

УДК 539.3

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-1-05

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ РІЗНИХ ПІДХОДІВ

О. Я. Григоренко¹, М. Ю. Борисенко¹, О. В. Бойчук², В. С. Новицький³

¹Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,

²Миколаївський національний аграрний університет,

³Миколаївський муніципальний колегіум ім. В. Д. Чайки

ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com

Ключові слова:

метод скінченних елементів, метод Релея-Рітца, частоти і форми вільних коливань, квадратна пластина, жорстке закріплення.

Визначаються частоти та форми вільних коливань тонкої жорстко закріпленої квадратної пластини сталої товщини на основі двох чисельних методів. Дослідження проводились методом скінченних елементів (МСЕ), який реалізовано на ліцензійному програмному засобі FEMAP з розв'язувачем NX Nastran і методом Релея-Рітца, який модифіковано та реалізовано на ЕОМ у середовищі Delphi. Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, розв'язуванням тестових задач та практичною збіжністю розрахованих частот методом скінченних елементів і методом Релея-Рітца. У результаті дослідження у формулі методу Релея-Рітца виділено три коефіцієнти, що характеризують геометричні розміри пластини, фізико-механічні властивості матеріалу і форму коливань, зроблено уточнення останнього коефіцієнта, що підвищило точність розрахунку. Створено програму в середовищі Delphi та поширено МСЕ для розрахунку частот і форм вільних коливань. Результати розрахованих частот мають хорошу збіжність з результатами, отриманими іншими авторами експериментальним та чисельним методами. Проведено порівняльний аналіз частот і форм вільних коливань розглянутої пластини, розрахованих двома чисельними методами.

NUMERICAL ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF RECTANGULAR PLATES BASED ON DIFFERENT APPROACHES

A. Ya. Grigorenko¹, M. Yu. Borysenko¹, O. V. Boychuk², V. S. Novytskyi³

¹S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine,

²Mykolayiv National Agrarian University,

³Mykolayiv municipal collegium

ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com

Key words:

finite element method, Rayleigh-Ritz method, frequencies and modes of free oscillations, square plate, rigid fastening.

Plates of various shapes are the most common elements of thin-walled structures in various branches of modern technology. It is necessary to calculate the load-bearing elements of structures for the case of various suddenly arising dynamic loads when various engineering facilities are designing and constructing. Therefore, the study of the dynamic behavior of engineering structures elements taking into account the properties of the material and the impact of the environment during dynamic load is an actual problem. In this connection it is necessary to extend the numerical methods for studying the natural oscillations frequencies and forms of rigidly fixed square plates.

Modern science does not ignore this problem, so in [8] we give an overview of the works devoted to the calculation of the frequencies of free oscillations of a rectangular plate; the results of computational experiments are given. In [9] analytic expressions were constructed for the calculation of eigenfrequencies and forms of oscillations of a square homogeneous plate fixed along the contour. In [10; 11] the solution of the problems of free oscillations of rectangular plates with variable thickness is proposed with the aid of a numerical-analytic spline collocation method in conjunction with the discrete-orthogonalization method, for example

in [10], the problem of free oscillations of a square plate with a constant thickness fixed along the edges is solved as a mathematical model. The calculated frequencies are compared with the experimental data obtained by the method of holographic interferometry. In [11], the free oscillations frequencies of anisotropic rectangular plates with different thickness with different boundary conditions are calculated. In [12], orthotropic rectangular plates of variable thickness are considered based on the spline approximation method and the discrete orthogonalization method in conjunction with the step-by-step search method. One of the modern methods for calculating problems of dynamics using computers is the finite element method (FEM). In [13], a thin square plate with different physical-mechanical characteristics with free edges is investigated. The geometry modeling and numerical calculation of the frequencies and forms of free oscillation of plates are carried out by the finite element method, which is implemented using the computer program FEMAP with NASTRAN solving. A comparative analysis of the calculated eigenfrequencies with frequencies obtained numerically and experimentally by other authors is carried out.

Free oscillations frequencies and forms of a thin rigidly fixed square plate with constant thickness are determined based on two numerical methods. The research was carried out by the finite element method which is implemented on the licensed software FEMAP and the Rayleigh-Ritz method which is modified and implemented on a computer in the Delphi environment. The reliability of the results obtained is ensured by using a valid mathematical model, the correctness of the problem statement, the solution of test problems and the practical convergence of the calculated frequencies by the finite element method and the Rayleigh-Ritz method. As a result of the research in the Rayleigh-Ritz method formula three coefficients characterizing the geometric dimensions of the plate, the physical-mechanical properties of the material and the oscillations mode were separated, clarification of the last coefficient increased the accuracy of the calculation. The program was created in the Delphi environment and the finite element method was distributed to calculate frequencies and forms of free oscillations. The results of the calculated frequencies have good agreement with the results obtained by other authors by experimental and numerical methods. A comparative analysis of the frequencies and forms of free oscillations of the considered plate calculated by two numerical methods was carried out.

Постановка проблеми. У різних галузях сучасної техніки пластини різноманітних форм є найбільш поширеними елементами тонкостінних конструкцій. При проектуванні і будівництві різних інженерних споруд необхідно проводити розрахунок несучих елементів конструкцій на випадок дії різноманітних динамічних навантажень. Тому актуальним є вивчення динамічної поведінки елементів інженерних споруд з урахуванням властивостей матеріалу і впливу навколишнього середовища при динамічному навантаженні. У зв'язку з цим необхідно поширити чисельні методи дослідження частот і форм власних коливань жорстко закріплених квадратних пластин.

Дослідженню частот і форм вільних коливань прямокутних пластин присвячено

багато наукових праць. Однією з перших робіт, у якій проведено розрахунок основної частоти квадратної пластини, є робота С. Томотіка 1936 року [1]. У роботі [2] розглянуто 21 тип можливих для прямокутної пластини граничних умов. Огляд із застосування методу Релея-Рітца наведено в [3]. У рамках класичної теорії для визначення частот і форм вільних коливань використовуються багато різноманітних методів: метод Релея-Рітца, метод Бубнова-Гальоркіна, метод колокацій, метод збурень, метод рядів, метод сіток, метод початкових параметрів Б. Г. Коренева, метод Едмана, асимптотичний метод В. В. Болотіна та інші. Короткий виклад цих методів наводиться в роботах [4-6].

Зазначимо, що окрім аналітичних і чисельних методів, існують експериментальні методи дослідження вільних коливань пластин, у [7] обговорюється експериментальний аналіз вібраційних режимів пластин.

Сучасна наука також не залишає без уваги дану проблему, так, у [8] наводиться огляд робіт присвячених обчисленню частот вільних коливань прямокутної пластини, наведені результати обчислювальних експериментів, якими показано, що друга і третя частота квадратної пластинки – кратні, тобто відповідний власний підпростір – двовимірний. Наведено дві відповідні власні форми. У [9] побудовано аналітичні вирази для обчислення власних частот і форм коливань затисненої по контуру квадратної однорідної пластини. Дана оцінка похибки порівняння з відомими високоточними розрахунками. Зроблено порівняння аналітичних розрахунків з експериментальними даними, отриманими автором резонансним методом. Установлено, що аналітичні і відповідно чисельні результати збігаються з експериментальними з похибкою менше 1%. В [10, 11] запропоновано розв'язок задач про вільні коливання прямокутних пластин змінної товщини за допомогою чисельно-аналітичного методу сплайн-коллокації в поєднанні з методом дискретно-ортогоналізації, так в [10] як математичну модель розв'язано задачу про вільні коливання квадратної пластини з постійною товщиною, закріпленою по краях. Розраховані частоти порівнюються з експериментальними даними отриманими методом голографічної інтерферометрії. В [11] розраховані частоти власних коливань анізотропних прямокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами. У [12] розглянуті ортотропні прямокутні пластини змінної товщини на основі методу сплайн-апроксимації і методу дискретної ортогоналізації в поєднанні з методом покрокового пошуку.

Одним із сучасних методів розрахунку задач динаміки за допомогою ЕОМ є МСЕ. У роботі [13] досліджується тонка квадратна пластинка з різними фізико-механічними характеристиками з вільними краями. Моделювання геометрії та чисельний розрахунок частот та форм вільних коливань пластин

виконано методом скінченних елементів, який реалізовано за допомогою комп'ютерної програми FEMAP з розв'язувачем NASTRAN. Проводиться порівняльний аналіз розрахованих власних частот з частотами, які отриманні чисельно та експериментально іншими авторами.

У зв'язку з цим є необхідним поширити чисельні методи дослідження частот і форм власних коливань жорстко закріплених квадратних пластин на основі методу скінченних елементів, реалізованого на FEMAP і методу Релея-Рітца, реалізованого в середовищі Delphi на ЕОМ.

Вихідні співвідношення задач динаміки пластин МСЕ. Рівняння руху пластини в МСЕ за відсутності демпфування має вигляд

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j + \mathbf{M}\ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (1)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно, $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -тому ступеню вільності, який відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях пластини всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (2)$$

Після підстановки функцій (2) у рівняння руху пластини визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення частот і форм вільних коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховуються, використовує, як основний, метод Ланцоша (Lanczos) [14].

Вихідні співвідношення задач динаміки пластин методу Релея-Рітца. Застосування формули Релея-Рітца [5] дає наближене значення для частоти вільних коливань:

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} \cdot \frac{\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \left\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] \right\} dx_1 dx_2}{\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} w^2 dx_1 dx_2}. \quad (4)$$

Після інтегрування (4) [5] отримаємо формулу для наближеного визначення частот вільних коливань жорстко закріпленої прямокутної пластини:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{A_m^4}{a_1^4} + \frac{A_n^4}{a_2^4} + 2 \frac{B_m B_n}{a_1^2 a_2^2} \right)}, \quad (5)$$

$$A_m = \begin{cases} 1,506 & (m=1); \\ m+0,5 & (m \geq 2), \end{cases}$$

$$B_m = \begin{cases} 1,248 & (m=1); \\ A_m \left(A_m - \frac{2}{\pi} \right) & (m \geq 2). \end{cases} \quad (6)$$

Відзначимо, що за формулою (5) визначають циклічну частоту. Звільняються від розмірності частоти за допомогою формули:

$$\omega^* = \omega a_1^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}. \quad (7)$$

Оскільки пластина квадратна, то:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = a; \\ A_m &= A_n = A; \\ B_m &= B_n = B. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставляючи (8) в (5), отримаємо:

$$\begin{aligned} \omega &= \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{A^4}{a^4} + \frac{A^4}{a^4} + 2 \frac{B B}{a^2 a^2} \right)} = \\ &= \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{2A^4 + 2B^2}{a^4} \right)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Розпишемо в (9) величину D згідно з формулою:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

у результаті отримаємо:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\rho h} \left(\frac{2A^4 + 2B^2}{a^4} \right)}. \quad (10)$$

У виразі (10) згрупуємо величини за категоріями: константи; величини, що відповідають за геометрію пластини; величини, що характеризують матеріал пластини; величини, що характеризують форму коливань.

$$\omega = \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{6}} \right) \cdot \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \right) \times \left(\sqrt{A^4 + B^2} \right). \quad (11)$$

Оскільки формула (11) розраховує циклічну частоту, то для отримання результату в Гц достатньо (11) поділити на 2π .

$$f = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{6}} \right) \cdot \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \right) \times \left(\sqrt{A^4 + B^2} \right). \quad (12)$$

У результаті отримаємо зведену форму запису формули (5) розрахунку власних частот за методом Релея-Рітца, особливістю якої є розділення величин на коефіцієнти. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} G &= \frac{h}{a^2}; \quad M = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}; \\ F_{mn} &= \sqrt{A^4 + B^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

де G – коефіцієнт геометрії, M – коефіцієнт матеріалу; F_{mn} – коефіцієнт форми коливань; m, n – кількість півхвиль уздовж кожної із сторін пластини відповідно.

Підставимо (13) в (12), отримаємо

$$f = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G \cdot M \cdot F_{mn}. \quad (14)$$

Тестова задача. Використовуючи формули (12), (9), були розраховані частоти і форми вільних коливань у середовищі програмування Delphi.

У якості об'єкта дослідження використовувалась жорстко закріплена алюмінієва (модуль Юнга $E = 71 ГПа$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,34$, густина $\rho = 2710 кг/м^3$) квадратна пластина постійної товщини $d = 3 мм$ розміром $a = 140 мм$.

Для перевірки правильності розрахунків створеної програми в середовищі Delphi застосовувався МСЕ, реалізований в ліцензійному програмному середовищі FEMAP [14]. Розбивка проводилась *plate*-елементами розмірами $1 мм \times 1 мм$ (рис. 1).

Частоти, розраховані власною програмою в середовищі Delphi і за допомогою FEMAP, представлені в таблиці 1, де ε – відхилення між результатами.

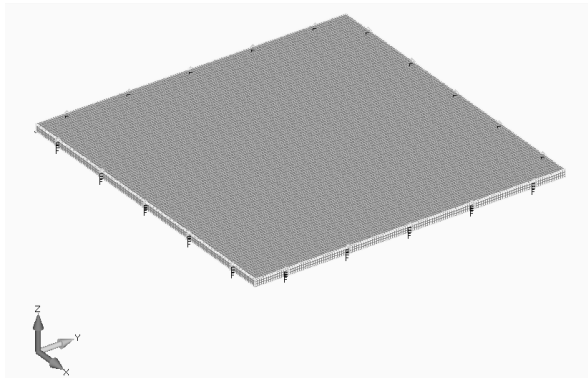


Рис. 1. Скінченно-елементна модель досліджуваної пластини

Табл. 1. Частоти вільних коливань, отримані при розрахунку на Delphi та FEMAP

m	n	f, Гц		ε, %
		Delphi	FEMAP	
1	1	1382,98	1373,10	0,71
1	2	2780,58	2789,16	0,31
2	1	3427,13	2789,16	0,31
2	2	4185,63	4095,74	2,15
1	3	5509,29	4971,83	9,76
3	3	8485,69	8137,38	4,10
1	4	9393,03	7804,66	16,91
3	4	11396,66	10886,67	4,47
4	3	12105,49	10886,67	10,07
2	5	14710,86	12479,79	15,17
5	2	16388,01	12479,79	23,85
4	4	14297,54	13551,30	5,22

Порівнюючи частоти вільних коливань, отримані при розрахунку на Delphi та FEMAP і представлені в таблиці 1, можна відзначити мале відхилення між першими частотами та частотами при $m = n$ і значні відхилення для інших форм коливань, тому є необхідність уточнити формули (12) і (14).

Результати. Нехай маємо еталонний відомий розрахунок пластини та розрахунок для будь-якої жорстко закріпленої квадратної пластини. Оскільки FEMAP широко використовується при різних інженерних розрахунках [14], а також апробований для розрахунків квадратних пластин з вільними краями [13], то результати, отримані за допомогою FEMAP (таблиця 1), вважатимемо еталонними.

Табл. 2. Уточнений коефіцієнт форми коливань

i	f_i^e	F_i^e
1	1373,10	2,570224
2	2789,16	5,220861
3	2789,16	5,220861
4	4095,74	7,666570
5	4971,83	9,306470
6	4997,01	9,353603
7	6210,51	11,625080
8	6210,51	11,625080
9	7899,70	14,786970
10	7899,70	14,786970

Запишемо формулу (14) для еталонної (e) та невідомої (unk) пластин

$$f_{\dot{a}} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G_{\dot{a}} \cdot M_{\dot{a}} \cdot F_{mn}^{\dot{a}}, \quad (15)$$

$$f_{unk} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G_{unk} \cdot M_{unk} \cdot F_{mn}^{unk}. \quad (16)$$

Розділимо (16) на (15). Після нескладних математичних перетворень отримаємо:

$$f_{unk} = f_e \cdot \frac{G_{unk}}{G_e} \cdot \frac{M_{unk}}{M_e} \cdot \frac{F_{mn}^{unk}}{F_{mn}^e}. \quad (17)$$

Формула (17) дає змогу за відомими параметрами еталонної пластини, а також відомими розмірами шуканої пластини та характеристиками її матеріалу визначити частоти шуканої пластини на відповідних формах коливань.

Припустимо, що еталонна і шукана пластина мають однакові геометричні розміри та виготовлені з одного матеріалу, це означає що два множника в (17) приймуть значення одиниці, тобто:

$$f_{unk} = f_e \cdot \frac{F_{mn}^{unk}}{F_{mn}^e}. \quad (18)$$

Розглянемо першу власну частоту еталонної пластини і першу власну частоту шуканої пластини, які візьмемо з таблиці 1,

$$f_e = 1373,10 \text{ Гц};$$

$$f_{unk} = 1382,98 \text{ Гц},$$

коефіцієнт першої форми коливань шуканої пластини розрахуємо за третьою формулою (13) із застосуванням формули (6):

$$F_1^{unk} = \sqrt{1,506^4 + 1,248^2} = \\ = \sqrt{6,7014913} \approx 2,588714.$$

З урахуванням наведених значень виразимо з (18) коефіцієнт першої форми коливань еталонної пластини:

$$F_1^e = F_1^{unk} \cdot \frac{\omega_1^e}{\omega_{unk}}; \quad (19)$$

$$F_1^e = 0,00187184 \cdot \omega_1^e. \quad (20)$$

Розраховані перші десять уточнених коефіцієнтів форм коливань за формулою, аналогічною (20) без класифікації по m і n , представлені в таблиці 2.

Внесемо корективи до формули (14)

$$f_i = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G \cdot M \cdot F_i^e, \quad (21)$$

Табл. 4. Порівняння частоти вільних коливань, отриманих різними авторами

Метод	m:n		
	1:1	2:1	2:2
Релея-Рігца (перше наближення) [5]	37,46	74,81	108,13
Релея-Рігца [5]	35,99	73,41	108,27
Едмана [5]	35,999	73,405	108,237
Вайнштейна [5]	35,99	70	105
Саусвела [5]	32,816	67,87	97,86
Ігугі [5]	35,99	73,41	108,22
Метод рядів [5]	35,7	75,0	107,8
Метод сплай-колокацій [10]	36,04	73,48	109,24
Метод голографічної інтерферометрії [10]	35,986	72,83	108,00
Delphi	36,133	72,647	109,357
Delphi (уточнені коефіцієнти)	35,874	72,871	107,008

Для зручності порівняння розрахованої частоти з частотами, отриманими іншими авторами [5], застосуємо формулу (7).

Аналізуючи дані таблиць, можна дійти висновку, що розроблена програма працює з досить високою точністю, а уточнення коефіцієнтів форм підвищило точність розрахунків.

Для наочності отриманих результатів необхідно мати представлення про форми коливань. Оскільки програма розраховує

де F_i^e – уточнений коефіцієнт форми коливань, який записаний у таблиці 2.

Зроблені уточнення були враховані у нашій програмі та проведені повторні розрахунки для перших десяти власних частот. Отримані результати, розраховані за допомогою Delphi і FEMAP, наведено в таблиці 3. Порівняння трьох безрозмірних частот з частотами, отриманими іншими авторами [5], представлені в таблиці 4.

Табл. 3. Частоти вільних коливань, отримані з урахуванням уточнених коефіцієнтів форм коливань

Moda	f, Гц		ε, %
	Delphi	FEMAP	
1	1373,10	1373,10	0,00
2	2789,15	2789,16	0,00
3	2789,15	2789,16	0,00
4	4095,72	4095,74	0,00
5	4971,81	4971,83	0,00
6	4996,99	4997,01	0,00
7	6210,49	6210,51	0,00
8	6210,49	6210,51	0,00
9	7899,67	7899,70	0,00
10	7899,67	7899,70	0,00

квадратні пластини постійної товщини з однотипними граничними умовами, то форми коливань будуть мати однаковий порядок, який відповідає моді коливання.

Форми коливань, побудовані в FEMAP, Delphi, та форми побудовані іншим автором [8], наведені в таблиці 5, для кращого представлення розподілу переміщень поверхні пластини деякі форми коливань у просторі наведені в таблиці 6.

Табл. 5. Порівняння форм коливань

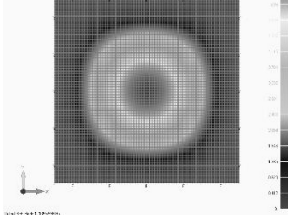
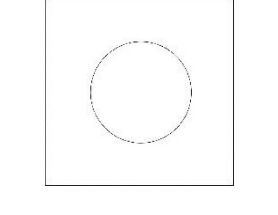
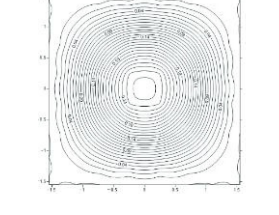
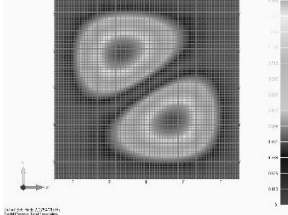
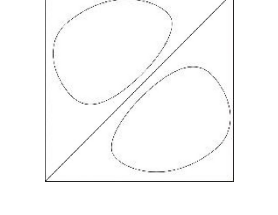
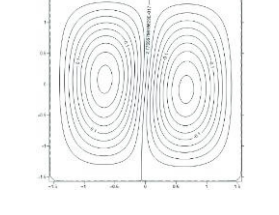
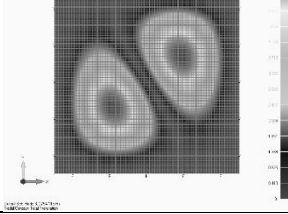
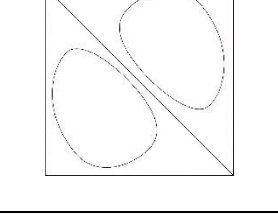
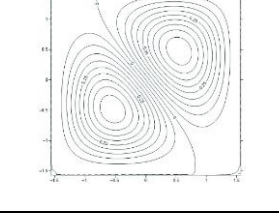
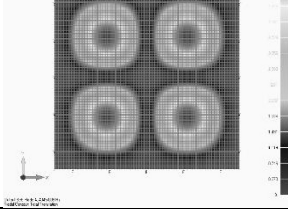
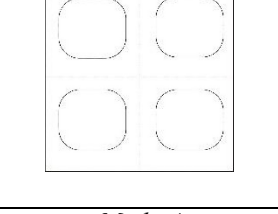
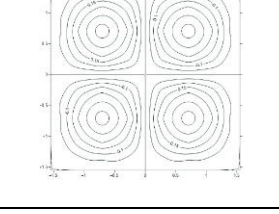
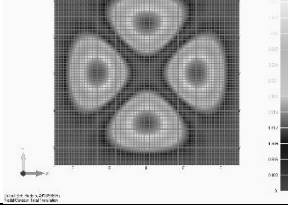
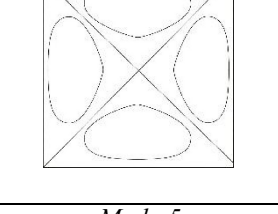
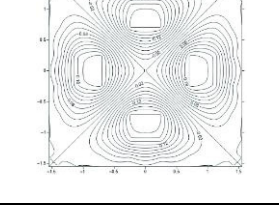
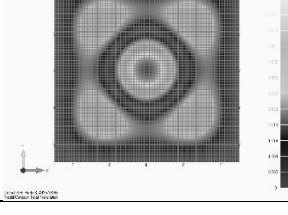
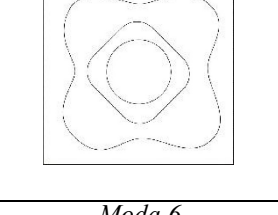
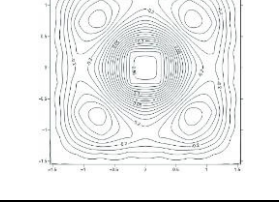
FEMAP	DELPHI	[8]
		
<i>Moda 1</i>		
		
<i>Moda 2</i>		
		
<i>Moda 3</i>		
		
<i>Moda 4</i>		
		
<i>Moda 5</i>		
		
<i>Moda 6</i>		

Табл. 6. Порівняння форм коливань у просторі

FEMAP	[8]	FEMAP	[8]
<i>Moda 1</i>		<i>Moda 2</i>	
<i>Moda 3</i>		<i>Moda 4</i>	
<i>Moda 5</i>		<i>Moda 6</i>	

Висновки. У результаті дослідження в формулі методу Релея-Рітца виділено три коефіцієнти, що характеризують геометричні розміри пластини, фізико-механічні властивості матеріалу і форму коливань, зроблено уточнення останнього коефіцієнту, що підвищило точність розрахунку. Створено програму в середовищі Delphi та поширено МСЕ для розрахунку частот і форм вільних

коливань. Результати розрахованих частот мають хорошу збіжність з результатами, отриманими іншими авторами експериментальним та чисельним методами. Проведено порівняльний аналіз частот і форм вільних коливань розглянутої пластини, розрахованої двома чисельними методами.

Література

1. Tomotika S. The transverse vibration of a square plate clamped at four edges. *Philosophical Magazine*. 1936. Ser.7 21 (142). P. 745–760.
2. Leissa A. W. The Free Vibration of Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*. 1973. 31. P. 257–293.
3. Leissa A. W. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. 287. P. 961–978.
4. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек: справочник. Киев: Наук. думка, 1964. 288 с.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания: справочник в 3 т. / под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. Москва: Машиностроение, 1968. Т. 3. 567 с.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Москва: Наука, 1967. 444 с.
7. Ma C.-C., Huang C.-H. Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2004. 271. P. 493–506.
8. Алгазин С. Д. Вычислительный эксперимент в задаче о свободных колебаниях прямоугольной пластинки. *Наука и техника транспорта*. 2016. № 4. С. 100–107.

9. Нестеров С. В. Изгибные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру. *Механика твёрдого тела*. 2011. № 6. С. 159–165.
10. Grigorenko A. Ya., Tregubenko T. V. Numerical and experimental analysis of natural vibrations of rectangular plates with variable thickness. *International applied mechanics*. 2000. Vol. 36, № 2. P. 268–270.
11. Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Spline-approximation method applied to solve natural-vibration problems for rectangular plates of varying thickness. *International applied mechanics*. 2005. Vol. 41, № 10. P. 1161–1169.
12. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2008. Vol. 3, No. 5. P. 929–952.
13. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів / М. Ю. Борисенко, О. В. Бойчук, І. А. Борисенко та ін. *Геометричне моделювання та інформаційні технології*. 2016. № 2. С. 29–33.
14. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. Киев: НТУУ «КПИ», 2011. 317 с.

References

1. Tomotika, S. (1936). The transverse vibration of a square plate clamped at four edges. *Philosophical Magazine, Ser.7* 21 (142), pp. 745–760.
2. Leissa, A. W. (1973). The Free Vibration of Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31, pp. 257–293.
3. Leissa, A. W. (2005). The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*, 287, pp. 961–978.
4. Gontkevych, V. S. (1964). Natural oscillations of plates and shells. Kiev: Naukova dumka (in Ukrainian).
5. Byrger, I. A., & Panovko, Ya. G. (1968). Strength. Sustainability. Oscillations. Moscow: Mashinostroenie (in Russian).
6. Tymoshenko, S. P. (1967). Oscillations in engineering. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Ma, C.-C., & Huang, C.-H. (2004). Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates. *Journal of Sound and Vibration*, 271, pp. 493–506.
8. Alhazyn, S. D. (2016). Computational experiment in the problem of free oscillations of a rectangular plate. *Nauka i tehnika transporta*, No. 4, pp. 100–107.
9. Nesterov, S. V. (2011). Flexural vibration of a square plate clamped along its contour. *Mekhanika tverdogo tela*, No. 6, pp. 159–165.
10. Grigorenko, A. Ya., & Tregubenko, T. V. (2000). Numerical and experimental analysis of natural vibrations of rectangular plates with variable thickness. *International applied mechanics*, Vol. 36, No. 2, pp. 268–270.
11. Grigorenko, A. Ya., & Efimova, T. L. (2005). Spline-approximation method applied to solve natural-vibration problems for rectangular plates of varying thickness. *International applied mechanics*, Vol. 41, No. 10, pp. 1161–1169.
12. Grigorenko, Ya. M., Grigorenko, A. Ya., & Efimova, T. L. (2008). Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories. *Journal of mechanics of materials and structures*, Vol. 3, No. 5, pp. 929–952.
13. Borisenko, M. Yu, Boychuk, O. V., Borisenko, I. A., & Rogovtsov, Yu. O. (2016). Computer modeling of free vibrations of thin plates with different materials. *Geometrychne modelyuvannya ta informacijni tehnologiyi*, No. 2, pp. 29–33.
14. Rudakov, K. N. (2011). FEMAP 10.2.0. Geometric and finite-element modeling of structures. Kiev: NTUU «KPI».