

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-01

## ЭЛАСТОАРМИРОВАННАЯ ТРУБА ИЗ ТРЕХ СЛОЕВ С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

В. М. Ахундов, И. Ю. Наумова, А. А. Забродская

Национальная металлургическая академия Украины  
akhundov@ua.fm

### Ключевые слова:

модель кусочно-однородной среды, волокна кольцевые, давление внутреннее, деформации большие, метод конечных разностей.

Представляется численное решение по модели кусочно-однородной среды задачи о деформировании трубы из трех слоев с кольцевыми волокнами квадратного сечения под воздействием внутреннего давления при больших перемещениях и деформациях. Трубу моделировали как сборку кольцевых элементов. Такие элементы представляют собой кольца квадратного сечения из связующего материала, включающие кольцевые волокна в качестве их армирующей сердцевины. Принимали расчетную схему трубы как длинной цилиндрической оболочки, осесимметрично деформируемой при нагружении давлением, когда центральные и крайние сечения кольцевых элементов перемещаются в плоскостях своего исходного положения.

## ЕЛАСТОАРМОВАНА ТРУБА ІЗ ТРЬОХ ШАРІВ З КІЛЬЦЕВИМИ ВОЛОКНАМИ ПІД ВПЛИВОМ ВНУТРІШНЬОГО ТИСКУ

В. М. Ахундов, І. Ю. Наумова, Г. А. Забродська

Національна металургійна академія України  
akhundov@ua.fm

### Ключові слова:

модель кусково-однорідного середовища, волокна кільцеві, тиск внутрішній, деформації великі, метод кінцевих різниць.

Дослідження деформування м'яких композитних структур, коли істотно змінюється їх початкова конфігурація, залишається однією з проблем механіки композитних матеріалів. В якості однієї з таких структур розглянули довгу тонкостінну трубу з еластичних шарів з кільцевими волокнами з більш жорсткого еластичного матеріалу. Труби даної будови можуть застосовуватися для створення гнучких газо- і повітропроводів з метою транспортування речовин в розпиленому вигляді, для збирання екологічно шкідливих відходів виробництва.

Найбільш загальний підхід в дослідженні тіл волокнистої будови ґрунтується на застосуванні моделі кусково-однорідного середовища, коли матриця і волокна розглядаються як контактні взаємодіючі тіла. Представляється чисельне рішення задачі по даній моделі про деформацію труби з трьох шарів з кільцевими волокнами квадратного перетину під впливом внутрішнього тиску при великих переміщеннях і деформаціях. Трубу моделювали як збірку кільцевих елементів. Такі елементи являють собою кільця квадратного перетину зі сполучного матеріалу, що включають кільцеві волокна як армуючу сердцевину. Приймали розрахункову схему труби як довгої циліндричної оболонки, яка осесиметрично деформується при навантаженні тиском, коли крайні і центральні перетини кільцевих елементів переміщаються в площинах свого вихідного положення.

Крайову задачу для збірки кільцевих елементів оболонки формулювали, виходячи з рівнянь нелінійної теорії пружності для матриці і волокон в ній. Рішення задачі проводили за допомогою методу кінцевих різниць, похідні першого порядку від основних величин по осьовій та радіальній координатах апроксимували за допомогою кінцево-різницевого співвідношень другого порядку точності. Дискретний аналог задачі вирішували на основі процедури методу Ньютона. Одиничність рішення крайової задачі забезпечували продовженням рішення по тиску в трубі.

## ELASTIC-REINFORCED PIPE FROM THREE LAYERS WITH RING FIBERS UNDER THE EXPOSURE OF INTERNAL PRESSURE

V. M. Akhundov, I. Yu. Naumova, A. A. Zbrodskaya

National Metallurgical Academy of Ukraine  
akhundov@ua.fm

### Key words:

model of a piecewise-homogeneous medium, fibers are annular, internal pressure, large deformations, finite difference method.

A numerical solution of the problem of deforming a three-layer pipe with annular square fibers under the influence of internal pressure with large displacements and deformations is presented by a model of a piecewise-homogeneous medium. The pipe was modeled as an assembly of ring elements. Such elements are square rings made of binder material, including ring fibers as their reinforcing core. The pipe design was accepted as a long cylindrical shell, which is axially deformable when loaded with pressure, when the central and extreme sections of the ring elements move in the planes of their original position.

The study of the deformation of soft composite structures, when their initial configuration changes significantly, remains one of the problems of the mechanics of composite materials. As one of these structures, we considered a long thin-walled tube of elastic layers with ring fibers of a more rigid elastic material. Pipes of this structure can be used to create flexible gas and air ducts, in order to transport substances in a spray form, to collect environmentally hazardous waste.

The most common approach in the study of the bodies of a fibrous structure is based on the use of a model of a piecewise-homogeneous medium, when the matrix and fibers are considered as contacting bodies. A numerical solution of the problem according to this model of the deformation of a pipe of three layers with annular square fibers under the influence of internal pressure during large displacements and deformations is presented. The pipe was modeled as an assembly of ring elements. Such elements are square rings made of binder material, including ring fibers as their reinforcing core. The pipe design was accepted as a long cylindrical shell, which is axially deformable when loaded with pressure, when the extreme and central sections of the ring elements move in the planes of their original position.

The boundary problem for assembling the ring elements of the shell was formulated on the basis of the equations of the nonlinear theory of elasticity for the matrix and the fibers in it. The problem was solved using the finite-difference method, first-order derivatives of the main quantities with respect to the axial and radial coordinates, and approximated using second-order finite-difference relations. The discrete analogue of the problem was solved on the basis of the Newton method procedure. The uniqueness of the solution of the boundary value problem was ensured by the continuation of the pressure solution in the pipe. As a result of solving the boundary value problem at a finite pressure value, the nodal values of displacements, strains, and stresses for the matrix () and fibers () were determined.

The boundary surfaces of the pipe acquire a wave-like shape (corrugated) with a period along the generatrix equal to the reinforcement period. Arrows of deflection (double amplitudes of wave formation) in the inner and outer surfaces of the pipe are not very different from each other. The middle surface of the pipe, due to its thin-walled state, remains in the deformed configuration almost cylindrical, when its deflections are small compared to the deflections in the boundary surfaces. The matrix material is extruded from the regions of the fiber matrix layer between the fibers into the region of the matrix layer. The bounding cylindrical surfaces of the annular fibers in the deformable pipe become convex, and their end surfaces become concave.

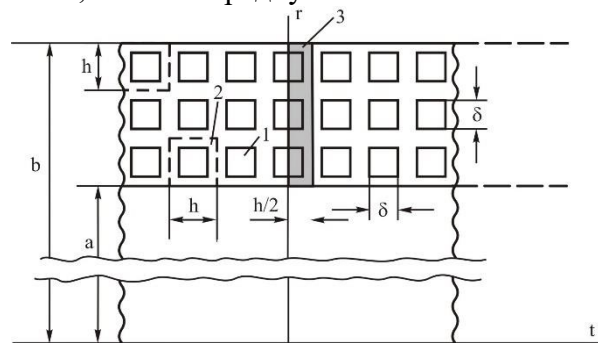
**Введение.** Отметим монографию [1], где рассматривается безмоментная цилиндрическая оболочка (труба), однонаправленно армированная волокнами, на основе использования эффективных модулей ее материала. В [2] изучаются двух- и четырехслойные цилиндрические оболочки с перекрестным расположением в них волокон. Материал каждого из слоев учитывается также с помощью его эффективных модулей. Основной материал цилиндрической оболочки, армированной по перекрестной схеме малорастяжимыми волокнами, рассматривается как физически нелинейный в [3]. В [4, 5] исследуется артерия как цилиндрическая труба из двух слоев при больших деформациях, в которых армирующими элементами являются коллагеновые волокна. Конкретный вид потенциального закона при нелинейно-упругом поведении требует только три материальные константы для каждого из слоев, чтобы учесть совместную реакцию стенки сосуда на воздействие осевого растяжения, давления и кручения.

В указанных работах задачи о деформировании цилиндрических оболочек решаются на основе моделирования материала с исходным строением как однородного анизотропного с макроскопически эквивалентными механическими свойствами. Преимущество подхода в том, что для его компьютерной реализации требуются сравнительно небольшие вычислительные ресурсы. Однако на его основе не выявляются внутренние поля в матрице и волокнах материала, анализ разрушения материала может быть лишь частичным.

Наиболее общий подход в исследовании тел волокнистого строения основывается на применении модели кусочно-однородной среды. Матрица и волокна рассматриваются как контактно взаимодействующие тела на основе уравнений механики деформирования с выявлением внутренних полей для композитной структуры. В силу ограниченности ресурсов данный подход можно применить лишь для сравнительно небольшого перечня тел, в основном однонаправлено армированных. В настоящей работе представляем результаты численного решения по модели кусочно-однородной среды задачи о

раздувании трубы из трех слоев с кольцевыми волокнами квадратного сечения при больших перемещениях и деформациях.

**1. Постановка задачи.** Исследовали деформирование эластичной тонкостенной трубы, армированной кольцевыми волокнами, под воздействием внутреннего давления. Применяются волокна квадратного сечения из более жесткого материала по сравнению с материалом матрицы (связующего), которые располагаются в матрице по схеме квадратной упаковки. На рис.1 показана конфигурация осевого сечения трубы в недеформированном состоянии. Труба включает три слоя толщиной  $h$  с волокнами в них, длина сторон квадратного сечения которых  $\delta$ . Внутренний радиус оболочки  $r = a$ , внешний радиус  $r = b = a + 3h$ .



**Рис. 1.** Осевое сечение трехслойной трубы с кольцевыми волокнами в исходном состоянии:

- 1 – волокно квадратного сечения,
- 2 – кольцевой элемент,
- 3 – половина концентрической сборки кольцевых элементов справа от центрального сечения

Трубу моделировали как сборку кольцевых элементов. Такие элементы представляют собой кольца квадратного сечения  $h \times h$  из связующего материала, включающие кольцевые волокна в качестве их армирующей сердцевины. Принимали расчетную схему трубы как длинной цилиндрической оболочки, осесимметрично деформируемой при нагружении давлением, когда крайние и центральные сечения кольцевых элементов перемещаются в плоскостях своего исходного положения. Задачу в силу условий симметрии решали для правой половины концентрической сборки из трех кольцевых элементов, включающей по одному элементу от каждого слоя. Такой половинный слой заключен между центральным поперечным сечением, в котором располагаются осевые

линии волокон в сборке, и крайней поверхностью сборки, являющейся центральным сечением для матричного слоя между двумя смежными рядами волокон с концентрическим расположением (см. также рис. 3,а).

Применяли систему материальных цилиндрических координат  $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$ , которые в отсчетной конфигурации трубы обозначаем как  $t, \varphi, r$  – осевая, окружная и радиальная координаты соответственно. Осевую координату  $t$  отсчитываем от центрального поперечного сечения сборки. Наряду с радиальной координатой  $r$  применяли координату  $z = r - a$ , отмеряемую от внутренней поверхности трубы. Физические компоненты векторных и тензорных величин сопровождаем координатными индексами, заключенными в круглые скобки.

Величины, относящиеся к матрице и волокнам, отмечаем индексом  $n$ . Значение  $n = 0$  отвечает матрице, значения  $n = 1, 2, 3$  указывают на волокна и включающие их кольцевые элементы из состава сборки, для которой решается краевая задача; нумерация волокон и включающих их кольцевых элементов производится по направлению от внутренней поверхности трубы к внешней. При отсутствии индекса  $n$  величина относится к матрице и каждому из волокон или к трубе в целом.

**2. Уравнения математической модели.** Исходили из общих уравнений нелинейной механики, определяющих компоненты тензора меры деформации Коши–Грина [6]. Для компонент тензоров осесимметричной деформации матрицы и волокон в трубе приходим к выражениям, в соответствии с которыми они определяются как функции осевой и радиальной координат  $t$  и  $r$ :

$$g_{n(11)} = \lambda_{n1}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}\right)^2,$$

$$g_{n(22)} = \lambda_{n2}^2 = \left(1 + \frac{u_{n(3)}}{r}\right)^2,$$

$$g_{n(33)} = \lambda_{n3}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}\right)^2,$$

$$g_{n(13)} = \lambda_{n1}\lambda_{n3} \cos \omega_{n13} = \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}, \quad (2.1)$$

$$n = 0, 1, 2, 3$$

(компоненты векторных и тензорных величин, равные нулю при условиях симметрии решаемой задачи, не приводим), где  $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}$  – кратности удлинений по направлениям координатных линий  $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$  ( $t, \varphi, r$ ) соответственно;  $\omega_{n13}$  – координатный угол между  $\hat{\theta}^1$  и  $\hat{\theta}^3$  – координатными линиями.

В случае сжимаемых материалов матрицы и волокон компоненты симметричных тензоров напряжений Пиола-Кирхгоффа связаны с компонентами тензоров деформации соотношениями

$$J \sigma_{n(ij)} = 2 \sum_{p=1}^q \frac{\partial W_n}{\partial I_{np}} \cdot \frac{\partial I_{np}}{\partial g_{n(ij)}}, \quad (2.2)$$

$$i, j = 1, \dots, 3, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

где

$W_n = W_n [I_{n1}(g_{n(ij)}), I_{n2}(g_{n(ij)}), \dots, I_{nq}(g_{n(ij)})]$  – упругий потенциал материала матрицы ( $n = 0$ ) или волокна ( $n = 1, 2, 3$ ), определяемый в зависимости от инвариантов  $I_{n1}, I_{n2}, \dots, I_{nq}$  тензора его деформации.

Применяя уравнения равновесия МДГТ при больших (конечных) деформациях, пришли к следующим уравнениям равновесия для связующего и волокон трубы при осесимметричной деформации в метрике отсчетной конфигурации:

$$\frac{\partial t_{n(11)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(31)}}{\partial r} r + t_{n(31)} = 0,$$

$$\frac{\partial t_{n(13)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(33)}}{\partial r} r + t_{n(33)} - t_{n(22)} = 0, \quad (2.3)$$

$$n = 0, 1, 2, 3.$$

Здесь  $t_{n(ij)}$  – физические компоненты несимметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгоффа для матрицы (связующего) и волокон, из которых отличные от нуля определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 t_{n(11)} &= J_n \sigma_{n(11)} \left( 1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \right) + J_n \sigma_{n(13)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}, \\
 t_{n(13)} &= J_n \sigma_{n(13)} \left( 1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r} \right) + J_n \sigma_{n(11)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}, \\
 t_{n(31)} &= J_n \sigma_{n(31)} \left( 1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \right) + J_n \sigma_{n(33)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}, \\
 t_{n(33)} &= J_n \sigma_{n(33)} \left( 1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r} \right) + \\
 &\quad + J_n \sigma_{n(31)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}, \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$t_{n(22)} = J_n \sigma_{n(22)} \left( 1 + \frac{u_{n(3)}}{r} \right). \quad (2.5)$$

Компоненты  $J\sigma_{(ij)}$  симметричного тензора напряжений выражаются через компоненты  $p_{ij}$  векторов напряжений на  $\hat{\theta}^i$  – координатных поверхностях, отнесенных к нормированному векторному базису системы координат в деформированной конфигурации цилиндра, по формулам [7]:

$$\begin{aligned}
 J\sigma_{(11)} &= \lambda_1^{-1} \lambda_2 \lambda_3 \sin \omega_{23} p_{11}, \\
 J\sigma_{(22)} &= \lambda_2^{-1} \lambda_1 \lambda_3 \sin \omega_{13} p_{22}, \\
 J\sigma_{(33)} &= \lambda_3^{-1} \lambda_1 \lambda_2 \sin \omega_{12} p_{33}, \\
 J\sigma_{(13)} &= \lambda_2 \sin \omega_{23} p_{13} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

(индекс « $n$ » принадлежности матрице или волокну опускаем).

**3. Построение численного решения задачи.** Геометрические уравнения (2.1), физические уравнения (2.2) и уравнения равновесия (2.3) вместе с (2.4), (2.5) являются разрешающими уравнениями краевой задачи для трубы как кусочно-однородного цилиндра. Компоненты векторов перемещений  $u_{n(1)}$ ,  $u_{n(3)}$  и компоненты тензоров напряжений  $t_{n(11)}$ ,  $t_{n(13)}$ ,  $t_{n(31)}$ ,  $t_{n(33)}$  в матрице и волокнах принимали в качестве основных величин. Содержащиеся в разрешающих уравнениях компоненты деформации  $g_{n(11)}$ ,  $g_{n(22)}$ ,  $g_{n(33)}$ ,  $g_{n(13)}$  и компоненты напряжений  $t_{n(22)}$  выражали через основные величины с помощью (2.1), (2.2) и (2.5).

Граничные условия для связующего и волокон трубы, при которых решали краевую задачу, выражают отсутствие осевых перемещений в поверхностях  $t = 0$  и  $t = h/2$  и поперечных сдвигов из этих поверхностей:

$$\begin{aligned}
 u_{n(1)}|_{t=0} &= 0, \quad g_{n(13)}|_{t=0} = 0, \\
 u_{n(1)}|_{t=h/2} &= 0, \quad g_{n(13)}|_{t=h/2} = 0, \quad (3.1) \\
 n &= 0, 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Для внутренней поверхности  $r = a$  под воздействием давления  $p$ , как следящей нагрузки, компоненты несимметричного тензора Пиола–Кирхгоффа (2.4) выражали через компоненты симметричного тензора (2.2) и использовали связь последних (2.6) с компонентами вектора напряжений в поверхности. При свободной от нагрузок внешней поверхности  $r = b$  напряжения в ней принимали равными нулю. В результате пришли к граничным условиям во внутренней и внешней поверхностях трубы (сборки блоков), которые записываем в виде

$$\begin{aligned}
 t_{m(31)}|_{r=a} &= -\lambda_{m3}^{-1} \lambda_{m1} \lambda_{m2} \frac{\partial u_{m(1)}}{\partial r} \Big|_{r=a} \cdot p, \\
 t_{m(33)}|_{r=a} &= \\
 &= -\lambda_{m3}^{-1} \lambda_{m1} \lambda_{m2} \left( 1 + \frac{\partial u_{m(3)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \cdot p, \quad (3.2) \\
 t_{m(31)}|_{r=b} &= 0, \quad t_{m(33)}|_{r=b} = 0,
 \end{aligned}$$

где индексом  $m$  отметили отдельно величины в граничных поверхностях как относящиеся к матрице (связующему).

Условия совместного деформирования задавали, исходя из равенств компонент векторов перемещений и напряжений для матрицы (связующего) и волокон между собой в границах их раздела. Эти условия приводим, отмечая величины, относящиеся к матрице, отдельно индексом  $m$ . В цилиндрических поверхностях раздела матрицы с  $n$ -волоком

$$\begin{aligned}
 u_{m(1)}(t, r) &= u_{n(1)}(t, r), \\
 u_{m(3)}(t, r) &= u_{n(3)}(t, r), \\
 t_{m(31)}(t, r) &= t_{n(31)}(t, r), \\
 t_{m(33)}(t, r) &= t_{n(33)}(t, r), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq \delta/2, \quad z = nh - (h + \delta)/2,$$

$$z = nh - (h - \delta)/2,$$

$$n = 1, 2, 3.$$

В поперечной плоскости  $t = \delta/2$  раздела  $n$ -волокон с матрицей

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r),$$

$$u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r),$$

$$t_{m(11)}(t, r) = t_{n(11)}(t, r),$$

$$t_{m(13)}(t, r) = t_{n(13)}(t, r), \quad (3.4)$$

$$t = \delta/2, \quad nh - (h + \delta)/2 \leq z \leq nh - (h - \delta)/2,$$

$$n = 1, 2, 3.$$

Производные первого порядка от основных величин по осевой и радиальной координатам  $t$  и  $r$  аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [8]. Вместе с привлечением граничных условий (3.1), (3.2) и условий совместного деформирования матрицы и волокон (3.3), (3.4) формируется система нелинейных уравнений относительно

основных величин в узловых точках двумерной области  $0 \leq t \leq h/2, a \leq r \leq b$ . Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона [9]. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по давлению  $p$  в трубе. В результате решения краевой задачи при конечном значении давления с привлечением (2.6) определяли узловые значения перемещений  $u_{n(i)}$ , деформаций  $\lambda_{ni}$ ,  $\omega_{nij}$  и напряжений  $p_{nij}$  для матрицы ( $n = 0$ ) и волокон ( $n = 1, 2, 3$ ).

**4. Результаты численного исследования.** Результаты численного решения представляем для трубы, внутренний радиус которой  $a = 100$  мм, внешний радиус  $b = a + 3h = 103$  мм (см. рис. 1). Волокна в ней квадратного сечения  $\delta \times \delta$  с длиной стороны сечения  $\delta = 0,6$  мм. Коэффициент армирования трубы  $k_f = \delta^2/h^2 = 0,36$ . Физические уравнения для материала матрицы строили, используя потенциал Левинсона-Буржеса [10].

$$W_m = \frac{E_m}{4(1+\nu_m)} \left( 2\beta_m + \frac{4\nu_m - 1}{1 - 2\nu_m} \right) (\sqrt{I_3} - 1)^2 \left[ \beta_m (I_1 - 3) + (1 - \beta_m)(I_2 I_3^{-1} - 3) + \right.$$

$$\left. + 2(1 - 2\beta_m)(\sqrt{I_3} - 1) + \left( 2\beta_m + \frac{4\nu_m - 1}{1 - 2\nu_m} \right) (\sqrt{I_3} - 1)^2 \right],$$

где  $I_1, I_2, I_3$  – инварианты тензора меры деформации Коши–Лагранжа. Параметры  $E_m, \nu_m$  характеризуют жесткость и сжимаемость материала матрицы;  $\beta_m$  – дополнительная константа материала. Для модуля

упругости связующего принимали  $E_m = 4$  МПа, для параметра сжимаемости полагали  $\nu_m = 0,40$ , параметр  $\beta_m$  считали равным единице. Поведение материала волокон моделировали потенциалом Блейтца [11]

$$W_f = \frac{E_f}{4(1+\nu_f)} \left[ (I_1 - 3) - \frac{2}{1 - 2\nu_f} \ln \sqrt{I_3} + \frac{4\nu_f}{1 - 2\nu_f} (\sqrt{I_3} - 3) \right]$$

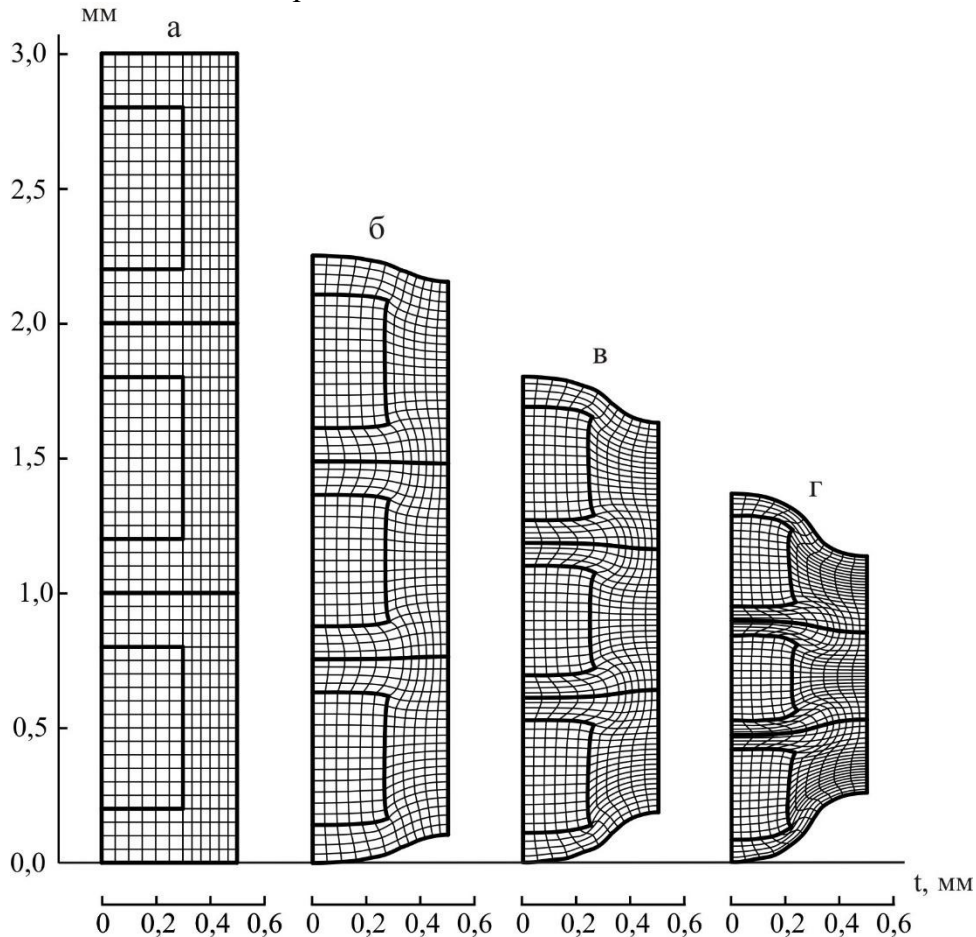
с модулем упругости  $E_f = 68$  МПа и параметром сжимаемости  $\nu_f = 0,4$ .

Материал матрицы с указанными параметрами соответствует механическим свойствам полиуретанового каучука, а материал волокон – свойствам полиуретановых нитей [12].

Результаты приводим на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, при которой на осевых отрезках  $0 \text{ мм} \leq t \leq 0,3 \text{ мм}$  и  $0,3 \text{ мм} \leq t \leq 0,5 \text{ мм}$  по семь равноотстоящих узловых точек, а на радиальных отрезках для областей волокон по тринадцать и областей матрицы между волокнами по девять узловых точек. Точки на границах раздела связующего с волокнами,

в соответствии с компьютерным алгоритмом решения задачи, рассматривались как сдвоенные, принадлежащие разным компонентам материала (координатные линии, отвечающие данной сетке узловых точек, показаны на рис. 2). Задача при такой сетке узловых точек решалась с довольно высокой точностью. Так, удвоив указанное количество узловых точек по координатным

направлениям  $t$  и  $r$ , пришли к значениям радиальных перемещений во внутренней и внешней поверхностях трубы при давлении в ней  $p = 0,2$  МПа, отличающихся от соответствующих значений при исходной дискретизации в пределах 0,15%.



**Рис. 2.** Конфигурации концентрической сборки из кольцевых элементов трехслойной трубы справа от центрального сечения  $t = 0$  мм: а – сборка при отсутствии давления в трубе; б, в, г – сборка при давлениях в трубе  $p = 0,200$  МПа,  $0,250$  МПа и предельном давлении  $0,273$  МПа

На рис. 2 изображены четыре конфигурации осевого сечения концентрической сборки из трех кольцевых элементов справа от поперечного сечения  $t = 0$ . Конфигурации сборки представлены сетками материальных координатных линий  $t = t_i$ ,  $z = z_i$ , проходящих через узловые точки  $(t_i, z_i)$  конечно-разностной схемы решения задачи. Координатные линии строили по интерполяционным кубическим сплайнам в параметрической форме [13]. Первая конфигурация относится к недеформированной трубе (сборке), приведена для сопоставления с ней

остальных трех деформированных конфигураций. Деформированные конфигурации на рис. 2, б-г создаются при значениях внутреннего давления  $p = 0,200$  МПа,  $0,250$  МПа и  $0,273$  МПа соответственно. Давление  $p = 0,273$  МПа, напомним, предельное, при котором конфигурация трубы начинает самопроизвольно развиваться до ее разрушения. (Возможно исследование дальнейшего статического развития конфигурации трубы при соответствующем падении в ней давления. Для этого следует от продолжения решения по давлению внутри



трубы перейти к продолжению по радиальному перемещению одной из точек в ее осевом сечении. Удобно использовать перемещение точки (удлинение радиуса окружности) во внутренней или внешней поверхности трубы по месту центрального сечения  $t = 0$  мм).

Площадь поперечного сечения сборки уменьшается вместе с увеличением ее диаметра при возрастании внутреннего давления. Ввиду тонкостенности эластоармированной трубы конфигурация ее стенки в деформированном состоянии остается достаточно близкой к цилиндрически симметричной относительно срединной цилиндрической поверхности  $r = a + 1,5h$  ( $z = 1,5h$ ).

Ограничивающие поверхности трубы приобретают волнообразную форму (гофрируются) с периодом вдоль образующей, равном периоду армирования  $h$ . Стрелы прогибов (двойные амплитуды волнообразования) во внутренней и внешней поверхностях трубы, определяемые как разности по модулю перемещений в данных поверхностях по месту центрального  $t = 0$  мм и крайнего  $t = 0,5$  мм сечений

$$f_a = \left| u_{(3)} \Big|_{t=0, r=a} - u_{(3)} \Big|_{t=h/2, r=a} \right|,$$

$$f_b = \left| u_{(3)} \Big|_{t=0, r=b} - u_{(3)} \Big|_{t=h/2, r=b} \right|,$$

не очень существенно отличаются между собой. Так, в случае предельного состояния при  $p = 0,273$  МПа, для которого прогибы в ограничивающих поверхностях наибольшие,  $f_a = |198,894 - 199,151| = 0,257$  мм и  $f_b = |197,260 - 197,028| = 0,232$  мм, их различие между собой равно 10,2%, (относим к среднему значению прогибов между собой  $(f_a + f_b)/2$ ). Для конфигурации при  $p = 0,200$  МПа  $f_a = |48,848 - 48,952| = 0,104$  мм,  $f_b = |48,099 - 48,002| = 0,097$  мм с отличием между собой 7,0%.

Срединная поверхность сборки (и трубы в целом) остается в деформированной конфигурации практически цилиндрической. Прогибы ее малы по сравнению с прогибами в ограничивающих поверхностях. Стрела прогиба в срединной поверхности при  $p = 0,273$  МПа

$$f = \left| u_{(3)} \Big|_{t=0, r=(a+b)/2} - u_{(3)} \Big|_{t=0,5, r=(a+b)/2} \right|$$

равна лишь

$$f = |198,076 - 198,082| = 0,006 \text{ мм.}$$

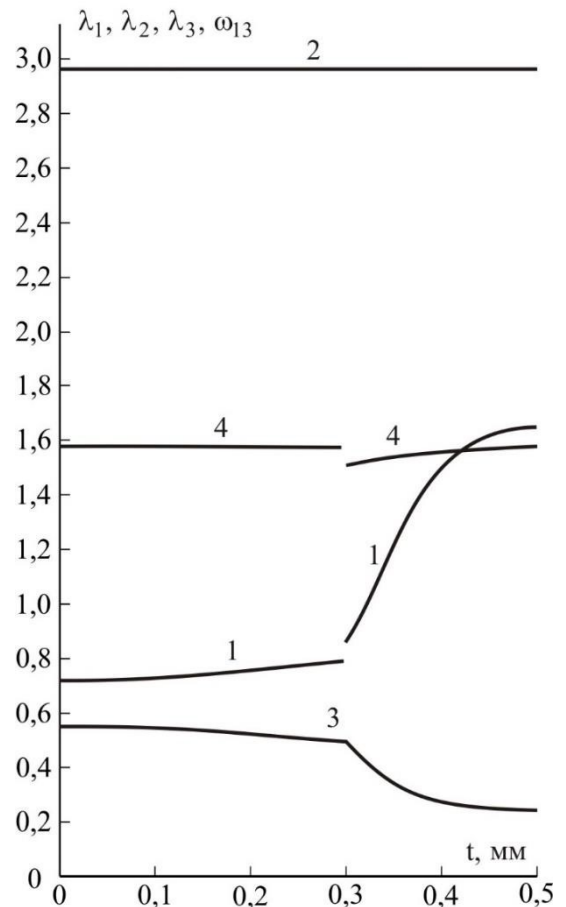


Рис. 3. Распределения кратностей удлинений  $\lambda_1$  (1),  $\lambda_2$  (2),  $\lambda_3$  (3) и координатного угла  $\omega_{13}$  (4) в срединной поверхности  $z = 1,5h$  трехслойной трубы на протяжении половины сборки кольцевых элементов при предельном давлении  $p = 0,273$  МПа

В качестве особенностей деформирования материала матрицы отметим его выдавливание из областей волоконно-матричного слоя между волокнами в область матричного слоя. Ограничивающие цилиндрические поверхности кольцевых волокон в деформируемой трубе становятся выпуклыми, а их торцевые поверхности – вогнутыми. Площадь поперечного сечения сборки, равно как осевого сечения трубы, в предельном состоянии становится примерно в 2,5 раза меньше, чем в исходном. Площадь поперечного сечения волокна при этом уменьшается в 2,4 раза. При этом объем, занимаемый в целом материалом трубы, увеличивается на 22% по сравнению с исходным – как



следствие сжимаемости применяемых в ней материалов связующего и волокон.

На рис. 3 приведены графики распределения линейных деформаций  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  и координатного угла  $\omega_{13}$  как угловой деформации в срединной поверхности  $z = 1,5$  мм для случая нагружения трубы предельным давлением  $p = 0,273$  МПа.

Деформации  $\lambda_1$  и  $\omega_{13}$  претерпевают скачки по месту перехода от торцевой поверхности волокна к связующему – в соответствие с разными упругими свойствами контактируемых материалов. Возрастание всюду на интервале  $0 \leq t \leq 0,5$  мм осевой деформации  $\lambda_1$  сопровождается убыванием всюду на данном интервале радиальной деформации  $\lambda_3$ .

**Выводы.** Провели исследование эластокомпозитной трубы из трех слоев, армированных кольцевыми волокнами квадратного сечения, под воздействием внутреннего давления. Деформирование трубы изучали при больших перемещениях и деформациях по модели кусочно-однородной среды. Выявили изменения материальной конфигурации трубы вместе с гофрированием во внутренней и внешней поверхностях при возрастании внутреннего давления. Обнаружили вытеснение связующего из областей между концентрически расположенными волокнами в примыкающие области матричного слоя. Определили предельное давление, когда труба начинает самопроизвольно развиваться по диаметральному размеру до разрушения.

### Литература

1. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
2. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Київ: Наук. думка, 2002. 655 с.
3. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Ленинград: Машиностроение, 1986. 336 с.
4. Holzapfel G. A., Gasser T. C., Ogden R. W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J. of Elasticity*. 2000. Vol. 61. P. 1–48.
5. Holzapfel G. A., Gasser T. C., Stadler M. A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis. *European J. of Mechanics A–Solids*. 2002. Vol. 21. P. 441–463.
6. Green A. E., Adkins J. E. Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press, 1960.
7. Akhundov V. M. Analysis of elastomeric composites based on fiber-reinforced systems. 1. Development of design methods for composite materials. *Mechanics of Composite Materials*. 1998. Vol. 34, No. 6. P. 515–524.
8. Korn G. A. and Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. New-York: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
9. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
10. Levinson M. and Burgess I. W. A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials. *Int. J. Mech. Sci.* 1971. Vol. 13. P. 563–572.
11. Blatz P. J. and Ko W. L. Application of finite elastic theory to the deformation of rubber materials. *Trans. Soc. Rheology*. 1962. Vol. 7, No 6. P. 223–251.
12. Энциклопедия полимеров: у 3 т. / под ред. В. А. Кабанова и др. Москва: Советская энциклопедия, 1977. 1044 с.
13. Akhundov V. M., Kostrova M. M., Naumova I. Ju. Graphic Visualization of Deformed Fibre-Reinforced Materials. *Metallurgical and Mining Industry*. 2017. No. 2. P. 52–58.

### References

1. Malmeyster, A. K., Tamuzh, V. P. & Teters, G. A. (1980). Strength of Polymer and Composite Materials. Riga: Zinatne.
2. Kirichevskiy, V. V. (2002). The finite element method in mechanic of elastomers. Kiev: Naukova dumka.
3. Chernykh, K. F. (1986). Nonlinear Elasticity Theory in Machine-Building Calculations. Leningrad: Mashinostroenie.
4. Holzapfel, G. A., Gasser, T. C. & Ogden, R. W. (2000). A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J. of Elasticity*, Vol. 61, pp. 1–48.
5. Holzapfel, G. A., Gasser, T. C. & Stadler, M. (2002). A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis. *European J. of Mechanics A–Solids*, Vol. 21, pp. 441–463.
6. Green, A. E. & Adkins, J. E. (1960). Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press.
7. Akhundov, V. M. (1998). Analysis of elastomeric composites based on fiber-reinforced systems. 1. Development of design methods for composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 34, No. 6, pp. 515–524.
8. Korn, G. A. & Korn, T. M. (2000). *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. New-York: General Publ. Company.
9. Ortega, Dzh. & Rejnboldt, V. (1975). *Integration Methods for Solving of Nonlinear Systems of Equations with Many Unknowns*. Moscow: Mir.
10. Levinson, M. & Burgess, I. W. (1971). A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 13, pp. 563–572.
11. Blatz, P. J. & Ko, W. L. (1962). Application of finite elastic theory to the deformation of rubber materials. *Trans. Soc. Rheology*, Vol. 7, No 6, pp. 223–251.
12. Kabanov, V. A. et al. (Eds.). (1977). *Encyclopedia of Polymers*. Vol. 3. Moscow: Sovets Entsikl.
13. Akhundov, V. M., Kostrova, M. M. & Naumova, I. Ju. (2017). Graphic Visualization of Deformed Fibre-Reinforced Materials. *Metallurgical and Mining Industry*, No. 2, pp. 52–58.