УДК 539.3 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-09

ЗВ'ЯЗАНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ПРО ДІЮ ВАЖКИХ ШТАМПІВ ЗІ ЗМІННИМ ЦЕНТРОМ МАС

В. І. Кузьменко, С. О. Плашенко

Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара
sergey.plashenko@gmail.com

Ключові слова:
важкий штамп, зв'язана задача, змінний центр мас, поворот штампу.

В роботі розглядається задача про дію на півпростір важкого кругового порожнистого циліндра, заповненого рідиною або сипучою речовиною з густиною. Центр мас штампа зміщений відносно осі. З поворотом штампів центр мас змінює своє положення відносно штампа, що характеризує зв'язаність задачі. Отримано аналітичний розв'язок задачі. Проаналізовані умови, за яких відбуваються якісні зміни у поведінці розв'язку.

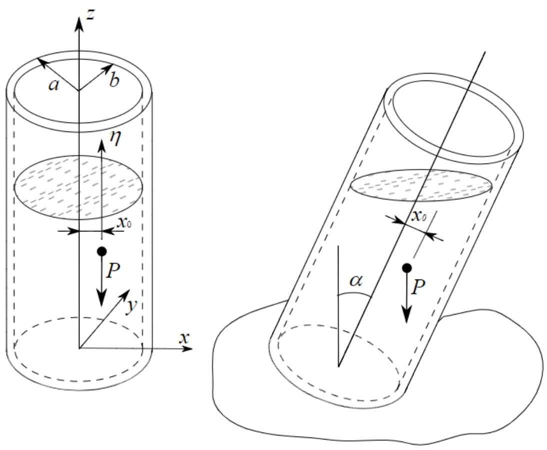
COUPLED PROBLEMS ABOUT ACTION OF HEAVY STAMPS WITH VARIABLE BODY CENTER

V. Kuz'menko, S. Plashenko

Oles Honchar Dnipro National University
sergey.plashenko@gmail.com

Key words:
heavy stamp, coupled problem, variable body mass, stamp rotation.

Influence of the heavy circular stamp on a half-space is investigated. Stamp is considered as a cylinder filled with liquid or loose substance. Body center of the stamp is located at height and displaced on distance from axis. The stamp body center changes its position due to the stamp rotation (fig. 1).



а) б)

Fig.1. Cylinder with displaced body center

New body center location can be found using the following formula

$$x_0 = x_0 + l\alpha$$

where $l = \dfrac{\pi\rho b^4}{4m}$.

Using the solution obtained in [1], we have:

$$\alpha_0 = \frac{3}{4}\frac{1-\nu^2}{Ea^3} P x_0$$

$$p_0(x, y) = \frac{1 + 3\dfrac{x x_0}{a^2}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

where E, ν – Young modulus and Poisson ratio correspondingly.

Body center gets additional displacement due to the rotation on angle α :

$$\Delta x_0 = h\alpha ,$$

where $h = h + l$.

In this case we get linear equation of α :

$$\alpha = \frac{\tilde{r}}{1-\tilde{r}} \frac{x_0}{h}$$

where $\tilde{r} = \frac{3}{4} \frac{1-\nu^2}{Ea^3} Ph$

Than

$$x_0 = x_0 + \frac{\tilde{r}}{1-\tilde{r}} x_0 = \frac{x_0}{1-\tilde{r}} \tag{1}$$

We get formula for contact pressure distribution by putting x_0 instead of x_0 :

$$p(x,y) = \frac{1 + \dfrac{3}{1 - \dfrac{3}{4}\dfrac{1-\nu^2}{Ea^3} Ph}}{2\pi a} \frac{P}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Stamp breakaway beginning can be described as follows:

$$p(-a,0) = 0 .$$

Moment for such rotation will be

$$(Ph)_1 = \frac{4}{3} \frac{1 - \dfrac{3x_0}{a}}{1-\nu^2} Ea^3 .$$

Apparently, formula (1) makes sense only if

$$1 - r = 1 - \frac{3}{4} \frac{1-\nu^2}{Ea^3} Ph > 0 .$$

Violation of this constraint will mean stamp balance loss. Critical value of the moment for such condition is equal to $Ph = \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{1-\nu^2}$. Thus, stamp breakaway begins for anybody center displacement when the critical Ph value is reached.

Вступ

Дослідження взаємовпливу деформування та фізико-хімічних явищ вилилося у останні десятиліття у важливий напрямок механіки деформівного тіла. Значна увага приділялася вивченню процесів деформування тіл, матеріал яких чутливий до дій полів механічної природи [1].

Зв'язаний характер контактної взаємодії обумовлений фізико-хімічними процесами у околі області контакт у [2, 3] та наявністю деформівного прошарку у міжконтактному зазорі [4, 5]. У праці [6] запропоновані розв'язки зв'язаних задач про взаємовплив деформування та дії на штамп гравітаційних та магнітних полів.

Дана праця присвячена дослідженню дії на пружний півпростір важких штампів, заповнених рідиною або сипучою речовиною. Взаємовплив деформування та дії гравітаційних сил виявляється у зміщенні лінії дії сили тяжіння унаслідок викликаного деформуванням повороту штампа.

Загальна постановка зв'язаних контактних задач

Пружне тіло знаходиться під дією жорсткого штампа. Прикладене до штампа зовнішнє навантаження зводиться до головного вектора $\overline{P}$ та головного моменту $\overline{M}$. Унаслідок деформації пружного тіла штамп отримує переміщення $\overline{U}$ точки, обраної за полюс, та повороту $\overline{\Phi}$ навколо полюса. Зовнішні сили за своєю природою можуть змінювати свій напрямок, величину та лінію дії залежно від руху штампа. З іншого боку, деформування тіла визначається силами, прикладеними до штампа. Тому таку задачу природно вивчати як зв'язану задачу.

Залежність зовнішніх сил від переміщення штампа як твердого тіла визначається природою цих сил і вважається відомою. Введемо оператор A, який переміщенням штампа ставить у відповідність прикладені сили, тобто кожній парі $\left(\overline{U},\overline{\Phi}\right)$ ставиться у відповідність пара $\left(\overline{P},\overline{M}\right)$:

$$\left(\overline{P},\overline{M}\right)=A\left(\overline{U},\overline{\Phi}\right).$$

Оператор B силам, прикладеним до штампа, ставить у відповідність переміщення штампа, отримані як розв'язок контактної задачі теорії пружності:

$$\left(\overline{U},\overline{\Phi}\right)=B\left(\overline{P},\overline{M}\right),$$

тоді

$$\left(\overline{U},\overline{\Phi}\right)=B\left(A\left(\overline{U},\overline{\Phi}\right)\right)=D\left(\overline{U},\overline{\Phi}\right), \qquad (1)$$

де $D=B\circ A$ – суперпозиція операторів A та B.

Отже, дослідження зв'язаної задачі звелось до розв'язання операторного рівняння (1). Певний вигляд операторів A та B визначається умовами конкретної задачі.

Задача про дію важкого штампа зі змінним центром маси

Вивчається дія на півпростір важкого кругового штампа за відсутністю тертя. Штамп розглядається як порожнистий циліндр (рис 1, а), заповнений рідиною або сипучою речовиною з густиною ρ.

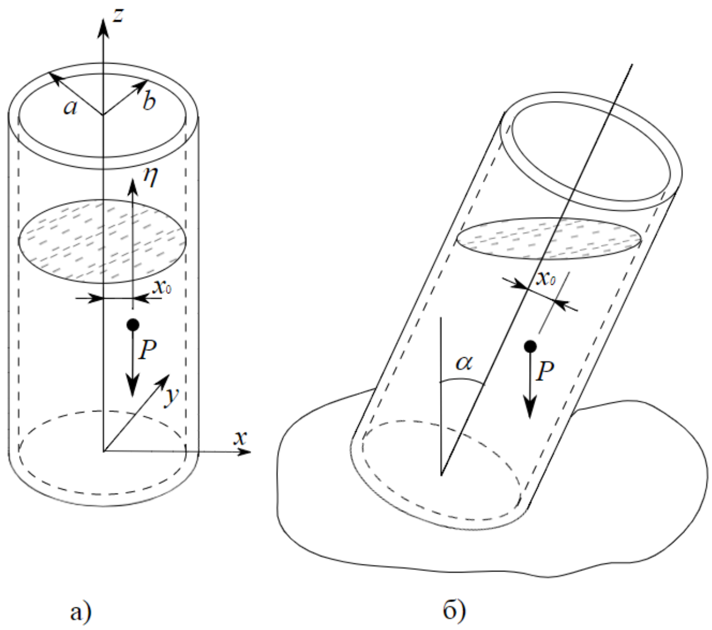


Рис.1. Циліндр зі зміщеним центром мас

Така задача виникає при моделюванні напружено-деформованого стану основ резервуарів, заповнених нафтопродуктами або зерном.

Нехай центр мас штампа знаходиться на висоті h і зміщений на відстань x_0 від осі Oz (рис 1,а).

Унаслідок повороту центр маси штампа змінює своє положення відносно штампа – зміщується у напрямку повороту (рис 1,б).

Знайдемо нове положення x_0 центра мас штампа з урахуванням повороту штампа на кут α (рис. 1,б). Умовно поділимо заповнювач штампа на дві частини площиною $x=0$. У частині $x>0$ об'єм заповнювача зростає на ΔV, а у частині $x<0$ – зменшується на таку ж величину. Область ΔV показана на рис.2.

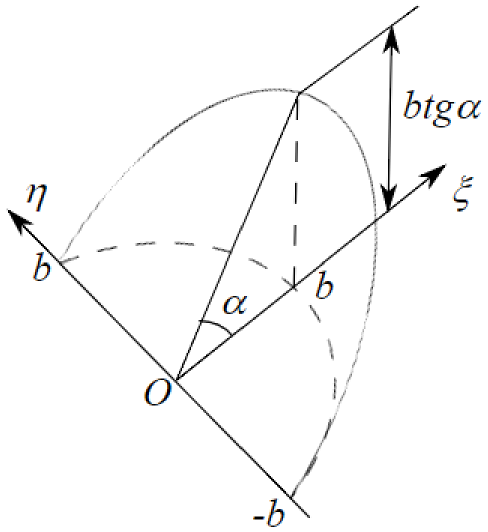


Рис.2. Область ΔV

Обчислимо статичний момент області ΔV відносно осі $O\eta$:

$$\Delta S_\eta = \rho \iint\limits_{(D)} \xi^2 tg\alpha d\xi d\eta = \frac{1}{8}\pi\rho b^4 tg\alpha .$$

Позначимо через m повну масу штампа. Тоді

$$\tilde{x}_0 = \frac{x_0 m + 2\Delta S_\eta}{m} = x_0 + \frac{\pi\rho b^4 tg\alpha}{4m} .$$

Для малих кутів повороту штампа маємо $tg\alpha \approx \alpha$. Тоді

$$\tilde{x}_0 = x_0 + l\alpha ,$$

де

$$l = \frac{\pi\rho b^4}{4m} .$$

У монографії [7] наводиться розв'язок контактної задачі про дію на півпростір кругового штампа з гладкою плоскою основою. Вважалося, що нормальна сила P зміщена на відстань x_0 від осі симетрії штампа, причому лінія дії цієї сили залишається незмінною у процесі руху штампа. Наведемо отримані у [7] вирази для кута повороту штампа α_0 та розподілу контактного тиску $p_0(x,y)$:

$$\alpha_0 = \frac{3}{4}\frac{1-\nu^2}{Ea^3} P x_0 , \qquad (2)$$

$$p_0(x,y) = \frac{1+3\dfrac{xx_0}{a^2}}{2\pi a}\frac{P}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} , \qquad (3)$$

де E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу півпростора.

Складемо операторне рівняння (1). Унаслідок повороту на малий кут α центр мас штампа отримав додаткове переміщення

$$\Delta x_0 = h\alpha ,$$

де $h = h + l$.

Дія оператора A полягає у тому, що повороту штампа на кут α ставиться у відповідність додаткове зміщення $h\alpha$ лінії дії сили тяжіння. Оператор B силі тяжіння P ставить у відповідність кут α повороту штампа як розв'язок контактної задачі згідно з формулою (2). Тоді операторне рівняння набуває такого вигляду:

$$\alpha = \frac{3}{4}\frac{1-\nu^2}{Ea^3} P\left(x_0 + \alpha h\right).$$

Отримуємо лінійне рівняння відносно α, розв'язок якого подаємо у такій формі:

$$\alpha = \frac{\tilde{r}}{1-\tilde{r}}\frac{x_0}{\tilde{h}} , \qquad (4)$$

де $\tilde{r} = \frac{3}{4}\frac{1-\nu^2}{Ea^3} Ph$.

Тоді відстань лінії дії сили тяжіння від осі Oz визначається за формулою

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \frac{\tilde{r}}{1-\tilde{r}} x_0 = \frac{x_0}{1-\tilde{r}} .$$

Підставляючи $\tilde{x}_0$ замість x_0, отримуємо формулу для розподілу контактного тиску:

$$p(x,y) = \frac{1+3\dfrac{xx_0}{(1-\tilde{r})a^2}}{2\pi a}\frac{P}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= \frac{1+\dfrac{3}{1-\dfrac{3}{4}\dfrac{1-\nu^2}{Ea^3}Ph}\dfrac{xx_0}{a^2}}{2\pi a}\frac{P}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} . \qquad (5)$$

Аналіз результатів

Зауважимо, що у роботі [6] досліджувалась аналогічна зв'язана контактна задача у разі фіксованого відносно штампа центра мас. Отримані вище співвідношення для кута повороту та контактного тиску повністю збігаються з наведеним у [6], якщо замінити висоту центра мас на «зведену» висоту $h = h + l$. Отже, наявність заповнювача у вигляді рідини або сипучої речовини еквівалентне перенесенню центра мас на висоту $h = h + \frac{\pi \rho b^4}{4m}$.

Інакше кажучи, ефект наявності заповнювача можна уявити як «збільшення» висоти центра мас штампа.

Звернемо увагу на залежність контактного тиску від механічних характеристик матеріалу півпростору, що є проявом зв'язаності задачі.

Оскільки особливості розв'язку зв'язаної контактної задачі обумовлені істотним впливом саме положенням центра маси штампа, то для опису зовнішньої дії на штамп доцільно використовувати характерний момент Ph. Відзначимо критичні значення такого характерного моменту, за яких відбуваються якісні зміни у поведінці розв'язку.

Початку відриву штампа від півпростору відповідає умова:

$$p(-a, 0) = 0 .$$

З цієї умови отримуємо відповідне значення характерного моменту:

$$(Ph)_1 = \frac{4}{3} \frac{1 - \frac{3x_0}{a}}{1 - \nu^2} Ea^3 . \qquad (6)$$

Очевидно, що формула (4) для кута повороту штампа зберігає сенс лише за умови:

$$1 - r = 1 - \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{Ea^3} Ph > 0 .$$

Порушення цієї умови означає втрату рівноваги штампа. Відповідне критичне значення характерного моменту дорівнює

$$(Ph)_2 = \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{1 - \nu^2} > (Ph)_1 .$$

У співвідношенні (6) перейдемо до границі при $x_0 \to 0$:

$$(Ph)_3 = \lim_{x_0 \to 0} (Ph)_1 = \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{1 - \nu^2} .$$

Отже, навіть у разі як завгодно малого відхилення центра мас від осі штампа при $Ph = (Ph)_3$ починається відрив штампа від підпростору.

Зауважимо, що $(Ph)_3 = (Ph)_2$, тобто відрив штампа продовжуватиметься за сталого значення характерного моменту аж до втрати рівноваги.

Висновки

Запропонована постановка зв'язаних задач про дію на поверхню півпростору важкого кругового штампа, центр маси якого зміщено відносно осі штампа і може змінюватись у процесі повороту штампа. Така задача моделює взаємодію з основою контейнерів, заповнених нафтопродуктами або зерном. Отримано аналітичні вирази для кута повороту штампа та розподілу контактного тиску. Проаналізовані умови, за яких відбуваються якісні зміни у поведінці розв'язку.

Подальші дослідження мають бути спрямовані на вивчення зв'язаних контактних задач для непружних тіл та з урахуванням фізико-хімічних процесів всередині штампа.

Література

1. Гачкевич О. Р., Кушнір Р. М. Вибрані проблеми механіки зв'язаних полів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2016. 59, № 1. С. 7–24.
2. Кузьменко В. І., Плашенко С. О. Зв'язані задачі контактної взаємодії. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2017. 60, № 2. С. 75–84.
3. Martynyak R., Chumak K. Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2012. Vol. 55, No 4. P. 1170–1178.
4. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Контакт пружних тіл за наявності газу та незмочувальної рідини у періодичних міжповерхневих просвітах. *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* 2015. 51, № 6. С. 50–57.

5. Shumelchyk K., Kuzmenko V. Coupled problems of interaction of deformable bodies and liquid of high pressure. *Mechanics Control*. 2013. 32, No. 4. P. 136–142.
6. Мартиняк Р. М. Механотермодифузійна взаємодія тіл з врахуванням заповнювача міжконтактних зазорів. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2000. 36, № 2. С. 124–126.
7. Лурье А. И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 940 с.

References

1. Gachkevich, O.R. & Kushnir, R. M. (2016). Selected problems of connected field mechanics. Mat. metody ta fiz.-mekh. polya, 59, No. 1, pp. 7–24.
2. Kuzmenko, V. I. & Plashenko, S. O. Related problems of contact interaction. Mat. metody ta fiz.-mekh. polya, 60, No. 2, pp. 75–84.
3. Martynyak, R. & Chumak, K. (2012). Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 55, No. 4, pp. 1170–1178.
4. Kozachok, O. P., Slobodyan, B. S. & Martynyak, R. M. (2015). Contact of elastic bodies in the presence of gas and wetting fluid in periodic interfacial luminaires. Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 51, No. 6, pp. 50–57.
5. Shumelchyk, K. & Kuzmenko, V. (2013). Coupled problems of interaction of deformable bodies and liquid of high pressure. Mechanics Control, 32, No. 4, pp. 136–142.
6. Martynyak, R. M. (2000). Mechanochermodiffusion interaction of bodies taking into account the filler of inter-contact gaps. Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 36, No. 2, pp. 124–126.
7. Lurie, A. I. (1970). Theory of elasticity. Moscow: Nauka.