

УДК 539.3
DOI <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2021-1-10>

ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ ШТАМПІВ ІЗ РІЗНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ НА ГРАНИЦІ ІЗОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

Шевельова Н. В.

*аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна
orcid.org/0000-0003-2135-4599
nataliya.shevelyova@gmail.com*

Ходанен Т. В.

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49000, Україна
orcid.org/0000-0001-9194-3634
hodanen@mmf.dnu.edu.ua*

Ключові слова: штамп,
нормальні та дотичні
напруження, переміщення,
аналітичний розв'язок.

Розглянуто проблему взаємодії двох штампів із плоскими підпошвами, що взаємодіють з пружною ізотропною півплощиною. Вважається, що один штамп жорстко зчеплений із півплощиною, а другий знаходиться з нею в умовах гладкого контакту. Для розв'язання задачі використовуються представлення Колосова-Мухелішвілі напружень і переміщень через кусково-аналітичні функції. Із використанням цих представлень і на основі граничних умов сформульовано задачу лінійного спряження, яка складається із комбінації рівнянь Діріхле і Рімана, записаних на відповідних ділянках границі півплощини. Ця задача називається комбінованою крайовою задачею Діріхле-Рімана. Розв'язок задачі представлено, використовуючи два канонічні розв'язки з необхідною поведінкою при підході до кутових точок штампів. Невідомі коефіцієнти цього розв'язку знаходяться з умов на нескінченності та умов рівноваги штампів із трансцендентного рівняння, коефіцієнти якого знаходяться шляхом чисельного інтегрування.

Знайдений розв'язок дозволив представити усі необхідні фактори на границі півплощини в досить простому аналітичному вигляді. Зокрема, знайдено формули, що дають можливість знайти осадку кожного штампу та форму вільної границі півплощини після деформації. Записано також формули, що визначають розподіл напружень під штампами. Показано, що розв'язок біля кутових точок жорстко зчепленого штампів має осцилюючу кореневу особливість, а біля кутових точок гладкого штампів – звичайну кореневу.

Для конкретних значень ширини штампів, відстаней між ними та величин зовнішнього навантаження одержано числові результати, які проілюстровано графічно. Побудовано графіки зміни переміщень границі півплощини біля штампів, а також графіки зміни нормального та дотичного напружень під зчепленим штампом і тільки нормального – під гладким. Виявлено, що зона затухання переміщень при віддаленні від штампів суттєво перевищує їхню ширину.

AN INTERACTION OF RIGIDLY COUPLED AND SLIPPING STAMPS ON THE BOUNDARY OF AN ISOTROPIC HALF-PLANE

Shevelova N. V.

*Postgraduate Student at the Department of Theoretical and Computer Mechanics
Oles Honchar Dnipro National University
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49010, Ukraine
orcid.org/0000-0003-2135-4599
nataliya.shevelyova@gmail.com*

Khodanen T. V.

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Theoretical and Computer Mechanics
Oles Honchar Dnipro National University
Gagarin avenue, 72, Dnipro, 49010, Ukraine
orcid.org/0000-0001-9194-3634
hodanen@mmf.dnu.edu.ua*

Key words: *stamp, normal and shear stresses, displacement, analytical solution.*

The problem of interaction of two stamps with flat bases which are contacted with an elastic isotropic half-plane is considered. It is assumed that one stamp is rigidly coupled to the half-plane, and the other is in smooth contact with it. To solve the problem, the Kolosov-Muskhelishvili representations of stresses and displacements through piecewise analytic functions are used. Applying these representations and satisfying the boundary conditions, the problem of linear relationship is formulated. It consists of a combination of Dirichlet and Riemann equations written on the corresponding sections of the half-plane boundary. This problem is called the combined Dirichlet-Riemann boundary value problem. The solution of the problem is presented by means of two canonical solutions that have the necessary behavior when approaching the corner points of the stamps. The unknown coefficients of this solution are found by means of the conditions at infinity and the conditions of equilibrium of the stamps. This leads to a transcendental equation, the coefficients of which are found by numerical integration.

The obtained solution allowed us to present all the necessary factors at the boundary of the half-plane in a fairly simple analytical form. In particular, formulas have been found that make it possible to find the sinking of each stamp and the shape of the free boundary of the half-plane after deformation. Formulas that determine the distribution of stresses under the stamps have also been found. It is shown that the solution at the corner points of a rigidly coupled stamp has an oscillating root singularity, and at the corner points of a smooth stamp it has a normal root singularity.

For specific values of the stamps width, the distances between them and the values of the external load, numerical results are obtained. They are illustrated graphically. The variations of displacements around the stamps are shown, as well as the graphs of the normal and tangential stresses under the rigidly coupled stamp are given whilst only normal stress is shown under the smooth stamp. It was found that the zone of attenuation of displacements at a distance from the stamps significantly exceeds their width.

Вступ. Задачі про дію штампів на пружні тіла активно вивчаються протягом останніх десятиліть у зв'язку з їхньою практичною важливістю. Результати досліджень по цій тема-

тиці наведено в багатьох публікаціях і, зокрема, в монографіях та підручниках К. Джонсона [1], В.М. Александрова і М.І. Чебакова [2], В.І. Острика [3]. У них детально розглянуто

гладкі і зчеплені штампи, а також більш складні випадки контакту за наявності областей зчеплення і проковзування в області контакту [4–6]. Задачі про дію декількох штампів на пружні тіла вивчалися у роботах [7–9].

Слід зазначити, що поодинокі штампи вивчені досить добре, але проблема стає значно складнішою при дії на границю пружного тіла декількох штампів. Особливо це проявляється для випадків різних граничних умов у контактних зонах різних штампів. Якраз такий випадок і розглядається у даній роботі, а саме вивчаються особливості деформування двох штампів, що діють на пружну півплощину за умови, що один із них жорстко зчеплений із півплощиною, а під підшоною іншого штампів тертя відсутнє. У рамках вказаної постановки одержані нові результати, що ілюструють осадку кожного із штампів та напруження під ними залежно від їх взаємного розташування, навантаження та геометричних характеристик.

тати, що ілюструють осадку кожного із штампів та напруження під ними залежно від їх взаємного розташування, навантаження та геометричних характеристик.

Постановка задачі. Розглянемо два штампи $a \leq x \leq b$ і $c \leq x \leq d$, які діють на границю $y = 0$ ізотропної півплощини $y \leq 0$ (рис. 1) під дією сил P_1 та P_2 . Будемо вважати, що штамп, підшою якого співпадає з $x \in [a, b]$, є зчепленим з півплощиною, а штамп $x \in [c, d]$ є таким, що проковзує. Вважаємо також, що штампи можуть переміщуватися лише вертикально. Півплощина характеризується коефіцієнтом Пуассона ν_0 , модулем зсуву μ , $\kappa = 3 - 4\nu_0$.

Будемо вважати, що підшови штампів плоскі. Тоді граничні умови на різних частинах границі півплощини мають вигляд:

$$u(x, 0) = r_0, \quad v(x, 0) = r_1 \quad \text{для } x \in [a, b], \quad (1)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = r_2 \quad \text{для } x \in [c, d], \quad (2)$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad \text{для } x \notin \{[a, b] \cup [c, d]\}, \quad (3)$$

де $a < b < c < d$.

Тут r_0, r_1, r_2 – дійсні сталі, які підлягають визначенню.

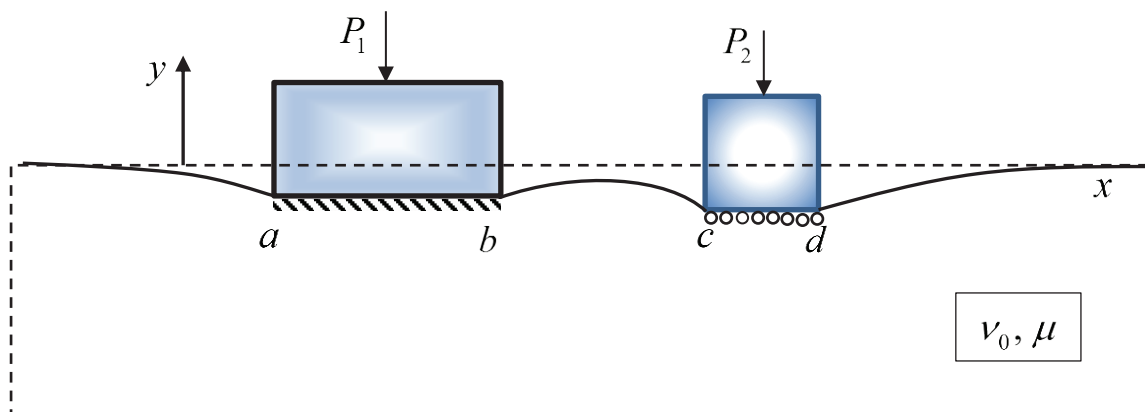


Рис. 1. Штампи $a \leq x \leq b$ і $c \leq x \leq d$ на межі $y = 0$ ізотропної півплощини

Комбінована крайова задача Діріхле-Римана. Розв'язок задачі будемо шукати у формі Мусхелішвілі [10]:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (4)$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

де функція $\Phi(z)$ є аналітичною в площині комплексної змінної $z = x + iy$ з розрізами вздовж $[a, b]$ та $[c, d]$ і має в вузлових точках не більш ніж інтегровані особливості. Вважаючи відсутність напружень і обертання на нескінченності, маємо [10]:

$$\Phi(z) = i \frac{P_1 + P_2}{2\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (6)$$

Рівняння (4), (5) при $y \rightarrow -0$ приймають вигляд:

$$\sigma_y^- - i\tau_{xy}^- = \Phi^-(x) - \Phi^+(x), \quad (7)$$

$$2\mu(u' + iv')^- = \kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x). \quad (8)$$

Із рівнянь (3) і (7) очевидно, що функція $\Phi(z)$ не має стрибків при переході через частини границі півплощини поза штампами. Водночас задоволення граничних умовам (1) і (2) за допомогою (7) і (8) приводить до рівнянь

$$\Phi^+(x) + \kappa\Phi^-(x) = 0 \text{ для } a \leq x \leq b, \quad (9)$$

$$\operatorname{Im}[\Phi^-(x) - \Phi^+(x)] = 0, \quad \operatorname{Im}[\kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x)] = 0 \text{ для } c \leq x \leq d. \quad (10)$$

Останні два рівняння можна записати у вигляді:

$$\operatorname{Im}\Phi^\pm(x) = 0 \text{ для } c \leq x \leq d. \quad (11)$$

Рівняння (9), (11) являють собою комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана відносно функції $\Phi(z)$. На основі [11] загальний розв'язок цієї задачі може бути записаний у вигляді:

$$\Phi(z) = R_1(z)X_1(z) + R_2(z)X_2(z), \quad (12)$$

де

$$R_1(z) = C_1z^2 + C_2z + C_3, \quad R_2(z) = D_1z + D_2. \quad (13)$$

$$X_1(z) = \frac{ie^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}, \quad X_2(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad (14)$$

$$\varphi(z) = 2\gamma \ln \left[\sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \frac{\sqrt{(d-b)(z-c)} + \sqrt{(c-b)(z-d)}}{\sqrt{(d-a)(z-c)} + \sqrt{(c-a)(z-d)}} \right], \quad \gamma = \frac{\ln(\kappa)}{2\pi}. \quad (15)$$

При цьому $X_1(z)$ має кореневі особливості при $z=c$ та $z=d$, а $X_2(z)$ обмежена і відмінна від нуля в точках $z=c$ та $z=d$.

При $z \rightarrow \infty$ з (14) і (15) отримаємо

$$\varphi(z) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (16)$$

$$X_1(z) = \frac{ie^{i\beta_0}}{z^2} \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^4}\right), \quad (17)$$

$$X_2(z) = \frac{e^{i\beta_0}}{z} \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad (18)$$

$$\text{де } \beta_0 = 2\gamma \ln \left[\frac{\sqrt{d-b} + \sqrt{c-b}}{\sqrt{d-a} + \sqrt{c-a}} \right], \quad \beta_1 = \gamma \left[\sqrt{(c-a)(d-a)} - \sqrt{(c-b)(d-b)} \right].$$

Знаходження невідомих коефіцієнтів. Невідомі коефіцієнти C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 можна знайти з умов на нескінченності та умов рівноваги штампів. Враховуючи, що при $z \rightarrow \infty$ мають місце співвідношення (17), (18) отримаємо такий вираз для $\Phi(z)$ на нескінченності:

$$\Phi(z) = ie^{i\beta_0} \left(C_1 + \frac{C_2}{z} + \frac{C_3}{z^2} \right) \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + e^{i\beta_0} \left(D_1 + \frac{D_2}{z} \right) \left[1 + \frac{1}{z} \left(i\beta_1 + \frac{a+b}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (19)$$

Прирівнюючи вирази при z^0 та z^{-1} до відповідних складових правої частини (6), приходимо до такої системи двох лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів C_1, C_2, D_1, D_2 :

$$\begin{cases} ie^{i\beta_0} C_1 + e^{i\beta_0} D_1 = 0, \\ ie^{i\beta_0} \left[C_2 + C_1 \left(i\beta_1 + \frac{a+b+c+d}{2} \right) \right] + e^{i\beta_0} \left[D_2 + D_1 \left(i\beta_1 + \frac{a+b}{2} \right) \right] = i \frac{P_1 + P_2}{2\pi}. \end{cases} \quad (20)$$

З цієї системи отримуємо

$$C_1 = D_1 = 0, \quad C_2 = \frac{P_1 + P_2}{2\pi} \cos \beta_0, \quad D_2 = \frac{P_1 + P_2}{2\pi} \sin \beta_0. \quad (21)$$

З умови рівноваги штампа, що проковзує, маємо:

$$\int_c^d \sigma_y dx = P_2. \quad (22)$$

За формулою (7) на $[c, d]$ маємо:

$$\sigma_y(x, 0) = \operatorname{Re}[\Phi^-(x) - \Phi^+(x)],$$

але, з урахуванням першого рівняння (10), можемо записати:

$$\sigma_y(x, 0) = \Phi^-(x) - \Phi^+(x). \quad (23)$$

Використовуючи далі представлення (12), отримуємо:

$$\Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) = -R_1(x) \frac{e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}} - R_2(x) \frac{e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)}}{\sqrt{(x-c)(x-a)}}, \quad (24)$$

де

$$\varphi_0(x) = \gamma \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(c-a)(d-x)}}{\sqrt{(d-a)(x-c)}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(c-b)(d-x)}}{\sqrt{(d-b)(x-c)}} \right), \quad (25)$$

Комбінуючи (23), (24), і підставляючи в (22), отримуємо:

$$\int_c^d \left\{ \frac{(C_1x^2 + C_2x + C_3)(e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}} + \frac{(D_1x + D_2)(e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right\} dx = -P_2. \quad (26)$$

Невідомий коефіцієнт C_3 може бути представлений у вигляді:

$$C_3 = -(Y_2 + C_1I_2 + C_2I_1 + D_1J_1 + D_2J_0) / I_0, \quad (27)$$

де інтеграли

$$I_k = \int_c^d \frac{x^k (e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)}) dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$J_m = \int_c^d \frac{x^m (e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)}) dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}, \quad m = 0, 1,$$

можна легко знайти чисельно.

Поведінка механічних факторів на границі півплощини. Розглянемо поведінку механічних факторів на ділянках під штампамі та на вільних ділянках границі півплощини.

На основі формули (8) для $x \notin \{[a, b] \cup [c, d]\}$ одержуємо таку формулу для похідних від переміщень:

$$2\mu(u'(x, 0) + iv'(x, 0)) = (1 + \kappa)\Phi^-(x).$$

Обчислюючи на основі формули (12) вирази для $\Phi^-(x)$ на різних ділянках вільної поверхні границі півплощини, одержуємо для $x > d \cup x < a$:

$$u'(x, 0) + iv'(x, 0) = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \left\{ P(x) \frac{ie^{i\varphi(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} \{\pm\} Q(z) \frac{e^{i\varphi(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right\}. \quad (28)$$

При цьому знак «+» у внутрішніх дужках $\{\}$ береться для $x > d$, а «-» для $x < a$.

Для проміжку $b < x < c$:

$$2\mu(u'(x, 0) + iv'(x, 0)) = (\kappa + 1) \left[\frac{e^{i\varphi_{bc}(x)}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left(\frac{-iP(x)}{\sqrt{(c-x)(d-x)}} + Q(x) \right) \right], \quad (29)$$

$$\text{де } \varphi_{bc}(x) = 2\gamma \ln \left[\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} \frac{\sqrt{(d-b)(c-x)} + \sqrt{(c-b)(d-x)}}{\sqrt{(d-a)(c-x)} + \sqrt{(c-a)(d-x)}} \right]. \quad (30)$$

Нормальне і тангенціальне переміщення на різних ділянках границі отримані шляхом інтегрування формул (28) та (29).

Для обчислення напружень під зчепленим штампом на ділянці $[a, b]$ використовуємо формулу (7), а також враховуємо, що

$$\Phi^-(x) = \kappa^{-1} \Phi^+(x) \text{ для } a \leq x \leq b.$$

У результаті отримуємо:

$$\sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0) = \frac{2\sqrt{\alpha}e^{i\varphi^*(x)}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \left(\frac{P(x)}{\sqrt{(c-x)(d-x)}} + iQ(x) \right) \text{ для } a \leq x \leq b. \quad (31)$$

$$\text{де } \varphi^*(x) = 2\gamma \ln \left[\frac{\sqrt{x-a} \sqrt{(d-b)(c-x)} + \sqrt{(c-b)(d-x)}}{\sqrt{b-x} \sqrt{(d-a)(c-x)} + \sqrt{(c-a)(d-x)}} \right]. \quad (32)$$

На ділянці контакту $[c, d]$ штампу, що проковзує, враховуємо, що $\tau_{xy}(x,0) = 0$ на цій ділянці. Тоді для нормального напруження для $x \in [c, d]$ отримуємо:

$$\sigma_y(x,0) = \frac{-P(x)(e^{2\varphi_0(x)} + e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(d-x)}} - \frac{Q(x)(e^{2\varphi_0(x)} - e^{-2\varphi_0(x)})}{\sqrt{(x-c)(x-a)}}. \quad (33)$$

Слід відзначити, що отримана формула добре узгоджується з виразом для нормального напруження під гладким штампом [11].

Числові результати та їх аналіз. Числові результати отримані для $\mu = 8 \times 10^{10} \text{ Па}$, $\nu_0 = 0,3$ та при різних значеннях ширини штампів, відстаней між ними та величин зовнішнього навантаження.

На рис. 2 показано залежність вертикальних переміщень штампів від їхньої ширини, які знайдені при $P_1 = -10^6 \text{ Н/м}$, $P_2 = 10^6 \text{ Н/м}$. Лінія I відповідає випадку двох однакових штампів $a = -0,005 \text{ м}$, $b = 0,015 \text{ м}$, $c = 0,03 \text{ м}$, $d = 0,05 \text{ м}$, лінія II – $a = -0,01 \text{ м}$, $b = 0,01 \text{ м}$, $c = 0,025 \text{ м}$, $d = 0,055 \text{ м}$ (правий штамп є ширшим), лінія III – $a = -0,01 \text{ м}$, $b = 0,04 \text{ м}$, $c = 0,055 \text{ м}$, $d = 0,075 \text{ м}$ (лівий штамп є ширшим). Наведено тільки переміщення в околі штампів. На ділянках же, віддалених від точок a вліво і d вправо, зображені криві рівномірно продовжуються і сходяться до нульових значень по осі y .

На рис. 3 для тих же геометричних і силових параметрів, що на рис. 2, наведено графіки нормальних напружень під штампами. Видно, що зі збільшенням ширини штампів інтенсивність напружень зменшується.

На рис. 4 наведено графіки дотичних напружень під першим штампом. Видно, що напруження залишається сингулярним при підході до границь області контакту, але його величина зменшується порівняно з нормальним напруженням.

Розглянемо тепер залежність переміщень штампів від зусиль, які до них прикладено. Нехай геометричні характеристики штампів є фіксованими: $a = -0,01 \text{ м}$, $b = 0,01 \text{ м}$, $c = 0,025 \text{ м}$, $d = 0,045 \text{ м}$ (правий штамп є ширшим), відстань між штампями ($c - b$) також є фіксованою.

На рис. 5 показано залежність вертикальних переміщень для трьох варіантів зовнішніх сил, прикладених до штампів. Лінія I відповідає випадку $P_1 = -10^6 \text{ Н/м}$, $P_2 = 10^6 \text{ Н/м}$, лінія II – $P_1 = P_2 = 0,25 \times 10^6 \text{ Н/м}$, лінія III – $P_1 = 0,5 \times 10^6 \text{ Н/м}$, $P_2 = 10^5 \text{ Н/м}$.

На рис. 6 показано залежність нормального напруження під правим штампом для трьох варіантів зовнішніх сил, прикладених до штампів, при $a = -0,01 \text{ м}$, $b = 0,01 \text{ м}$, $c = 0,025 \text{ м}$, $d = 0,055 \text{ м}$. Лінія I відповідає випадку

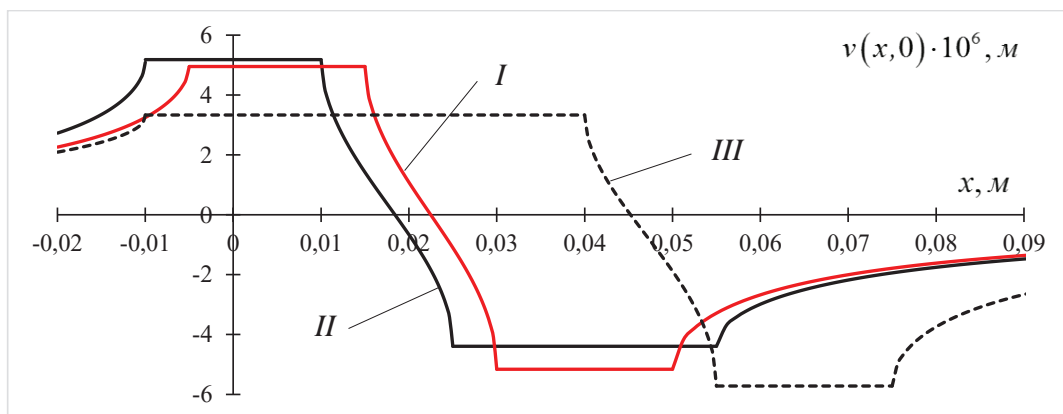


Рис. 2. Залежність вертикальних переміщень штампів від їхньої ширини

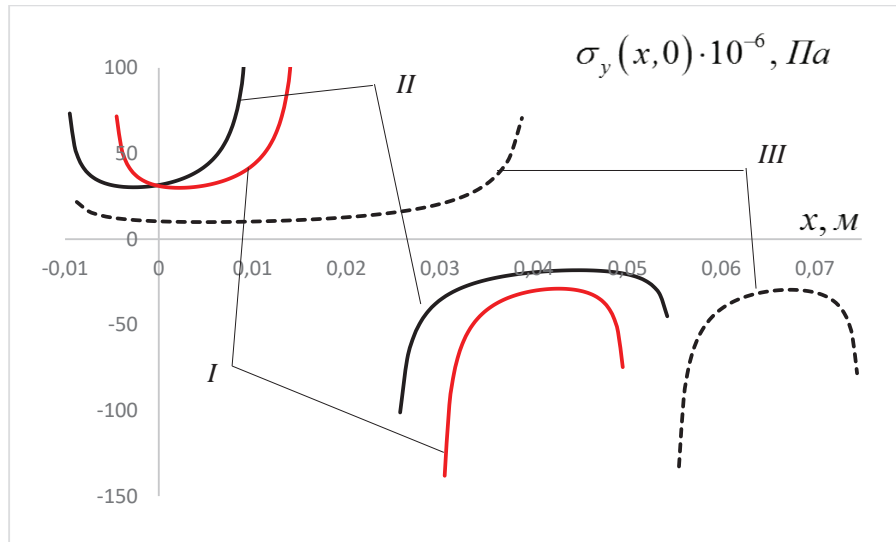


Рис. 3. Нормальні напруження під штампами

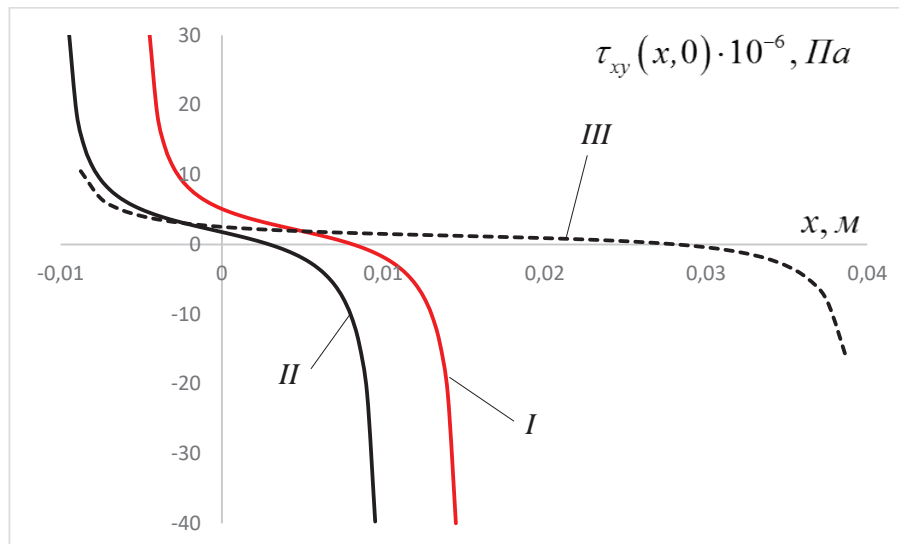


Рис. 4. Дотичні напруження під першим штампом

$P_1 = 10^6$ Н/м, лінія II – $P_1 = 0,5 \times 10^6$ Н/м, лінія III – $P_1 = 0$ Н/м. Сила P_2 , що діє на правий штамп, у всіх трьох випадках вибиралась рівною $0,5 \times 10^6$ Н/м. Видно, що величина сили, яка діє на лівий штамп, суттєво впливає на розподіл напружень під правим штампом особливо в частині області контакту, ближчій до лівого штамп. Важливо також відзначити, що графік зміни напруження для $P_1 = 0$ Н/м (крива III) повністю співпадає з відповідним графіком для одного штамп, що діє без тертя на границю пружної півплощини [10, § 115].

Висновки. Розглянуто взаємодію двох штампів на границі пружної ізотропної півплощини під дією заданої системи сил. Вважається, що штампи мають плоскі основи, причому один із них жорстко зчеплений із півплощиною, а інший

знаходиться з нею в умовах гладкого контакту. Для розв'язання задачі використано представлення напружень і переміщень через кусково-аналітичні функції. Сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана з відповідними умовами для невідомої функції на нескінченності. На основі аналітичного розв'язку цієї задачі знайдено похідні від переміщень границі півплощини та напруження під штампами в досить простому аналітичному вигляді. Показано, що розв'язок біля кутових точок жорстко зчепленого штамп має осцилюючу кореневу особливість, а біля кутових точок гладкого штамп – звичайну кореневу.

Одержано числові результати, які проілюстровано графічно. Зокрема, представлено графіки переміщень границі півплощини та проілюстровано варіацію напружень під штампами. Вияв-

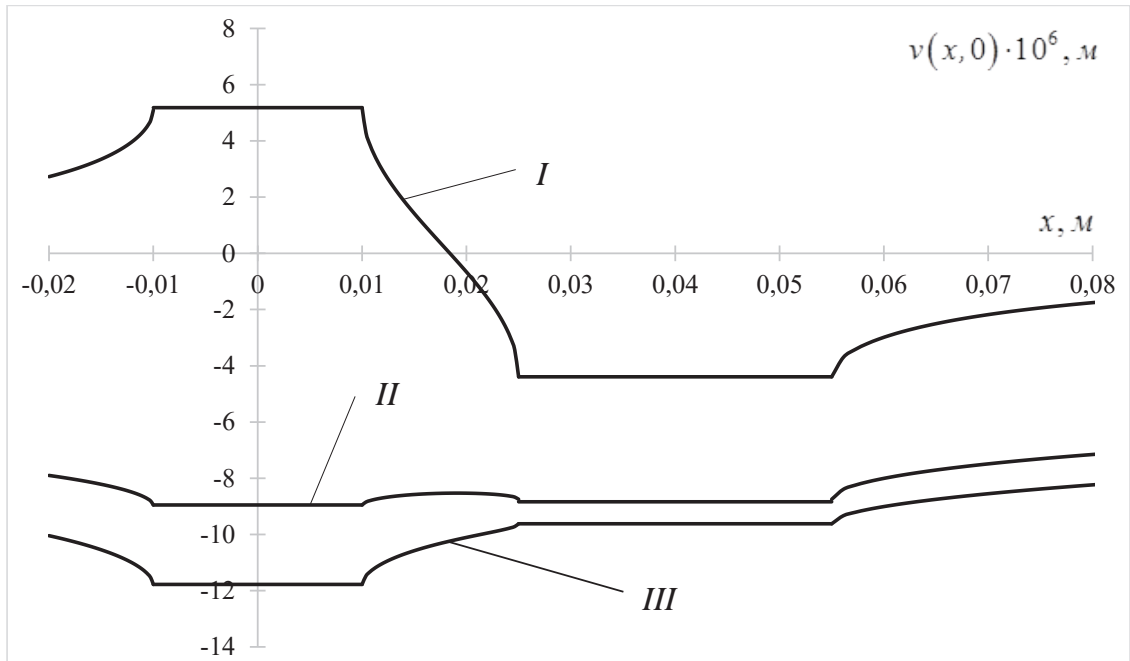


Рис. 5. Залежність вертикальних переміщень від прикладених до штампів зусиль

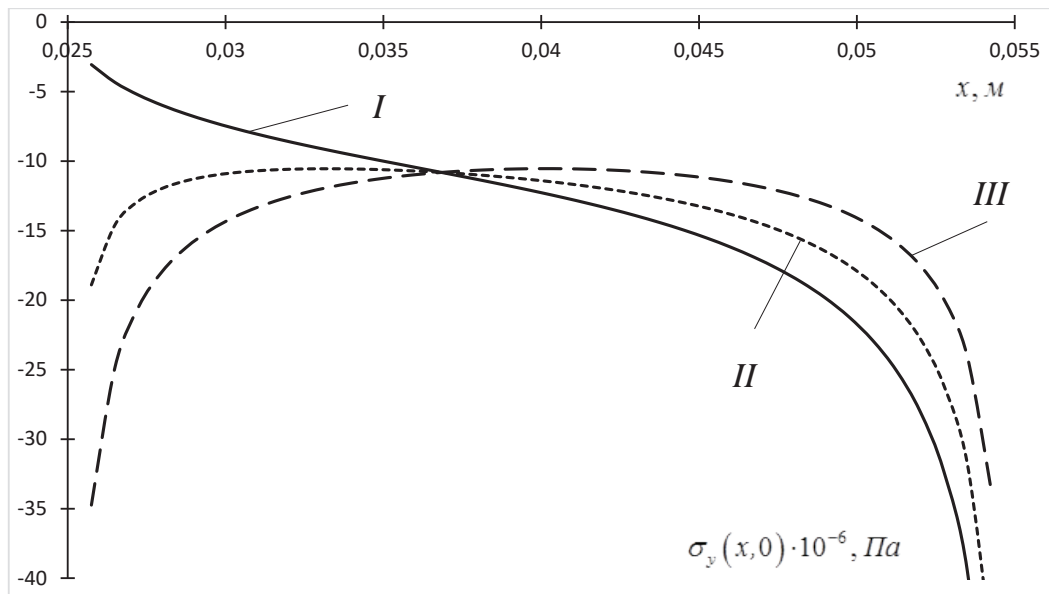


Рис. 6. Залежність нормального напруження під правим штампом для різних зовнішніх сил, прикладених до лівого штампу

лено, що зона повного затухання переміщень при віддаленні від штампів суттєво перевищує їхню ширину. Показано, що нормальне напруження під

жорстко зчепленим штампом є значно більшим, ніж дотичне, а осадка штампу зменшується зі збільшенням його ширини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Москва : Мир, 1989. 510 с.
2. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону : ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.
3. Острик В.И. Контактна механіка. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2015. 560 с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. Москва : Гостехиздат, 1953. 264 с.

5. Острик В.И. Контактное взаимодействие штампа с упругой полуплоскостью при наличии трения и сцепления. *Теор. и прикл. механика*. 2004. 39. С. 94–101.
6. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г., Моссаковская Л.В. Дальнейшее развитие задачи Галина о трении и сцеплении. *Докл. АН УССР*. 1983. 271, № 1. С. 60–64.
7. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Дегтяр С.В. Аналіз впливу початкових напружень при взаємодії системи двох однакових штампів на півплощину під дією нормальної сили. *Наука III тисячоліття: пошуки, проблеми, перспективи розвитку: матеріали II Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (25-26 квітня 2018 року): збірник тез*. Бердянськ : БДПУ, 2018. Ч. 2. С. 23–24.
8. Сяський А.О., Трохимчук О.Я. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і системи штампів з кутовими точками. *Вісн. Нац. техн. ун-ту України «КПІ». Сер. Машинобудування*. 2010. Вип. 58. С. 36–41.
9. Кузьмінець М.П. Чисельний алгоритм моделювання процесу взаємодії двох плоских штампів з середовищем під час обтискування ґрунту під трубопроводом. *Управління проектами, системний аналіз і логістика*. Технічна серія. 2010. Вип. 7. С. 113–119.
10. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 707 с.
11. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом. *Прикладная математика и механика*. 1986. Т. 50(4). С. 663–673.

REFERENCES

1. Johnson K. (1989) *Mekhanika kontaktного vzaimodeystviya* [Mechanics of contact interaction]. M.: World. (in Russian)
2. Aleksandrov V.M., Chebakov M.I. (2007) *Vvedenie v mekhaniku kontaktnykh vzaimodeystviy* [Introduction to the mechanics of contact interactions]. Rostov-on-Don: LLC "CVVR". (in Russian)
3. Ostriк V.I. (2015) *Kontaktна mekhanika* [Contact mechanics]. K.: VPTs "Kyiv University". (in Ukrainian)
4. Galin L.A. (1953) *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti* [Contact problems of elasticity theory]. Moscow: Gostekhizdat. (in Russian)
5. Ostriк V. I. (2004) Kontaktное vzaimodeystvie shtampa s uprugoy poluploskost'yu pri nalichii treniya i stsepleniya [Contact interaction of a stamp with an elastic half-plane in the presence of friction and adhesion]. *Theor. and App. Mechanics*, vol. 39, pp. 94–101.
6. Mossakovsky V.I., Biskup A.G., Mossakovskaya L.V. (1983) Dal'neyshee razvitie zadachi Galina o trenii i stseplenii Dal'neyshee razvitie zadachi Galina o trenii i stseplenii [Further development of Galin's problem on friction and adhesion]. *Dokl. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, vol. 271, no. 1, pp. 60–64.
7. Babich S.Yu., Glukhov Yu.P., Degtyar S.V. (2018) Analiz vplyvu pochatkovykh napruzhenj pry vzajemodiji systemy dvokh odnakovykh shtampiv na pivploshhynu pid dijeju normal'noji syly [Analysis of the influence of initial stresses in the interaction of a system of two identical stamps on a half-plane under the action of normal force] *Proceedings of the II International scientific-practical Internet conference Science of the third millennium: research, problems, prospects (Berdyansk, April 25-26, 2018)*. Berdyansk: BSPU, part 2, pp. 23-24.
8. Syasky A.O., Trokhimchuk O.Ya. (2010) Mishana kontaktна задача dlja plastynky z kryvoliniynym otvorom i systemy shtampiv z kutovymy tochkamy [Mixed contact problem for a plate with a curved hole and a system of stamps with angular points]. *Visn. Nat. tech. University of Ukraine "KPI". Ser. Engineering*, no. 58, pp. 36-41.
9. Kuzminets M.P. (2010) Chyselnyj alghorytm modeljuvannja procesu vzajemodiji dvokh ploskykh shtampiv z seredovyshhem pid chas obtyskuvannja ґрунту pid truboprovodom [Numerical algorithm for modeling the process of interaction of two flat stamps with the environment during soil compaction under the pipeline] *Project Management, Systems Analysis and Logistics. Technical series*, no.7, pp. 113-119.
10. Muskhelishvili N.I. (1966) *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka. (in Russian)
11. Nakhmein E.L., Nuller B.M. (1986) Kontakt uprugoy poluploskosti s chastichno otsloivshimsya shtampom [Contact of an elastic half-plane with a partially exfoliated stamp]. *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 50, no. 4, pp. 663–673.