad (9)$$

$$T(2m-3,m)=T(2m-5,m)+25\,,\ m>7 \qquad (10)$$

$$T(2m-3,m)=T(2m-6,m)+67\,,\ m>9 \qquad (11)$$

$$T(2m-2,m)=T(2m-6,m)+70\,,\ m>9 \qquad (12)$$

$$T(2m-2,m)=T(2m-5,m)+28\,,\ m>7 \qquad (13)$$

При $m=11$ зі співвідношення (7) отримаємо $T(21,11)=T(20,11)+1=15215$. Тоді зі співвідношення (1) знайдемо $T(22,11)=T(21,11)+1=15216$. При $m=12$ зі співвідношення (10) отримаємо $T(21,12)=T(19,12)+25=52914+25=52939$, а зі співвідношення (9) $T(22,12)=T(20,12)+10=$ $=52932+10=52942$. Знову зі співвідношення (7) знайдемо $T(23,12)=T(22,12)+1=52942+1=$ $=52943$, а зі співвідношення (2) $T(24,12)=$ $=T(22,12)+2=52942+2=52944$.

Співвідношення (12) дає можливість обчислити елемент $T(24,13)$. Отримаємо $T(24,13)=$ $=T(20,13)+70=193295+70=193365$. А далі з (13) $T(24,13)=T(21,13)+28$, звідки $T(21,13)=$ $=193365-28=193337$. З (9) $T(24,13)=T(22,13)+$ $+10$, звідки $T(22,13)=193365-10=193355$. З (8) $T(24,13)$ = $T(23,13)$ + 3. Значить, $T(23,13)=$ $=193365-3=193362$. Тепер обчислимо $T(25,13)$ та $T(26,13)$, додамо до $T(24,13)$ одиницю та двійку відповідно.

На рисунку 4 зображено новий фрагмент таблиці. Таким чином, тепер відомі всі елементи стовпців з номерами до 13 включно.

Для перевірки отриманих результатів була використана відома формула Харарі для знаходження числа неізоморфних звичайних графів [1]. Обчислення елементів у рядках таблиці здійснювалось на персональному комп'ютері за допомогою спеціально створених програм. Результати обчислень за формулою Харарі та за знайденими у цій роботі рекурентними співвідношеннями виявились однаковими. Цей факт свідчить про ефективність використання властивостей таблиці та перспективність їх подальшого дослідження для знаходження можливостей заповнення таблиці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Харари Ф., Палмер Э.М. Перечисление графов / пер. с англ. Г.П. Гаврилов. Москва : Мир, 1977. 328 с.
2. Bedratyuk L., Bedratyuk A. A new formula for the generating function of the number of simple graphs. 2016. URL: https://arxiv.org/pdf/1512.06355.pdf.
3. Алексеев В.Е., Захарова Д.В. Теория графов. Нижний Новгород : Нижегородский университет, 2017. 119 с.
4. Thiery N. Algebraic invariants of graphs: a study based on computer exploration. *ACM SIGSAM Bulletin*, 2000, Vol. 34, No. 3, pp. 9–20.
5. Емеличев В.А. Лекции по теории графов. Москва : Наука, 1990. 276 с.
6. A008406. The online encyclopedia of integer sequences. URL: https://oeis.org/A008406.

REFERENCES

1. Harari, F., Palmer, E.M. (1977). *Perechislenie grafov* [Enumeration of graphs]. Moscow: Mir [in Russian].
2. Bedratyuk, L., Bedratyuk, A. (2016). A new formula for the generating function of the number of simple graphs. Retrieved from: https://arxiv.org/pdf/1512.06355.pdf.
3. Alekssev, V.E., Zaharova, D.V. (2017). *Teoria grafov* [Theory of graphs]. Nizhny Novgorod: Nizhegorodskiy universitet [in Russian].
4. Thiery, N. (2000). Algebraic invariants of graphs: a study based on computer exploration. *ACM SIGSAM Bulletin*, Vol. 34, No. 3, pp. 9–20.
5. Emelichev, V.A. (1990). *Lekcii po teorii grafov* [Lectures in theory of graphs]. Moscow: Nauka [in Russian].
6. A008406. The online encyclopedia of integer sequences. Retrieved from: https://oeis.org/A008406.