

## РОЗВ'ЯЗОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА ТА ШАРУ, ЩО ЛЕЖИТЬ БЕЗ ТЕРТЯ НА ОСНОВІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ

**Ярецька Н. О.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань  
Хмельницький національний університет  
вул. Інститутська, 11, Хмельницький, Україна  
[orcid.org/0000-0002-3726-2878](https://orcid.org/0000-0002-3726-2878)  
[iaretskan@gmail.com](mailto:iaretskan@gmail.com)*

**Ключові слова:** залишкові напруження, напружено-деформований стан, хімічно активна гума, лінеаризована теорія пружності, потенціал Трелоара.

Стаття присвячена розв'язку контактної задачі для попередньо напруженого циліндричного штампа та шару з початковими напруженнями. Шар лежить без тертя на основі без початкових напружень. Задачу розв'язано у випадку нерівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено у загальному виді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного циліндричного штампа, пружного шару та основи однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив циліндричного штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний циліндричний штамп та пружний шар виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. Наведені загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності у випадку осесиметричної деформації для скінченної циліндричної області. У результаті розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної квазірегулярної системи алгебраїчних рівнянь. Вивчено вплив початкових (залишкових) напружень у шарі, циліндрі та основі на розподіл контактних напружень в області контакту. У випадку нерівних коренів для хімічно активної гуми СКУ-6 та потенціалу Трелоара (тіло неогуківського типу) наведено результати чисельного аналізу, що подані у вигляді графіків, які ілюструють достатньо значний вплив початкових напружень. Отже, вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружного циліндра, що втискається у пружний шар, який лежить без тертя на основі без початкових напружень, полягає в тому, що: початкові напруження в шарі призводять у випадку стиснення до зменшення напружень у пружному штампі, а у випадку розтягу – до їх збільшення, а для переміщень – навпаки.

## THE SOLUTION OF A CONTACT PROBLEM FOR A PRE-STRESSED CYLINDRICAL STAMP AND A LAYER WHICH IS LYING ON THE BASE WITHOUT FRICTION AND WITHOUT INITIAL STRESSES

**Yaretska N. O.**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Computer Applications  
Khmelnytskyi National University  
Institutska str., 11, Khmelnytskyi, Ukraine  
orcid.org/0000-0002-3726-2878  
iaretskan@gmail.com*

**Key words:** *residual stresses, stress-strain state, chemically active rubber, linearized theory of elasticity, Treloir potential.*

The article is devoted to the study of the contact problem for a pre-stressed cylindrical stamp and a layer with initial stresses. The layer is lying without friction on the base without initial stresses. The initial stresses are absent at the base. The problem is solved in the case of unequal roots of the defining equation. The study is presented in general for the theory of large initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic cylindrical punch and the layer and the base are homogeneous and equal. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are associated with Lagrangian coordinates (natural state). In addition, the influence of the cylindrical punch causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic cylindrical punch and the elastic layer and base are made of different isotropic, transversely isotropic or composite materials. The general solutions of the basic differential equations of the linearized theory of elasticity in the case of axisymmetric deformation for a finite cylindrical domain are given. As a result, the problem is presented in the form of infinite series. The coefficients of this series are determined from an infinite quasi-regular system of algebraic equations. The influence of initial stresses in the layer and the cylinder punch and the base on the distribution of contact stresses in the contact region is studied. In the case of unequal roots for the chemically active rubber of UWC-6 and the Treloar potential (Neogukov type body) the results of numerical analysis are given. This results are presented in the form of graphs. It is illustrate a fairly significant effect of the initial stresses. So, influence of initial stresses on the stress-strain state of an elastic cylinder punch, is that the initial stress in the layer in the case of compression reduce the stress in the elastic punch, and in the case of stretching increase it.

**Вступ.** Наукові дослідження проблеми контактної взаємодії пружних тіл постійно збільшуються і вдосконалюються, враховуючи розвиток сучасних інформаційних технологій та математичних методів. Це зумовлено актуальністю використання результатів таких досліджень під час будівництва споруд, виробництва та конструювання деталей машин та їх конструкцій.

Урахування початкових напружень під час дослідження контактних задач значно ускладнює математичний розв'язок, але водночас наближає його до реальних процесів, які підлягають дослідженню.

Тематика дослідження контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями також є актуальною і для фундаментальних досліджень з механіки твердого деформованого тіла.

Ураховуючи вищесказане, дана робота присвячена дослідженню питання контактної взаємодії попередньо напруженого циліндричного штамп з попередньо напруженим шаром, що лежить без тертя на основі (півпросторі) без початкових напружень.

Об'єктом даного дослідження є процес контактної взаємодії пружного циліндричного штамп з початковими (залишковими) напруженнями та

шару з початковими (залишковими) напруженнями, що лежить без тертя на основі без початкових напружень.

Предметом дослідження є вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень пружних тіл.

Метою роботи є розв'язок вісесиметричної статичної задачі про контактну взаємодію пружного циліндричного штампа з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями, що лежить без тертя на основі без початкових напружень. Дослідження проведено в межах лінеаризованої теорії пружності в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

**Огляд літератури.** Останнім часом наукові результати, що мають відношення до механіки твердих деформованих тіл та їх контактної взаємодії, охоплюють все ширші кола питань. Ці результати представлені багатьма працями монографічного та оглядового характеру, одними з яких є [1–3]. У праці [1] в межах лінеаризованої теорії пружності розглянуто контактну задачу для пружного циліндричного штампа та шару з початковими напруженнями, що лежить на жорсткій основі без тертя. У монографії [2] представлені методи розв'язку мішаних задач для пружної основи (півпростору) з початковими напруженнями. В оглядовій статті [3] академіком О.М. Гузем висвітлено проблеми неklasичної механіки руйнування, що дає поштовх для вдосконалення та подальшого розвитку наукових досліджень з теорії механіки твердих деформованих тіл.

Існує також ряд узагальнюючих публікацій [4–8], які повністю або частково пов'язані з тематикою даної статті. Так у статті [4] у межах тривимірної теорії пружності представлено розв'язок динамічної контактної задачі про взаємодію пружного стисливого півпростору та шару стислої рідини, враховуючи вплив початкових напружень. Динамічна задача дослідження стійкості циліндричної оболонки при зовнішньому та внутрішньому стиску представлена працею [5]. Контактну задачу про тиск циліндра на шар, враховуючи їх поверхневі особливості розглянуто у [6]. Приклад чисельного розв'язку контактних задач подано у статті [7]. Метод аналітичного та чисельного розв'язку двох статичних контактних задач про тиск кільцевих пружних штампів на пружний півпростір представлено у праці [8].

Дослідження контактної взаємодії жорстких і пружних штампів із попередньо напруженими тілами в рамках лінеаризованої теорії пружності представлені статтями [9–14].

Так, у статті [9] розглянуто розв'язок вісесиметричної контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на попередньо напружений півпростір. Вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних кільцевого штампа та півпростору представлено в роботі [10]. Розв'язок контактної задачі про тиск пружних співвісних циліндричних штампів на пружний шар, у якому є залишкові деформації розглянуто у [11; 12].

Також, враховуючи необхідність підвищення міцності конструкції за рахунок підсилення її деяких несних елементів пружними стрингерами, пропонуються для ознайомлення дослідження, подані у працях [13; 14].

**Методи дослідження.** Використаємо співвідношення лінеаризованої теорії пружності [1; 2], причому дослідження представимо в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Будемо розрізняти три стани попередньо напружених тіл: а) природний (відсутність напружень); б) початковий стан; в) збурений стан (всі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень). До того ж збурення вважаємо набагато меншими від відповідних величин початкового стану.

Для розв'язку задачі застосуємо координати початкового деформованого стану  $(y_1, y_2, y_3)$ , які пов'язані з лагранжевими координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  співвідношеннями:  $y_i = \lambda_i x_i$ , де  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) – коефіцієнт видовження вздовж координатної осі. Вісь  $y_3$  спрямуємо по нормалі до області контакту.

Припустимо, що пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [2], а початковий деформований стан є однорідним. Нехай зона контакту пружних тіл буде міститися у площині  $y_3 = const$ . Вважатимемо, що початкові напруження діють вздовж зони контакту.

Матеріали тіл будемо вважати ізотропними стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу.

Усі величини, які відносяться до пружного циліндричного штампа, ми будемо позначати верхнім індексом «(1)», до шару – «(2)», а основи – «(3)».

Отже, сформулюємо постановку задачі. Нехай скінченний пружний циліндричний штамп радіуса  $R$  і висотою  $H$  з початковими напруженнями втискається у пружний шар під дією сили  $P$  після виникнення там початкового деформованого стану. Причому шар лежить без тертя на основі без початкових напружень. Товщина шару в початковому деформованому стані пов'язана з товщиною у недеформованому стані співвідношенням  $h_1 = \lambda_3 h_2$ . Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки

до вільного торця пружного штамп, під дією якого всі точки штамп переміщуються у напрямку осі симетрії  $y_3$  на одну і ту ж саму величину  $\varepsilon$ . Зробимо припущення, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту тертя вважаємо відсутнім. До того ж переміщення та напруження – неперервні.

Враховуючи однорідність початкового стану тіл, запишемо співвідношення:

$$y_m = \lambda_m x_m, \quad \lambda_m = const,$$

$$y_m = x_m + U_m^0, \quad U_m^0 = \delta_{mi} (\lambda_m - 1) x_i \quad (i, m = \overline{1,3}) \quad (1)$$

де  $\delta_{mi}$  – символ Кронекера.

З виразів (1) для узагальнених початкових напружень маємо

$$S_{im}^0 = \delta_{im} S_{mm}^0 \quad S_{mm}^0 = const \quad (m, i = \overline{1,3})$$

Основні рівняння для стисливих тіл у системі координат  $(y_1, y_2, y_3)$  мають вигляд

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0,$$

$$L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_j \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,2,3}) \quad (2)$$

Для нестисливих тіл основне рівняння та умова нестисливості представлені співвідношеннями:

$$L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m} \partial / \partial y_\alpha p' = 0,$$

$$q'_{\alpha m} \partial U_\alpha / \partial y_m = 0, \quad q'_{\alpha m} = \lambda_\alpha q_{\alpha m},$$

$$L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \partial^2 / \partial y_i \partial y_j \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1,2,3}) \quad (3)$$

Вирази для компонент тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл при  $y_i = const$  ( $i = \overline{1,2,3}$ ) матимуть вигляд

$$Q'_{ij} = \begin{cases} \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} - \text{для стисливих тіл,} \\ \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij} p' - \text{для нестисливих тіл,} \end{cases}$$

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta},$$

$$\kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta},$$

де  $\omega'_{im\alpha\beta} = \omega'_{im\alpha\beta} (S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$ ,  $\kappa'_{im\alpha\beta} = \kappa'_{im\alpha\beta} (S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$  – складові тензора модулів пружності четвертого порядку.

Крім того, дія циліндра викликати у шарі невелике збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

$$\tilde{\chi} = 0, 5\varepsilon \left\{ \theta_8^{-1} (r^2 - z_1^2 - z_2^2) - \chi_0 \left[ r^2 (\theta_8^{-1} + (2H\theta_6)^{-1} (z_1 + z_2)) - \theta_8^{-1} (z_1^2 + z_2^2) - (2H\theta_6)^{-1} (z_1^3 + z_2^3) \right] \right\} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) + I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] - J_0(\alpha_k r) \left[ \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \right\} \chi_k \quad (12)$$

Де  $J_\nu(x)$ ,  $I_\nu(x)$  – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу,

У циліндричних координатах  $(r, \theta, z_i)$  представимо розв'язки рівнянь (2) – (3) у вигляді

$$(\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_2^2) (\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \chi = 0, \quad (4)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r.$$

Ураховуючи умову існування єдиного розв'язку лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл [2], можливі два варіанти представлення загального розв'язку (4): випадок рівних коренів ( $\xi_2'^2 = \xi_3'^2$ ) та випадок нерівних коренів ( $\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$ ). У даній статті зупинимося на випадку нерівних коренів.

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2, \quad (\Delta_1 + \xi_2'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_1 = 0,$$

$$(\Delta_1 + \xi_3'^2 \partial^2 / \partial y_3^2) \tilde{\chi}_2 = 0. \quad (5)$$

У системі циліндричних координат, при  $n_1 = \xi_2'^2$ ,  $n_2 = \xi_3'^2$ ,  $z_i = v_i^{-1} y_3$ ,  $v_i = \sqrt{n_i}$ , ( $i = \overline{1,2}$ ), такий постановці відповідають граничні умови:

1) на торці пружного штамп:

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (6)$$

2) на межі пружного шару в області контакту  $z_i = 0$  ( $i = \overline{1,2}$ ):

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)} \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (7)$$

3) на межі пружного шару поза областю контакту  $z_i = 0$  ( $i = \overline{1,2}$ ):

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R \leq r < \infty); \quad (8)$$

4) на бічній поверхні пружного штамп  $r = R$ :

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_i \leq \frac{H}{v_i}). \quad (9)$$

5) на нижній поверхні шару, що лежить на основі без початкових напружень,  $z_i = -\lambda_3 h_2 v_i^{-1} = -H v_i^{-1}$ , ( $i = \overline{1,2}$ ):

$$u_3^{(2)} = u_3^{(3)}, \quad Q_{3r}^{(3)} = Q_{3r}^{(2)} = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (10)$$

де  $z_i = y_3 v_i^{-1}$ , ( $i = \overline{1,2}$ ) товщина шару в недеформованому стані.

Умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням торця і рівнодіючою навантаження  $P$ , буде мати вигляд

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho. \quad (11)$$

Для визначення напружено-деформівного стану в попередньо напруженому циліндричному штампі для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$  загальний розв'язок (5) визначального рівняння (4) представимо у вигляді:

$$b_3^{(k)} = 4\varepsilon R^2 J_0(\mu_k) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{\mu_k^2 + (\gamma_k v_1 R)^2} - \frac{v_2}{v_1 s_0} \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{\mu_k^2 + (\gamma_k v_2 R)^2} \right] (v_1 H \gamma_k^3 I_1(\gamma_k v_2 R) [v_2 W_k(2) - v_1 s_0 W_k(1)])^{-1},$$

$$W_k(m) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_m) I_0(\gamma_k v_m R) (I_1(\gamma_k v_m R))^{-1} + 1 - \tilde{c}_0 (\gamma_k v_m R)^{-1}, \quad (m=1,2),$$

$$\theta_8 = m_1 n_1^{-1} + m_2 n_2^{-1}, \quad \theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3}.$$

$$\tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'_{1122}{}^{-1}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'_{1122}{}^{-1}; \end{cases} \quad \tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'_{1122} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'_{1122} n_i^{-1}; \end{cases} \quad (i = \overline{1,2}) \quad s_0 = \frac{1 + m_2}{1 + m_1},$$

$$m_i = \begin{cases} (\omega'_{1111} n_i - \omega'_{3113}) (\omega'_{1133} + \omega'_{1313})^{-1}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} n_i; \end{cases} \quad (i = \overline{1,2})$$

$$\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) = R^2 \varepsilon \mu_k^{-2} [ch(\alpha_k z_1) - cth(\mu_k l v_1^{-1}) sh(\alpha_k z_1)], \quad \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) = R^2 \varepsilon \mu_k^{-2} [sh(\alpha_k z_1) - cth(\mu_k l v_1^{-1}) ch(\alpha_k z_1)],$$

$$\tilde{S}_3(\alpha_k z_2) = \frac{n_2 R^2 \varepsilon}{n_1 \mu_k^2 s_0} [cth(\mu_k l v_2^{-1}) sh(\alpha_k z_2) - ch(\alpha_k z_2)], \quad \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) = \frac{n_2 R^2 \varepsilon}{n_1 \mu_k^2 s_0} [cth(\mu_k l v_2^{-1}) ch(\alpha_k z_2) - sh(\alpha_k z_2)].$$

Тоді співвідношення для компонент вектора переміщення і тензора напруження для циліндричного штампя для  $n_1 \neq n_2$  представимо у вигляді:

$$U_r^{(1)} = \varepsilon \theta_+ r (2H\theta_6)^{-1} \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_3^{(k)} \left[ s_0 I_1(\gamma_k v_2 R) (I_1(\gamma_k v_1 R))^{-1} v_1 I_1(v_1 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - v_2 I_1(v_2 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \\ \left. + \alpha_k^2 J_1(\alpha_k r) \left( \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) v_1^{-1} + \tilde{S}_5(\alpha_k z_2) v_2^{-1} \right) \right\} \chi_k \\ U_3^{(1)} = -\varepsilon \left\{ 1 + \chi_0 \left[ \frac{1}{H\theta_6} \left( \frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right) - 1 \right] \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} m_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \\ \left. + \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{m_1 \tilde{S}_2(\alpha_k z_1)}{n_1} + \frac{m_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_2)}{n_2} \right) \right\} \chi_k \\ Q_{33}^{(1)} = C_{44} (1 + m_1) l_1 \left\langle -\frac{\varepsilon}{H\theta_6} \chi_0 \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] - \right. \tag{13}$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 b_3^{(k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} n_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - s n_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \alpha_k^3 J_0(\alpha_k r) \left( \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k z_1)}{v_1} + \frac{s \tilde{S}_5(\alpha_k z_2)}{v_2} \right) \right\} \chi_k \right\rangle$$

$$Q_{3r}^{(1)} = C_{44} (1 + m_1) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_0 \gamma_k^3 b_3^{(k)} \left[ v_2 I_1(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) - v_1 I_1(\gamma_k v_2 R) (I_1(\gamma_k v_1 R))^{-1} I_1(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) \right] + \right. \\ \left. + \alpha_k^3 J_1(\alpha_k r) \left[ n_1^{-1} \tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + s_0 n_2^{-1} \tilde{S}_3(\alpha_k z_2) \right] \right\} \chi_k$$

Де  $\theta_+ = v_1^{-1} + v_2^{-1}$ ,  $C_{44} = \begin{cases} w'_{1313}, & s = s_0 l_2 l_1^{-1}, \quad \chi_k - \text{шукані константи,} \\ \kappa'_{1313}. \end{cases}$

$$l_i = \begin{cases} \omega'_{1331} \omega'_{1313}{}^{-1} + \omega'_{1313} (\omega'_{1313} - \omega'_{1331}) (\omega'_{1133} + \omega'_{1313}) (\omega'_{1111} n_1 + \omega'_{1133})^{-1} \\ \kappa'_{1331} \kappa'_{1313}{}^{-1} + \kappa'_{1313} (\kappa'_{1313} - \kappa'_{1331}) (\lambda_3 q_3) (\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_1)^{-1} \end{cases}$$

Напружено-деформований стан у пружному шарі з початковими напруженнями визначимо через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля, які після ряду перетворень виражаються через нескінченну систему констант  $\chi_k$  [1, с. 60–80].

Напружено-деформований стан основи без початкових напружень з [1] матиме вигляд:

$$u_r^{(3)} = \frac{2\varepsilon}{\pi\theta_3} \hat{T}^4 \left( \Omega^8; S_1^0; \frac{y_3}{R}; A_2'; A_3'; 1; \frac{\lambda + \mu}{\mu R} (h_1 + y_3); 1 \right), \quad u_3^{(3)} = \frac{2\varepsilon}{\pi\theta_3} \hat{T}^4 \left( \Omega^8; S_1^0; \frac{y_3}{R}; A_2'; A_3'; \frac{2\mu - \lambda}{\mu}; \frac{\lambda + \mu}{\mu R} (h_1 + y_3); 1 \right), \\ Q_{33}^{(3)} = \frac{4\varepsilon(\mu + \lambda)}{\pi\theta_3 R} \hat{T}^4 \left( \Omega^8; S_2^0; \frac{y_3}{R}; A_2'; A_3'; 1; \frac{h_1 + y_3}{R}; 1 \right), \quad Q_{3r}^{(3)} = \frac{4\varepsilon(\lambda + \mu)}{\pi\theta_3 R^2} (h_1 + y_3) \hat{T}^4 \left( \Omega^8; S_3^1; \frac{y_3}{R}; A_2'; A_3'; 1; 0; 1 \right) \tag{14}$$

Де  $\hat{T}^4(\Omega^n; S_m^n; \bar{\alpha}; \bar{\beta}_1; \bar{\beta}_2; l_1; l_2; \theta) = \bar{\beta}_1 \left\langle (1 - a_0) \left[ l_1 \Omega^n(S_m^n; \bar{\alpha}; 0) + l_2 \Omega^n(S_{m+1}^n; \bar{\alpha}; 0) \right] - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left[ l_1 \Omega^n(S_m^n; \bar{\alpha}; k_i) + \right. \right.$   
 $+ l_2 \Omega^n(S_{m+1}^n; \bar{\alpha}; k_i) \left. \right] \rangle + \bar{\beta}_2 \left\langle (1 - a_0) \left[ l_1 \Omega^n(S_m^n; \bar{\alpha}; \theta) + l_2 \Omega^n(S_{m+1}^n; \bar{\alpha}; \theta) \right] - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left[ l_1 \Omega^n(S_m^n; \bar{\alpha}; k_i + \theta) + \right. \right.$   
 $+ l_2 \Omega^n(S_{m+1}^n; \bar{\alpha}; k_i + \theta) \left. \right] \rangle, \Omega^8(\hat{L}_m, \alpha, \theta) = (\chi_0 - 1) \hat{L}_m(\rho, \alpha - \theta) + \frac{\theta_3}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} C_j^* \hat{L}_{j+m}(\rho, \alpha - \theta),$

$$A_2' = \frac{h_1}{R} \left\{ \frac{2(s_2 - s_3)(s_3(sh\tilde{\varphi}_2 - v_2^{-1}ch\tilde{\varphi}_2) - s(sh\tilde{\varphi}_1 - v_1^{-1}ch\tilde{\varphi}_1))}{\alpha((s_3 - s)sh\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)sh\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(ch\tilde{\varphi}^+ - ch\tilde{\varphi}^-)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(s_2 - s_3)(s_3sh\tilde{\varphi}_2 - s \cdot sh\tilde{\varphi}_1) [\alpha((s_3 - s)\theta^+ch\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)\theta^-ch\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(\theta^+sh\tilde{\varphi}^+ - \theta^-sh\tilde{\varphi}^-)]}{(\alpha((s_3 - s)sh\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)sh\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(ch\tilde{\varphi}^+ - ch\tilde{\varphi}^-))^2} \right\},$$

$$\lambda, \mu - \text{сталі Ляме, } A_3' = \frac{h_1}{eR} \left\{ \frac{2(s_2 - s_3)(s_3v_2^{-1}ch\tilde{\varphi}_2 - s \cdot v_1^{-1}chch\tilde{\varphi}_1)}{\alpha((s_3 - s)sh\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)sh\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(ch\tilde{\varphi}^+ - ch\tilde{\varphi}^-)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(s_2 - s_3)(s_3sh\tilde{\varphi}_2 - s \cdot sh\tilde{\varphi}_1) [\alpha((s_3 - s)\theta^+ch\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)\theta^-ch\tilde{\varphi}^-) - (s_2 - s_3)\beta(\theta^+sh\tilde{\varphi}^+ - \theta^-sh\tilde{\varphi}^-)]}{(\alpha((s_3 - s)sh\tilde{\varphi}^+ + (s + s_3)sh\tilde{\varphi}^-) + (s_2 - s_3)\beta(ch\tilde{\varphi}^+ - ch\tilde{\varphi}^-))^2} \right\}$$

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{h_i}{Rv_i}, \quad (i = 1, 2), \quad \tilde{\varphi}^{\pm} = \frac{h_1\theta^{\pm}}{R}, \quad \tilde{\varphi}_2^{\pm} = \frac{h_1\theta_2^{\pm}}{R}, \quad \theta^{\pm} = v_1^{-1} \pm v_2^{-1}. \quad S_n^m(\rho; z) = \int_0^{\infty} \eta^{-2} \sin \eta e^{-z\eta} J_m(\eta\rho) d\eta,$$

$\hat{L}_m^n(t, 0, u) = \hat{L}_m^n(t, u)$ ,  $k_i, a_i$  – константи розкладу  $D_n = \int_0^{\infty} t^n G(t) dt$ . через гамма-функції ( $i=0, 1, 2, \dots$ ),

$$\alpha = (2\mu^{(3)} + \lambda^{(3)})(m_1^{(2)}\mu^{(3)})^{-1}v_1, \quad k = k_1 = 1, \quad \beta = 2(\mu^{(3)} + \lambda^{(3)})(C_{44}^{(2)}(1 + m_1^{(2)})l_1^{(2)})^{-1}, \quad h = h_1 / R, \quad \varphi_i = 2\eta h v_i^{-1},$$

$$\theta_3 = m_1(s_1 - s_0)v_1^{-1}, \quad s_2 = m_2v_1(m_1v_2)^{-1}, \quad s_3 = s_0v_1v_2^{-1}, \quad C_i^* - \text{коєфіцієнти розкладу в ряд функції}$$

$F(\eta) = F(\eta, G(\eta))$  за степенями  $\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)$ , що є складовою компонент вектора напружень та переміщень для пружного шару, причому  $G(\eta h) = (((s_2 - s_3)(s - s_3)\beta k - s\alpha k_1)sh(\eta h\theta_+) + ((s_2 - s_3)(s + s_3)\beta k + s\alpha k_1)sh(\eta h\theta_-) + (((s - s_3)^2 + s_3)\alpha k_1 - \beta k(s_2 - s_3))ch(\eta h\theta_+) - (((s^2 - s_3^2) - s_3)\alpha k_1 - \beta k(s_2 - s_3))ch(\eta h\theta_-) + 2s \cdot s_3\alpha k_1)P(\eta h)$ ,  $\kappa = 1$ ,  $P(\eta h) = 2s \cdot s_3\alpha k_1 + \beta k((s_2 - s_3)(s - s_3)sh(\eta h\theta_+) + (s_2 - s_3)(s + s_3)sh(\eta h\theta_-)) - \alpha k_1((s - s_1)^2ch(\eta h\theta_+) + (s^2 - s_3^2)ch(\eta h\theta_-))$ .

Використовуючи розв'язки для циліндра (12), і задовольнивши третю умову (7) та другу умову (9), знайдемо власні значення задачі (6) – (11) для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$ :

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k + 1)}{H}, \quad J_1(\mu_k) = 0, \quad \text{де } J_1(\mu_k) = 0. \quad (15)$$

Для розв'язку задачі визначимо сталі  $\chi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathfrak{D}_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Наближене обчислення коєфіцієнтів системи, враховуючи складність функцій  $G_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), можна представити у вигляді

$$\mathfrak{D}_0 = \varpi_0 = 2\pi^{-1} \left[ 1 + 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} - h^{-2} (D_2/3 - 2D_0^2 \pi^{-1}) (h + 2D_0 \pi^{-1}) - D_0 D_2 (3\pi^2 h^4)^{-1} (\pi + 4D_0) + 2(3h^5)^{-1} (D_4/5 + \right. \right.$$

$$\left. + D_2^2 (6\pi)^{-1} - D_2 D_0^2 \pi^{-2}) + D_0 (18\pi h^6)^{-1} (11D_4 + 4D_2^2 \pi^{-1}) - (15h^7)^{-1} (D_6/21 + D_2 D_4 (12\pi)^{-1} - 19D_4 D_0^2 (6\pi^2)^{-1}) + \dots \right\} \right];$$

$$\mathfrak{D}_{0n} = 2\pi^{-1} \left[ -\theta_4 \psi_0(0, \mu_n) + 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} r_1(\mu_n) + 4D_0^2 (\pi h^2)^{-1} r_1^2(\mu_n) + h^{-3} (4D_0^3 \pi^{-2} r_1^3(\mu_n) - D_2 (3\mu_n^3)^{-1} r_2(\mu_n)) + \right. \right.$$

$$\left. + 2D_0 D_2 (3\pi \mu_n^3 h^4)^{-1} r_1(\mu_n) (3r_5(\mu_n) - 2r_2(\mu_n)) + (3h^5 \mu_n^3)^{-1} (D_4 \mu_n^{-2} r_3(\mu_n) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-1} r_1^2(\mu_n) (3r_5(\mu_n) - r_2(\mu_n))) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+2(3\pi\mu_n^5 h^6)^{-1} \left( D_0 D_4 / 8 r_1(\mu_n)(16r_3(\mu_n) + 3r_6(\mu_n)) - D_2^2 \mu_n^{-1} r_2(\mu_n) r_5(\mu_n) \right) + \\
 &+(3\mu_n^5 h^7)^{-1} \left( D_0 \pi^{-2} r_1(\mu_n) \left( 4D_0 D_4 / 3 r_1(\mu_n)(3r_3(\mu_n) + r_6(\mu_n)) + D_2^2 \mu_n^{-1} r_5(\mu_n)(3r_5(\mu_n) - 4r_2(\mu_n)) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - D_6(168\mu_n^2)^{-1} (21\mu_n^4 r_5(\mu_n) - 7r_7(\mu_n) - 35\mu_n^2 r_6(\mu_n) - \mu_n^7 r_1(\mu_n)) + \dots \right), \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{G}_k = \theta_3 \mu_k J_0^2(\mu_k) (2\kappa R v_1)^{-1} \left[ l_2 v_2 (l_1 v_1)^{-1} \text{cth}(\mu_k l v_2^{-1}) - \text{cth}(\mu_k l v_1^{-1}) \right]; \quad \mathfrak{G}_{00} = \theta_5 \theta_3 R E(\kappa l)^{-1};$$

$$\begin{aligned}
 \varpi_k &= 2\pi^{-1} \left[ \psi_0(0, \mu_k) + 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} r_1(\mu_k) + 4D_0^2 (\pi h^2)^{-1} r_1^2(\mu_k) + h^{-3} \left( 4D_0^3 \pi^{-2} r_1^3(\mu_k) - D_2(3\mu_k^3)^{-1} r_2(\mu_k) \right) + \right. \right. \\
 &+ 2D_0 D_2 (3\pi\mu_k^3 h^4)^{-1} r_1(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 2r_2(\mu_k)) + (3h^5 \mu_k^3)^{-1} \left( D_4 \mu_k^{-2} r_3(\mu_k) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-1} r_1^2(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - r_2(\mu_k)) \right) + \\
 &\quad \left. + 2(3\pi\mu_k^5 h^6)^{-1} \left( D_0 D_4 / 8 r_1(\mu_k)(16r_3(\mu_k) + 3r_6(\mu_k)) - D_2^2 \mu_k^{-1} r_2(\mu_k) r_5(\mu_k) \right) + (3\mu_k^5 h^7)^{-1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( D_0 \pi^{-2} r_1(\mu_k) \left( 4D_0 D_4 / 3 r_1(\mu_k)(3r_3(\mu_k) + r_6(\mu_k)) + D_2^2 \mu_k^{-1} r_5(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 4r_2(\mu_k)) \right) - D_6(5\mu_k^2)^{-1} r_4(\mu_k) + \dots \right) \right] \\
 \mathfrak{G}_{k0} &= 2\pi^{-1} \left[ -\theta_4 \psi_0(0, \mu_k) + 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} r_1(\mu_k) + 4D_0^2 (\pi h^2)^{-1} r_1^2(\mu_k) + h^{-3} \left( 4D_0^3 \pi^{-2} r_1^3(\mu_k) - D_2(3\mu_k^3)^{-1} r_2(\mu_k) \right) + \right. \right. \\
 &+ 2D_0 D_2 (3\pi\mu_k^3 h^4)^{-1} r_1(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 2r_2(\mu_k)) + (3h^5 \mu_k^3)^{-1} \left( D_4 \mu_k^{-2} r_3(\mu_k) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-1} r_1^2(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - r_2(\mu_k)) \right) + \\
 &+ 2D_0 D_2 (3\pi\mu_k^3 h^4)^{-1} r_1(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 2r_2(\mu_k)) + (3h^5 \mu_k^3)^{-1} \left( D_4 \mu_k^{-2} r_3(\mu_k) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-1} r_1^2(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - r_2(\mu_k)) \right) + \\
 &\quad \left. + 2(3\pi\mu_k^5 h^6)^{-1} \left( D_0 D_4 / 8 r_1(\mu_k)(16r_3(\mu_k) + 3r_6(\mu_k)) - D_2^2 \mu_k^{-1} r_2(\mu_k) r_5(\mu_k) \right) + (3\mu_k^5 h^7)^{-1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( D_0 \pi^{-2} r_1(\mu_k) \left( 4D_0 D_4 / 3 r_1(\mu_k)(3r_3(\mu_k) + r_6(\mu_k)) + D_2^2 \mu_k^{-1} r_5(\mu_k)(3r_5(\mu_k) - 4r_2(\mu_k)) \right) - D_6(5\mu_k^2)^{-1} r_4(\mu_k) + \dots \right) \right] \\
 \mathfrak{G}_{kn} &= 2\pi^{-1} \left[ -\theta_4 \psi_0(\mu_n, \mu_k) - 2\theta_3 s_0 v_1 R \pi(\kappa l)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \tau_{mn} \iota_{km} + \right. \\
 &+ 2\pi^{-1} \left\{ D_0 h^{-1} r_1(\mu_k) r_1(\mu_n) + 4D_0^2 (\pi h^2)^{-1} r_1(\mu_n) r_1^2(\mu_k) + h^{-3} \left( 4D_0^3 \pi^{-2} r_1(\mu_n) r_1^2(\mu_k) + 0, 5D_2 r_8^{(1)}(\mu_k, \mu_n) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2D_0 D_2 (\pi h^4)^{-1} r_1(\mu_k) r_8^{(2)}(\mu_k, \mu_n) + h^{-5} \left( D_4 / 24 r_9^{(1)}(\mu_k, \mu_n) + 2D_2 D_0^2 \pi^{-2} r_1^2(\mu_k) r_8^{(3)}(\mu_k, \mu_n) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (6\pi h^6)^{-1} \left( D_0 D_4 r_1(\mu_k) r_9^{(2)}(\mu_k, \mu_n) + 6D_2^2 \mu_k^{-3} r_5(\mu_k) r_8^{(1)}(\mu_k, \mu_n) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + h^{-7} \left( 2D_2^2 D_0 (\pi^2 \mu_k^3)^{-1} r_1(\mu_k) r_5(\mu_k) r_8^{(1,5)}(\mu_k, \mu_n) + D_0^2 D_4 (6\pi^2 \mu_k^5)^{-1} r_9^{(3)}(\mu_k, \mu_n) r_1^2(\mu_k) - D_6 / 720 r_{10}(\mu_k, \mu_n) + \dots \right) \right].
 \end{aligned}$$

Де  $r_1(\mu_k) = \mu_k^{-1} \sin \mu_k$ ;  $r_2(\mu_k) = 3\mu_k \cos \mu_k + (2\mu_k^2 - 3) \sin \mu_k$ ;  $r_3(\mu_k) = 0, 4\mu_k^4 \sin \mu_k + \mu_k^3 \cos \mu_k - r_2(\mu_k)$ ;

$$r_4(\mu_k) = 2/3 \mu_k^5 (0, 4\mu_k \sin \mu_k + \cos \mu_k) - 5\mu_k (\mu_k^2 - 3) \cos \mu_k - (2\mu_k^4 - 10\mu_k^2 + 15) \sin \mu_k;$$

$$\theta_4 = (v_1(m_2 - 1) - m_1 s_0) n_1^{-1},$$

$$r_5(\mu_k) = (2 - \mu_k^2) \sin \mu_k - 2\mu_k \cos \mu_k; \quad r_6(\mu_k) = (\mu_k^4 - 12\mu_k^2 + 1) \sin \mu_k + (4\mu_k^2 - 1) \mu_k \cos \mu_k;$$

$$r_7(\mu_k) = (\mu_k^6 - 30\mu_k^4 + 360\mu_k^2 - 720) \sin \mu_k + 6\mu_k (\mu_k^4 - 20\mu_k^2 + 120) \cos \mu_k.$$

$$\tau_{mn} = \frac{J_0(\mu_n) \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{\mu_n^2 + (\gamma_m v_1 R)^2} - \frac{v_2}{v_1 s_0} \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{\mu_n^2 + (\gamma_m v_2 R)^2} \right]}{\gamma_m^3 I_1(\gamma_k v_2 R) [v_2 W_m(2) - v_1 s_0 W_m(1)]}, \quad \iota_{kn} = I_1(\gamma_k v_2 R) \gamma_k^4 J_0(\mu_n) \left[ \frac{l_2 v_2}{l_1 (\mu_n^2 + \gamma_k^2 v_2^2 R^2)} - \frac{v_1}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 v_1^2 R^2} \right],$$

$$r_8^{(m)}(\mu_k, \mu_n) = \frac{m r_5(\mu_k) r_1(\mu_n)}{\mu_k^3} + \frac{r_5(\mu_n) r_1(\mu_k)}{\mu_n^3}; \quad r_9^{(m)}(\mu_k, \mu_n) = \frac{r_1(\mu_k) r_6(\mu_n)}{\mu_k^5} + \frac{6r_5(\mu_n) r_5(\mu_k)}{\mu_n^3 \mu_k^3} + \frac{m r_6(\mu_k) r_1(\mu_n)}{\mu_n^5};$$

$$r_{10}(\mu_k, \mu_n) = r_1(\mu_k) r_7(\mu_n) \mu_n^{-7} - 15r_6(\mu_n) r_5(\mu_k) \mu_n^{-5} \mu_k^{-3} - 15r_5(\mu_n) r_6(\mu_k) \mu_n^{-3} \mu_k^{-5} + r_7(\mu_k) r_1(\mu_n) \mu_k^{-7}.$$

Після визначення невідомих сталих  $\chi_i$  ( $i=0,1,2,\dots$ ) із системи (16), можна обчислити напружено-деформований стан як у пружному штампі, так в шарі та основі за формулами (12) – (14).

**Результати.** Чисельний аналіз проведеного дослідження представлений для потенціалу Трелоара (тіла неогуківського типу) у випадку хімічно активної гуми СКУ-6 при наступних параметрах:  $R=1\cdot 10^{-2}$  м,  $H=1\cdot 10^{-1}$  м,  $h=1.6\cdot 10^{-2}$  м,  $\varepsilon=10^{-4}$ ,  $E=8\cdot 10^{-5}$  МПа,  $\lambda_1=0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$ . Алгоритм чисельного розв’язку базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple. Також зазначимо, що чисельне дослідження системи типу (16) на квазірегулярність представлено в [1].

Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик для задачі про попередньо напружений циліндричний штамп та попередньо напружений шар, що лежить без тертя на основі без початкових напружень у

випадку потенціалу Трелоара, представлено на рис. 1–5.

Із графіків (рис. 1–5) видно, що суттєвий вплив для потенціалів найпростішої структури відмічається лише при перетинах  $\xi < 1$  пружного циліндричного штамп площинами паралельними основі. Причому цей вплив менший при стиску ( $\lambda_1 < 1$ ) та більший у випадку розтягування ( $\lambda_1 > 1$ ).

Також наявність початкових напружень у шарі призводить до збільшення переміщень  $U_3$  у ділянці контакту у пружному циліндричному штампі при стиску, а у випадку розтягнення – до їх зменшення. Аналогічна ситуація і для радіальних переміщень  $U_r$  у пружному циліндрі та шарі з початковими напруженнями.

Із просторового графіка тангенціальних напружень (рис. 5) можна помітити, що безпосередньо в зоні контакту пружних циліндра і шару та на боковій поверхні пружного штамп  $\rho = 1$ , вони дорівнюють нулю (це вимагають граничні умови (6) – (10)) і найбільш зосереджені поблизу зони контакту.

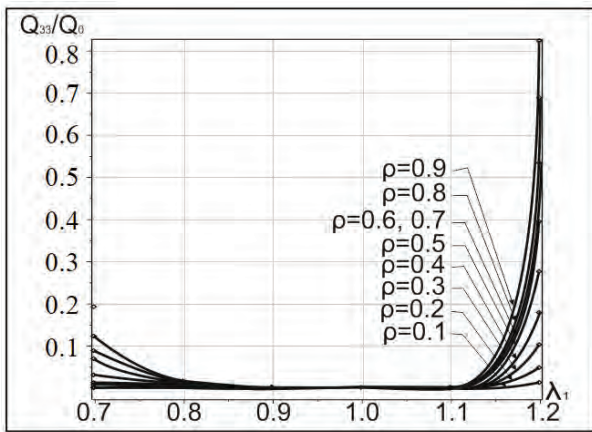


Рис. 1. Вплив початкових напружень на нормальний закон розподілу

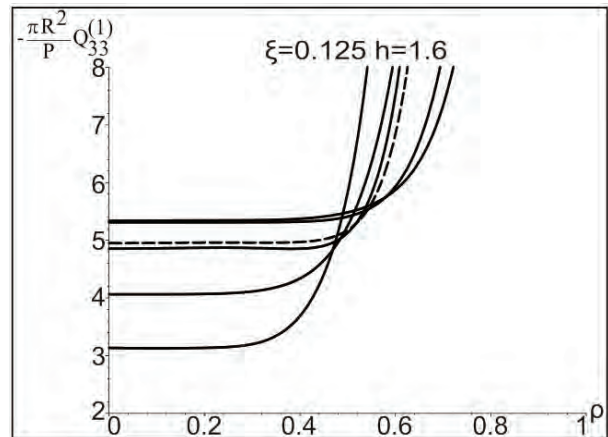


Рис. 2. Нормальні напруження у циліндрі в перерізі  $\xi=0,125$

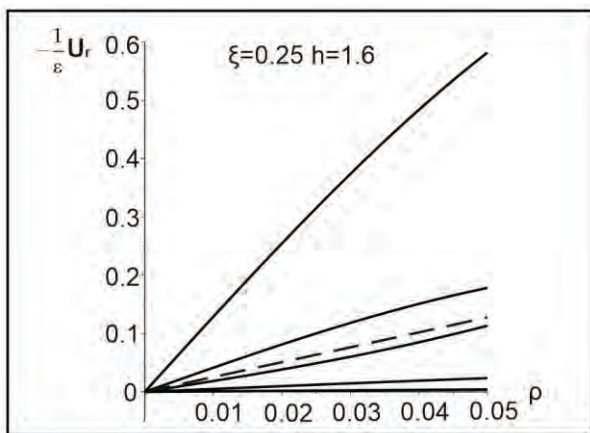


Рис. 3. Переміщення  $U_r$  у пружному циліндрі з початковими напруженнями для перерізу  $\xi=0,25$

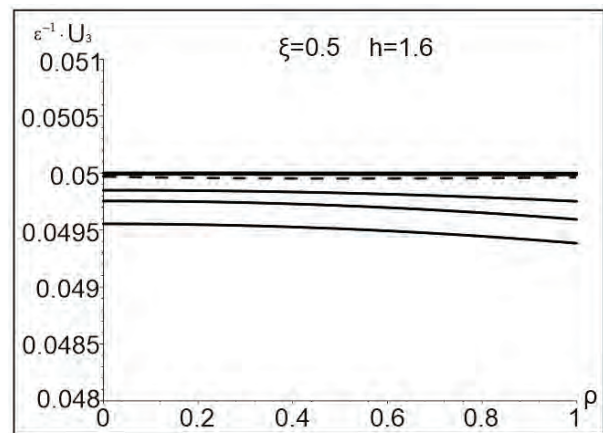


Рис. 4. Переміщення  $U_3$  у пружному циліндрі з початковими напруженнями для перерізу  $\xi=0,5$



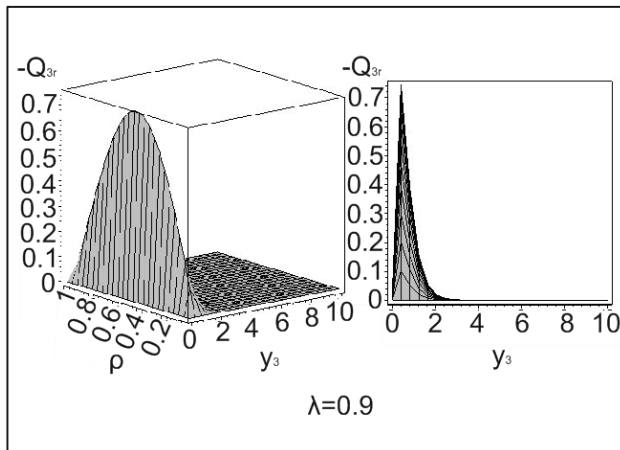


Рис. 5. Напруження  $Q_{zr}$  при  $\lambda_1=0,9$

**Дискусія.** У результаті проведених досліджень розв'язок задачі представлений у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16). Ці коефіцієнти залежать від структури пружного потенціалу, висоти пружного штампта  $H$ , і товщини попередньо напруженого шару, а вільні члени – від коренів  $n_1, n_2$ .

Ураховуючи проведене дослідження, для потенціалу Трелоара, що відповідає нерівним кореням рівняння (4), вплив початкових напружень на напружено-деформований стан циліндричного штампта та шару, що лежить без тертя на основі без початкових напружень, виражається таким чином:

1. Початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у циліндричному штампті та шарі, а при розтягненні – до їх збільшення, у випадку переміщень все відбувається навпаки. Тобто наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення.

2. Найбільший вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні штампта.

3. Більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високоеластичних мате-

ріалах у порівнянні з більш жорсткими, але якісно їхній вплив зберігається.

4. Небезпечним є випадок, коли початкові напруження наближаються до значень поверхневої нестійкості матеріалу [2], оскільки контактні напруження і переміщення різко змінюють свої значення.

Із отриманих розв'язків за допомогою граничного переходу можна отримати декілька окремих випадків: при  $\lambda_1=1$  – розв'язок задачі про тиск пружного циліндричного штампта на шар без початкових напружень [1]; при  $h \rightarrow \infty$  – розв'язок задачі про тиск пружного циліндричного штампта на півпростір з початковими напруженнями [2; 9; 10].

Наукова новизна результатів проведеного дослідження:

1. Отримано розв'язок вісесиметричної статичної задачі лінеаризованої теорії пружності для тіл із початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл.

2. Встановлено аналітичні залежності, які дозволяють досліджувати поведінку напружень та переміщень у зоні контакту для пружного циліндричного штампта та пружного шару з початковими напруженнями без врахування сил тертя у випадку, коли попередньо напружений шар лежить без тертя на основі без початкових напружень;

3. За допомогою числової реалізації методу дослідження встановлено особливості впливу початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень пружних циліндра й шару порівняно з випадком відсутності початкових напружень.

**Висновки.** Отже, можна зробити висновок про те, що вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружних тіл достатньо сильний і суттєво впливає на закон розподілу контактних характеристик. Тому його врахування дозволить значно покращити точність інженерних обчислень у розрахунках на міцність конструкцій та деталей машин.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ярецька Н.О. Математична модель передачі навантаження від попередньо напруженого циліндричного штампта до пружного шару з початковими напруженнями. *Physical and mathematical justification of scientific achievements: collective monograph*. Boston : Primedia eLaunch, 2020. P. 60–80. URL : <https://doi.org/10.46299/ISG.2020.MONO.PHYSICAL.III>.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
3. Guz A. N. Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 4. P. 343–415.
4. Guz A. N., Bagno A. M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 6. P. 585–595.

5. Semenyuk, N.P., Zhukova, N.B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, No 1. P. 40–53.
6. Vasu T.S., Bhandakkar T.K. A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects. *J. of Applied Mechanics*. 2016. Vol. 83, No 6. P. 061009.
7. Petinrin M.O., Oyedele A.A., Ajide O.O. Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology*. 2016. Vol. 4, No 1. P. 51–58.
8. Босаков С. В. Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство. *Наука и техника*. 2018. № 6(17). С. 458–464. URL : <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-6-458-464>.
9. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew.* 2018. Vol. 54, No 5. P. 539–543. URL : <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>.
10. Бабич С.Ю., Ярецька Н.О. Контактна взаємодія попередньо напружених кільцевого штампу і півпростору. *Доповіді НАН України*. 2020. № 11. С. 24–30. URL : <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.11.024>.
11. Рудницький В.Б., Ярецька Н.О., Венгер В.О. Застосування ІТ технологій в механіці деформованого твердого тіла. *Проблеми трибології (Problems of Tribology)*. 2017, № 2(84). С. 32–40.
12. Ярецька Н.О. Контактна задача для двох попередньо напружених співвісних циліндрів та шару з початковими напруженнями. *Information, its impact on social and technical processes: Abstracts of VIII International Scientific and Practical Conference*. (Haifa, Israel, 16-17 march 2020). Haifa, Israel, 2020. P. 106–111.
13. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, No 6. P. 346–356.
14. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, No 6. P. 629–635.

#### REFERENCES

1. Yaretska N.O. (2020). Matematychna model peredachi navantazhennia vid poperedno napruzhenoho tsylindrychnoho shtampa do pruzhnoho sharu z pochatkovymy napruzheniamy. *Physical and mathematical justification of scientific achievements* [Collective monograph]. International Science Group, 60–80. (in Ukrainian)
2. Guz A. N., Babich S. Yu. & Glukhov Yu. P. (2015). Smeshannyye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachalnymi napryazheniyami [Mixed Problems for Prestressed Elastic Foundation]. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. (in Russian)
3. Guz A. N. (2019). Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III. *International Applied Mechanics*, 55(4), 343–415.
4. Guz A. N., Bagno A. M. (2019). Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*, 55(6), 585–595.
5. Semenyuk, N.P., Zhukova, N.B. (2020) Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*, 56(1), 40–53.
6. Vasu T.S., Bhandakkar T.K. (2016). A Study of the Contact of an Elastic Layer–Substrate System Indented by a Long Rigid Cylinder Incorporating Surface Effects. *J. of Applied Mechanics*, 83(6), 061009.
7. Petinrin M.O., Oyedele A.A., Ajide O.O. (2016). Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. *World Journal of Engineering and Technology*, 4(1), 51–58.
8. Bosakov S. V. (2018). Dve kontaktnyye zadachi o vдавlivanii koltseвого shtampa v uprugoe poluprostranstvo [Two contact problems on the indentation of an annular stamp into an elastic half-space]. *Nauka i tehnika*, 6(17), 458–464. (in Russian)
9. Yaretskaya N. F. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *Int. Appl. Mech. Rew.* 54(5), 539–543.

10. Babych S. Yu., Yaretska N. O. (2020). Kontaktna vzaiemodiia poperedno napruzhenykh kiltsevoho shtampu i pivprostoru [Contact interaction of prestressed annular punch and semispace]. *Dopovidi NAN Ukrainy*, 11, 24–30. (in Ukrainian)
11. Rudnytskyi V. B., Yaretska N. O., Venher V. O. (2017). Zastosuvannia IT tekhnolohii v mekhanitsi deformovanoho tverdoho tila [The use of IT technologies in the mechanics of deformable bodies]. *Problems of Tribology*, 2(84), 32–40. (in Ukrainian)
12. Yaretska N. O. (2020). Kontaktna zadacha dlia dvokh poperedno napruzhenykh spivvisnykh tsylindriv ta sharu z pochatkovymy napruzhenniamy [Contact problem for two prestressed coaxial cylinders and a layer with initial stresses]. *Information, its impact on social and technical processes: Abstracts of VIII International Scientific and Practical Conference*. Haifa, Israel, 106–111. (in Ukrainian)
13. Babich S. Yu., Dikhtyaruk N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*, 56(6), 346–356.
14. Babich S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. (2019). Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 55(6), 629–635.