

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-04

НЕІЗОТЕРМІЧНА ПОВЗУЧІСТЬ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА**О. З. Галішин¹, С. М. Склепус²**¹*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,*²*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України
plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net***Ключові слова:**

порожнистий циліндр, повзучість, залежність властивостей матеріалу від температури.

Розглянуто просторову задачу визначення осесиметричного напружено-деформованого стану порожнистого нерівномірно нагрітого циліндра при повзучості. Дослідження виконуються в припущенні, що пружні характеристики матеріалу, коефіцієнт лінійного температурного розширення і всі параметри повзучості у визначальних рівняннях залежать від температури. Характеристики матеріалу наведені в табличній формі для ряду фіксованих температур. Для проміжних значень температури пружні характеристики знаходять за допомогою лінійної інтерполяції. Деформація повзучості в одновісному законі повзучості визначається інтерполяцією за температурою відповідно до експоненційного закону Арреніуса. Це дозволяє отримати прості формули для знаходження параметрів повзучості у визначальних рівняннях. Для варіаційної постановки задачі використовується функціонал у формі Лагранжа. Для основних невідомих задачі повзучості (переміщень, напружень і деформацій) була сформульована задача Коші за часом. Для розв'язання сформульованої фізично нелінійної початкової крайової задачі розроблено чисельно-аналітичний метод, який базується на спільному застосуванні R-функцій, методів Рітца і Рунге-Кутта-Мерсона. Розв'язано задачу повзучості для порожнистого нерівномірно нагрітого циліндра, навантаженого внутрішнім тиском. Чисельні результати, отримані за запропонованою просторовою моделлю, було порівняно з аналогічними результатами, отриманими за допомогою уточненої теорії оболонок на основі гіпотези прямолінійного елемента. Співставлення показало, що уточнена теорія оболонок забезпечує задовільний збіг з просторовим розв'язком.

NON-ISOTHERMAL CREEP OF THE HOLLOW CYLINDER**A. Z. Galishin¹, S. N. Sklepus²**¹*S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine,*²*A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine
plast@inmech.kiev.ua, snsklepus@ukr.net***Key words:**

hollow cylinder, creep, dependence of material properties on temperature.

In engineering practice we often meet structural elements in the form of hollow cylinders operating at high temperatures under creep conditions. Most often in calculations use models which describe isothermal deformation of cylinders at constant temperature. In the present work the spatial problem of definition of the axisymmetric stress-strain state of non-uniform heated hollow cylinder under creep conditions is considered. The research are performed in the assumption that elastic characteristics of material, the coefficient of linear temperature expansion and all parameters of creep in the constitutive equations depend on temperature. They are given in tabular form for a number of fixed temperatures. For intermediate temperature values, the elastic characteristics are found by linear interpolation. The deformation of creep in a uniaxial law of creep is determined by temperature interpolation in accordance with the exponential Arrhenius law. This allows you to obtain simple formulas for finding creep parameters in constitutive equations. For the variational statement of the problem, a functional in the Lagrange form is used. For the main unknowns of the creep problem (displacements, stresses and strains) the Cauchy problem with respect to the time was formulated. For solution of formulated physically nonlinear initial/boundary value

problem a numerical-analytical method was developed, which is based on the joint application of the R-functions, Ritz and Runge-Kutta-Merson methods. The creep problem for a hollow non-uniform heated cylinder under internal pressure was solved. The numerical results generated by the proposed spatial model have been compared for this example with analogous results of the refined shell theory based on the rectilinear element hypothesis. The comparison showed that shell theory provides a satisfactory coincidence with the spatial solution.

Вступ. Конструктивні елементи у вигляді порожнистих циліндрів широко використовуються в енергетиці, космічній техніці, хімічній промисловості та ін. Розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) циліндрів, які працюють в умовах повзучості, присвячена велика кількість робіт. Найчастіше в розрахунках використовують моделі, які описують ізотермічне деформування рівномірно нагрітих циліндрів. У цьому випадку порівняно нескладно визначити константи матеріалу у визначальних рівняннях повзучості. Для дослідження повзучості нерівномірно нагрітих тіл необхідно знати фізико-механічні характеристики матеріалу в усьому діапазоні зміни температури. При цьому пружні властивості, коефіцієнти лінійного температурного розширення, а також параметри матеріалу у визначальних співвідношеннях повзучості залежатимуть від температури. Так, у роботах [1-4] для опису залежності від температури використовується функція Арреніуса [5]. У статті [6] використовуються рівняння дифузійної повзучості дрібнозернистих матеріалів, у припущенні, що швидкості деформацій повзучості обернено пропорційні абсолютній температурі. У роботі [7] при дослідженні повзучості нерівномірно нагрітого тіла обертання воно розбивається на області з трьома різними температурними діапазонами, у яких використовуються різні набори констант. На відміну від цього в цій статті ми будемо проводити дослідження в припущенні, що всі параметри повзучості у визначальних рівняннях залежать від температури.

Метою цієї роботи є:

- розробка методу дослідження неізотермічної повзучості осесиметрично навантажених порожнистих циліндрів;
- дослідження повзучості нерівномірно нагрітого циліндра з урахуванням залежності властивостей матеріалу від температури;

– співставлення просторового розв'язку задачі повзучості з розв'язком, отриманим у рамках уточненої теорії оболонок.

Модель деформування матеріалу при неізотермічному навантаженні. Нехай криві повзучості при одноосьовому напруженому стані описуються рівнянням

$$p = At^m \sigma^n, \quad (1)$$

де p – деформація повзучості; A , m , n – параметри, які визначаються з експериментів на повзучість при одноосьовому напруженому стані.

Для розв'язання задачі повзучості необхідно знати фізико-механічні характеристики матеріалу в усьому діапазоні зміни температури $T_1 \leq T \leq T_2$.

Залежність деформації повзучості від температури в більшості досліджень враховується шляхом подання параметра A у вигляді [5, 8, 9]

$$A(T) = A_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right), \quad (2)$$

де R – універсальна газова стала, T – абсолютна температура, Q – енергія активації.

Відзначимо, що рівність (2) передбачає, що залежність від температури враховується лише за допомогою параметра $A(T)$, а інші параметри вважаються незмінними в усьому температурному інтервалі $T_1 \leq T \leq T_2$. Однак, як показали результати обробки експериментальних даних, для великих температурних інтервалів знайдені описаним вище способом розрахункові криві повзучості можуть помітно відрізнятися від експериментальних. На відміну від цього припускати, що всі параметри повзучості в (1) залежать від температури.

Нехай для кожного із значень температури T_i ($i = 1, 2$) задані модулі Юнга E_i , кое-

фіцієнти Пуассона ν_i та лінійного температурного розширення α_i матеріалу, а також увесь необхідний набір характеристик повзучості: A_i, m_i, n_i . Для проміжної температури $T_1 < T < T_2$ модуль Юнга $E(T)$, коефіцієнти Пуассона $\nu(T)$ та лінійного температурного розширення $\alpha(T)$ матеріла можуть бути знайдені шляхом лінійної інтерполяції.

При обробці експериментальних даних виявилось, що для параметрів повзучості A, m, n лінійна інтерполяція за температурою є неприпустимою. У роботі [10] була розроблена методика визначення цих параметрів на основі експоненціального закону Арреніуса. Для цього необхідно мати експериментальні криві повзучості на перших двох ділянках при температурах T_1 і T_2 . Для проміжного значення температури $T_1 < T < T_2$ ці параметри визначаються за формулами

$$\begin{aligned} A(T) &= A_1^{1-r} A_2^r, \quad n(T) = (1-r)n_1 + rn_2, \\ m(T) &= (1-r)m_1 + rm_2, \\ r &= \frac{T-T_1}{T_2-T_1} \cdot \frac{T_2}{T}. \end{aligned} \quad (3)$$

Постановка і метод розв'язання початково-крайової задачі повзучості. Розглянемо ізотропний осесиметрично навантажений порожнистий циліндр у циліндричній системі координат $Or\varphi z$. Вісь Oz співпадає з віссю обертання. Вважаємо, що закон зміни температури в циліндрі $T = T(r, z, t)$ відомий. Задачу розв'язуватимемо в геометрично лінійній, квазістатичній постановці в припущенні, що в процесі деформування пластичні деформації не виникають. Компоненти тензора швидкостей повних деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}$ складаються з компонентів швидкостей пружних деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$, температурних $\dot{\varepsilon}_{ij}^T$ та компонентів швидкостей незворотних деформацій повзучості \dot{p}_{ij} :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T + \dot{p}_{ij}, \quad (i, j = \overline{1, 3}).$$

Або в циліндричній системі координат:

$$\dot{\varepsilon}_{rr}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{rr}^e(r, z, t) + \varepsilon_{rr}^T(r, z, t) +$$

$$+ \dot{p}_{rr}(r, z, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{zz}^e(r, z, t) + \varepsilon_{zz}^T(r, z, t) + \dot{p}_{zz}(r, z, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^e(r, z, t) + \varepsilon_{\varphi\varphi}^T(r, z, t) + \dot{p}_{\varphi\varphi}(r, z, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{rz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rz}(r, z, t).$$

Температурні деформації обчислюються за формулами:

$$\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{zz}^T = \varepsilon_{\varphi\varphi}^T = \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{rz}^T = 0,$$

де T_0 – температура, за якої відсутні напруження та деформації. Тут і далі крапка над символами означає повну похідну за часом t .

Основні невідомі задачі повзучості в довільній точці циліндра можна знайти із розв'язку задачі Коші за часом для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= \dot{u}_r, \quad \frac{du_z}{dt} = \dot{u}_z, \\ \frac{d\varepsilon_{rr}}{dt} &= \dot{u}_{r,r}, \quad \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \dot{u}_{z,z}, \quad \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt} = r^{-1}\dot{u}_r, \\ \frac{d\gamma_{rz}}{dt} &= 2 \frac{d\varepsilon_{rz}}{dt} = \dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}, \\ \frac{d\sigma_{rr}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{e}_{zz} - \dot{e}_{\varphi\varphi}) + \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr} - \dot{e}_{rr}), \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{e}_{rr} - \dot{e}_{\varphi\varphi}) + \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{e}_{zz}), \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{e}_{rr} - \dot{e}_{zz}) + \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{e}_{\varphi\varphi}), \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} &= G(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}), \quad \frac{dp_{rr}}{dt} = \dot{p}_{rr}, \\ \frac{dp_{zz}}{dt} &= \dot{p}_{zz}, \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} &= \dot{p}_{\varphi\varphi}, \quad \frac{dp_{rz}}{dt} = \dot{p}_{rz}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)$ – переміщення уздовж осей Or та Oz відповідно; $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rz}$ – компоненти тензора напружень;

$$\lambda(T) = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \lambda_1(T) = \lambda + 2G,$$

$$G(T) = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \dot{\epsilon}_{rr} = \dot{p}_{rr} + \dot{\epsilon}_{rr}^T, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \dot{p}_{zz} + \dot{\epsilon}_{zz}^T,$$

$$\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{p}_{\varphi\varphi} + \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}^T, \quad \dot{\epsilon}_{rr}^T = \dot{\epsilon}_{zz}^T = \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}^T = \alpha \dot{T}.$$

У початковий момент часу $t=0$ деформації повзучості дорівнюють нулеві: $p_{rr} = p_{zz} = p_{\varphi\varphi} = p_{rz} = 0$. Початкові умови для решти шуканих функцій знаходимо із

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{\mathbf{U}}) = & 0,5 \iint_{\Omega} \left[\lambda_1 (\dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + r^{-2} \dot{u}_r^2) + G (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + 2\lambda (\dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + r^{-1} \dot{u}_r (\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})) \right] r dr dz - \\ & - \iint_{\Omega} \left[\dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^f + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^f + r^{-1} \dot{u}_r \dot{N}_{\varphi\varphi}^f + \dot{N}_{rz}^f (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \\ & - \iint_{\Omega} \left[\dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^f + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^f + r^{-1} \dot{u}_r \dot{N}_{\varphi\varphi}^f + \dot{N}_{rz}^f (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n \dot{u}_n + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau) d\partial\Omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $\dot{\mathbf{U}} = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$ – вектор кінематично можливих швидкостей переміщень; Ω – меридіанний переріз циліндра; $\partial\Omega_p$ – частина контуру $\partial\Omega$, де прикладені зовнішні сили, \dot{P}_n , \dot{P}_τ – швидкості нормальної і дотичної складових зовнішніх сил; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ – зовнішня нормаль та дотична до контуру $\partial\Omega$; $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$; n_r , n_z – напрямні косинуси нормалі \mathbf{n} . Швидкості «фіктивних» сил, зумовлених температурними деформаціями і деформаціями повзучості, обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{rr}^f &= \left[\lambda_1 \dot{\epsilon}_{rr} + \lambda (\dot{\epsilon}_{zz} + \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}) \right], \\ \dot{N}_{zz}^f &= \left[\lambda_1 \dot{\epsilon}_{zz} + \lambda (\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}) \right], \\ \dot{N}_{\varphi\varphi}^f &= \left[\lambda_1 \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} + \lambda (\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{zz}) \right], \\ \dot{N}_{rz}^f &= 2G \dot{p}_{rz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Швидкості деформацій повзучості у функціоналі (5) вважаються відомими і не варіюються. Варіаційні задачі для функціонала (5) розв'язуються методом Рітца. При цьому координатні функції, які точно задовольняють заданим граничним умовам, будуються за допомогою методу R-функцій [12].

розв'язку задачі термопружного деформування.

Розв'язання початкової задачі для системи рівнянь (4) проводимо методом Рунге–Кутти–Мерсона (РКМ) з автоматичним вибором часового кроку. Праві частини рівнянь у фіксовані моменти часу $t \neq 0$, які відповідають схемі РКМ, знаходимо за допомогою розв'язку варіаційної задачі для функціонала у формі Лагранжа [11]

Розв'язання задачі на основі уточненої оболонкової моделі. Результати розрахунку, отримані за розробленою методикою, зіставлялися з розв'язком, отриманим у рамках уточненої теорії оболонок. При цьому постановка задачі базувалася на оболонковій моделі прямолінійного елемента, що враховує деформації поперечного зсуву. У довільний момент часу крайова задача зводилася до чисельного інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь [13]

$$\frac{d\vec{Y}}{dz} = P(z)\vec{Y} + \vec{f}(z),$$

$$\vec{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}^T \quad (7)$$

при заданих на торцях граничних умовах виду

$$B_i \vec{Y} = \vec{b}_i. \quad (8)$$

У рівностях (7), (8) позначено: \vec{Y} – вектор розв'язувальних функцій, що складається з радіальної N_r та осьової N_z складових зусиль, діючих у перетині $z = \text{const}$; M_z – осьовий згинаючий момент; u_r , u_z – радіальна та осьова складові переміщення точки координатної поверхні; ψ_z – повний кут повороту прямолінійного елемента, що складається з кута повороту нормалі і кута пово-

роту, обумовленого поперечним зсувом. Величини $P(z)$ й $\vec{f}(z)$ означають матрицю системи і вектор вільних членів, а B_i й \vec{b}_i – матриці і вектори граничних умов. Компоненти матриці $P(z)$ залежать від характеристик жорсткості оболонки і знаходяться у результаті чисельного інтегрування за товщиною оболонки. Компоненти вектора $\vec{f}(z)$, крім цього, залежать від деформацій повзучості.

Числові результати. Розглянемо повзучість «вільно опертого» циліндра з нікелевого сплаву René 80. Циліндр навантажений внутрішнім тиском інтенсивності $P_{inn} = 25,0$ МПа. Температура на внутрішній поверхні $T = T_0 = 1073$ К, на зовнішній – $T = 1173$ К. Геометричні розміри циліндра: довжина $l = 0,1$ м, внутрішній і зовнішній радіуси: $r_1 = 0,095$ м, $r_2 = 0,105$ м, радіус серединної поверхні $r_0 = 0,1$ м.

При розв’язанні задачі вважалося, що температура по товщині циліндра змінюється за лінійним законом.

У табл. 1 наведені пружні характеристики матеріалу та коефіцієнт лінійного температурного розширення при температурах 1073 К і 1173 К [14].

Табл. 1

Характеристика	Температура, К	
	1073	1173
Модуль Юнга, МПа	$1,458 \cdot 10^5$	$1,2856 \cdot 10^5$
Коефіцієнт Пуассона	0,3	0,3
Коефіцієнт лінійного температурного розширення $\times 10^6$ (К ⁻¹)	15,1	16,0

У табл. 2 наведені характеристики повзучості при температурах 1033 К і 1255 К [14].

Табл. 2

Характеристика повзучості	Температура, К	
	1033	1255
$A \cdot 10^p$ (МПа ⁻ⁿ хв ^{-m})	1,95	1,361
n	7,397	2,324
m	0,2577	0,2044
p	23	8

Визначальні рівняння для швидкостей деформацій повзучості матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{rr} &= \frac{3}{2} A(T) m(T) t^{m(T)-1} \sigma_i^{n(T)-1} \left(\sigma_{rr} - \frac{1}{3} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \right), \\ \dot{p}_{zz} &= \frac{3}{2} A(T) m(T) t^{m(T)-1} \sigma_i^{n(T)-1} \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \right), \\ \dot{p}_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{2} A(T) m(T) t^{m(T)-1} \sigma_i^{n(T)-1} \left(\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \right), \\ \dot{p}_{rz} &= \frac{3}{2} A(T) m(T) t^{m(T)-1} \sigma_i^{n(T)-1} \sigma_{rz}, \end{aligned} \tag{8}$$

де $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{rz}^2}$ – інтенсивність напружень.

Використовуючи дані таблиць 1, 2, пружні характеристики матеріалу і коефіцієнт лінійного температурного розширення знаходилися шляхом лінійної інтерполяції, а характеристики повзучості $A(T)$, $m(T)$, $n(T)$ в рівняннях (8) було знайдено за формулами (3).

Граничні умови на торцях циліндра $z = \pm l/2$ задавались у вигляді:

$$\dot{u}_r = 0, \quad \dot{\sigma}_{zz} = 0.$$

На внутрішній поверхні $r = r_1$:

$$\dot{\sigma}_{rr} = -\dot{P}_{inn} = 0, \quad \dot{\sigma}_{rz} = 0.$$

На зовнішній поверхні $r = r_2$:

$$\dot{\sigma}_{rr} = 0, \quad \dot{\sigma}_{rz} = 0.$$

Часткова структура розв’язку, яка задовольняє кінематичним граничним умовам для швидкостей переміщень, має вигляд:

$$\dot{u}_r = \omega_1 \Phi_1, \quad \dot{u}_z = z \Phi_2. \quad (9)$$

Тут Φ_1, Φ_2 – невизначені компоненти структури розв'язку; $\omega_1 = \frac{1}{l} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right) \geq 0$ – смуга

Ω_1 , укладена між лініями $z = -\frac{l}{2}$ та $z = \frac{l}{2}$ ($\omega_1 = 0, \omega_n = -1$ на межі $\partial\Omega_1, \omega > 0$ всередині смуги) рівняння ділянки межі, де задані швидкості переміщень.

Рівняння межі області Ω , де відшукується наближений розв'язок задачі, може бути записано у вигляді

$$\omega(r, z) = \omega_1 \wedge_0 \omega_2 = 0, \quad (10)$$

де $\omega_2 = \frac{(r-r_1)(r_2-r)}{r_2-r_1} = 0$ – рівняння вільної від закріплення ділянки межі області Ω , а символ \wedge_0 позначає R-кон'юнкцію [12]:

$$f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}.$$

Оскільки структура розв'язку (9) задовольняє тільки кінематичним граничним умовам, функція $\omega = \omega(r, z)$, що описує геометрію області, до неї не входить. Рівняння (10) використовувалося для просторової дискретизації задачі при знаходженні координат вузлів сітки інтегрування. Відзначимо, що розроблений метод може бути також використаний для дослідження повзучості осесиметрично навантажених тіл обертання з довільною формою меридіанного перетину.

При чисельній реалізації невизначені компоненти структури розв'язку подаємо у вигляді скінченних рядів $\Phi_i(r, z, t) = \sum_n C_n^{(i)}(t) f_n^{(i)}(r, z)$, ($i=1,2$), де $C_n^{(i)}(t)$ – невизначені коефіцієнти, які на кожному часовому кроці знаходимо методом Рунге; t – деякий фіксований момент часової дискретизації схеми РКМ або дискретизації за часом для видачі результатів обчислень; $\{f_n^{(i)}\}$ – системи лінійно незалежних функцій. У цій роботі $\{f_n^{(i)}\}$ вибирали у вигляді бікубічних сплайнів Шенберга. Системи сплайнів будували на регулярній сітці $K_r \times K_z$, де

K_r, K_z – кількість відрізків дискретизації уздовж осей Or та Oz відповідно.

Наближений розв'язок задачі повзучості циліндра, сформульованої в рамках просторової постановки, було отримано при наступних параметрах просторової та часової дискретизації: $N_r = 20, N_z = 10$, початковий крок за часом $\Delta t_0 = 10^{-3}$ хв, задана по-хибка обчислень у методі РКМ – $\delta = 10^{-3}$.

Для даної задачі граничні умови у рамках уточненої теорії оболонки формулювалися у вигляді

$$\text{при } z=0: N_r = u_z = \psi_z = 0,$$

$$\text{при } z=l/2: N_z = M_z = u_r = 0.$$

Розв'язання крайової задачі (7), (8) здійснювалося методом Рунге-Кутти з дискретною ортогоналізацією за С. К. Годуновим. Інтегрування задачі за часом виконувалося методом РКМ.

На рис. 1 показано графіки зростання за часом радіальних переміщень серединної поверхні циліндра $w = u_r(r_0, 0, t)$. На рис. 2, 3 зображено графіки зміни за часом інтенсивності напружень та колових деформацій повзучості на внутрішній поверхні у центрі циліндра. Суцільні лінії відповідають просторовому, а штрихові – оболонковому розв'язку.

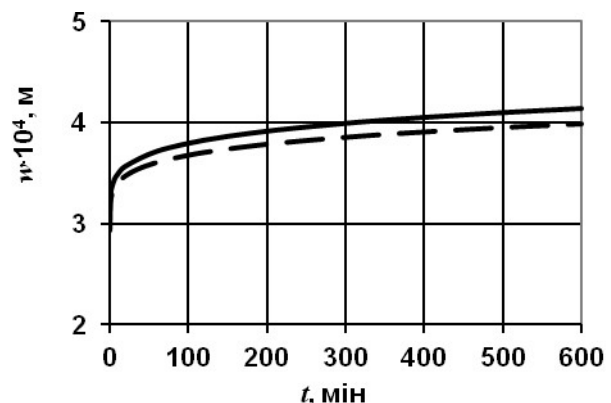


Рис. 1. Радіальні переміщення серединної поверхні циліндра

Представлені результати свідчать, що розв'язок початково-крайової задачі повзучості, отриманий на базі уточненої теорії оболонки, забезпечує добре узгодження з просторовим розв'язком для переміщень і напружень (відносне відхилення не перевищувало 3,7% для переміщень і 2,2% для напружень) і задовільне узгодження для де-

формацій повзучості (максимальне відхилення – 18,7%).

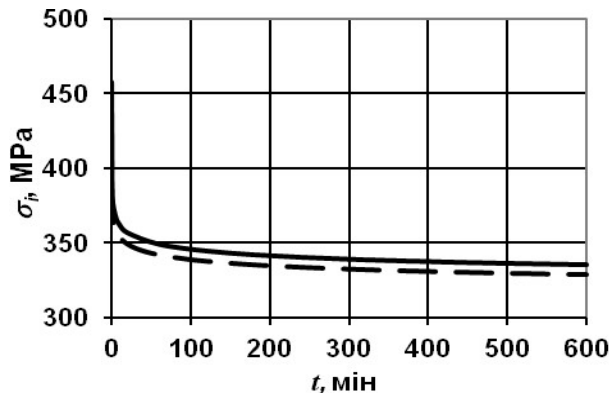


Рис. 2. Інтенсивність напружень на внутрішній поверхні циліндра

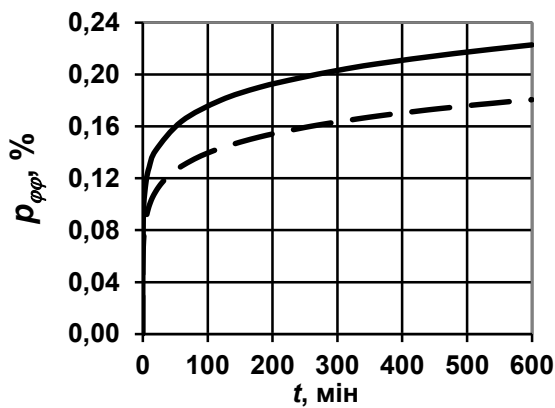


Рис. 3. Деформації повзучості на внутрішній поверхні циліндра

Висновок. Розроблено метод визначення напружено-деформованого стану при повзучості осесиметрично навантажених циліндрів, що знаходяться в умовах нерівномірного нагрівання. Пружні і реологічні властивості матеріалу передбачаються залежними від температури. Вони задаються в табличному вигляді для ряду фіксованих температур. Для проміжних значень температури пружні характеристики знаходяться шляхом лінійної інтерполяції. Деформація повзучості в одновісному законі визначається за допомогою інтерполяції за температурою відповідно до експоненціального закону Арреніуса. Це дозволяє отримати прості формули для знаходження параметрів повзучості у визначальних співвідношеннях.

Зіставлення результатів розрахунку, отриманих у рамках просторової постановки і за допомогою уточненої теорії оболонок, дозволяє зробити висновок, що для прийнятих у статті геометричних розмірів циліндра, умов закріплення і навантаження теорія оболонок забезпечує задовільний збіг з просторовим розв’язком.

Література

1. Singh T., Gupta V. K. Effect of material parameters on steady state creep in a thick composite cylinder subjected to internal pressure. *The Journal of Engineering Research*. 2009. Vol. 6, No. 2. P. 20–32.
2. Singh T., Singh H. Steady state creep behaviour of functionally graded thick cylinder. *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. 2013. Vol. 7, No 12. P. 2499–2505.
3. Singh S., Saini S. Material parameter and effect of thermal load on functionally graded cylinders. *International Journal of Modern Engineering research*. 2015. Vol. 5, Issue 4. P. 8–19.
4. Гораш Е. Н., Лысенко С. В., Львов Г. И. Неизотермическая ползучесть и повреждаемость элементов паровых турбин. *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: Динаміка і міцність машин. 2006. № 21. С. 75–88.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
6. Jamian S., Sato H., Tsukamoto H., Watanabe Y. Creep analysis of functionally graded material thick-walled cylinder. *Applied Mechanics and Materials*. 2013. Vol. 315. P. 867–871.
7. Гораш Е. М. Застосування ізотропної та анізотропної концепцій пошкоджуваності до розрахунку тривалої міцності ротору парової турбіни в умовах високотемпературної повзучості. *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: Динаміка і міцність машин. 2006. № 21. С. 66–75.
8. Perrin I. J., Hayhurst D. R. Creep constitutive equations for a 0.5Cr-0.5Mo-0.25V ferritic steel in the temperature range 600-675 °C. *Journal of Strain Analysis*. 1996. Vol. 31, No. 4. P. 299–314.
9. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. Москва: Мир, 1986. 360 с.

10. Галишин А. З. Методика определения параметров ползучести и длительной прочности изотропных материалов при неизотермических процессах нагружения. *Проблемы прочности*. 2004. № 4. С. 21–30.
11. Sklepus S. M. Solution of the Axisymmetric Problem of Creep and Damage for a Piecewise Homogeneous Body with an Arbitrary Shape of a Meridional Section. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 205, No. 5. P. 644–658.
12. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
13. Galishin A. Z., Zolochovsky A. A., Sklepus S. N. Feasibility of shell model for determinity stress-strain state and creep damage of cylindrical shells. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53, No. 4. P. 398–406.
14. Zolochovsky A., Galishin A., Sklepus A., Gnitko V., Kühhorn A., Leyens C. Benchmark creep tests for thermal barrier coatings. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Машинознавство і САПР*. 2013. № 23(996). С. 159–178.

References

1. Singh, T. & Gupta, V. K. (2009). Effect of material parameters on steady state creep in a thick composite cylinder subjected to internal pressure. *The Journal of Engineering Research*, Vol. 6, No. 2, pp. 20–32.
2. Singh, T. & Singh, H. (2013). Steady state creep behaviour of functionally graded thick cylinder. *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*, Vol. 7, No 12, pp. 2499–2505.
3. Singh, S. & Saini, S. (2015). Material parameter and effect of thermal load on functionally graded cylinders. *International Journal of Modern Engineering research*, Vol. 5, Issue 4, pp. 8–19.
4. Gorash, E. N., Lysenko, S. V. & Lvov, G. I. (2006). Non-isothermal creep and damageability of steam turbine elements. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dynamika i mitsnist' mashyn*, No. 21, pp. 75–88.
5. Rabotnov, Yu. N. (1966). *Creep of structural elements*. Moscow: Nauka.
6. Jamian, S., Sato, H., Tsukamoto, H. & Watanabe, Y. (2013). Creep analysis of functionally graded material thick-walled cylinder. *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 315, pp. 867–871.
7. Gorash, E. M. (2006). Application of isotropic and anisotropic concepts of damage to the calculation of the long-term strength of the rotor of the steam turbine under conditions of high temperature creep. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dynamika i mitsnist' mashyn*, No. 21, pp. 66–75.
8. Perrin, I. J. & Hayhurst, D. R. (1996). Creep constitutive equations for a 0.5Cr-0.5Mo-0.25V ferritic steel in the temperature range 600-675°C. *Journal of Strain Analysis*, Vol. 31, No. 4, pp. 299–314.
9. Boyle, J. & Spence, J. (1986). *Analysis of stress in creep structures*. Moscow: Mir.
10. Galishin, A. Z. (2004). Technique of Determination of Creep and Creep Rupture Strength Parameters of Isotropic Materials in Nonisothermic Loading Processes. *Problemy prochnosti*, No. 4, pp. 21–30.
11. Sklepus, S. M. (2015). Solution of the Axisymmetric Problem of Creep and Damage for a Piecewise Homogeneous Body with an Arbitrary Shape of a Meridional Section. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 205, No. 5, pp. 644–658.
12. Rvachev, V. L. (1982). *Theory of R-functions and some of its applications*. Kiev: Nauk. dumka.
13. Galishin, A. Z., Zolochovsky, A. A. & Sklepus, S. N. (2017). Feasibility of shell model for determinity stress-strain state and creep damage of cylindrical shells. *International Applied Mechanics*, Vol. 53, No. 4, pp. 398–406.
14. Zolochovsky, A., Galishin, A., Sklepus, A., Gnitko, V., Kühhorn, A. & Leyens, C. (2013). Benchmark creep tests for thermal barrier coatings. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Mashynoznavstvo i SAPR*, No. 23(996), pp. 159–178.