

УДК 624.072.45: 539.384

DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-10

НАПРУЖЕННЯ В КЛЕЙОВОМУ З'ЄДНАННІ ДВОХ КОАКСІАЛЬНИХ ТРУБ. СПРОЩЕНА ДВОВИМІРНА МОДЕЛЬ

С. С. Куреннов, К. П. Барахов

Національний аерокосмічний університет ім. Н.С. Жуковського «ХАІ»,
kurennov.ss@gmail.com

Ключові слова:

клеєве з'єднання, модель Фолькерсена, двовимірна модель, аналітичний розв'язок, відокремлення змінних.

Запропоновано спрощену двовимірну модель клейового з'єднання, яка ґрунтується на гіпотезі про високу жорсткість труб, що з'єднуються, в окружному напрямку. Вважається, що напруження рівномірно розподілені за товщиною шарів, а переміщення відбуваються лише в осьовому напрямку. Задачу зведено до системи двох диференціальних рівнянь відносно поздовжніх переміщень зовнішньої та внутрішньої труби. За допомогою методу відокремлення змінних побудовано аналітичний розв'язок задачі про напружений стан напускного клейового з'єднання двох циліндричних труб. Обґрунтовано збіжність розв'язку. Розв'язано модельну задачу та проведено порівняння результатів розрахунків з розрахунками, виконаними за допомогою методу скінченних елементів. Показано високу точність запропонованої спрощеної математичної моделі.

STRESSES IN ADHESIVELY BONDED JOINTS OF TWO COAXIAL PIPES. SIMPLIFIED TWO-DIMENSIONAL MODEL

S. S. Kurennov, K. P. Barakhov

National Aerospace University, "Kharkiv Aviation Institute",
kurennov.ss@gmail.com

Key words:

mathematics, mechanics, mathematical model, dynamics, information technologies.

A simplified two-dimensional model of an overlap glue joint between two coaxial pipes is proposed. At the base of the model lies the hypothesis about the high rigidity of the pipes being joined in the circumferential direction. It is assumed that normal stresses and axial displacements are evenly distributed across the thickness of the layers being joined, and displacements occur only in the axial direction. Those displacements in the radial and circumferential directions are zero. The adhesive layer works only on shear, and the shear stresses in the adhesive are evenly distributed in thickness. It is assumed that the longitudinal displacements or normal forces are given on the ends of the pipes in an arbitrary manner, and not uniformly as in the known classical solutions. Edge conditions, displacements or forces at the ends of pipes, are expanded into Fourier series in the angular coordinate, in the interval from zero to pi. This model can be used to determine the stresses in the joint between the skin of the aircraft and the power frame, to which the load is applied at certain points. The task is reduced to a system of two differential equations for the longitudinal displacements of the outer and inner tubes. This model is a development of the previously proposed model of adhesive bonding of rectangular plates. To construct the solution, the classical method of separation of variables was used. Displacements have the form of superposition of series of eigenfunctions, the coefficients of which are unknown and are found from boundary conditions. Satisfaction of boundary conditions leads to systems of linear equations for unknown coefficients. An estimate for the decay of the coefficients is found and the convergence of the solution is proved. The solution of the problem satisfies the criterion of Saint-Venant, i.e. in the case of a large connection length, the displacements and stresses at a distance from the ends exponentially tend to the classical one-dimensional solution. The model problem is solved and the results of calculations are compared with calculations performed using the finite element method. In the model problem, the inner tube is assumed to be fixed on one of the ends, and a force is exerted on the op-

posite end of the outer tube in two symmetric sectors, between which lie no load sectors. Graphs of tangential stresses in the glue are given in the article. The high accuracy of the proposed simplified mathematical model is shown. The proposed solution has good convergence and counting speed, so it can be used to build a solution for optimization and design problems.

Вступ

Клейові з'єднання є невід'ємною частиною сучасних конструкцій, виконаних з полімерних композиційних матеріалів, тому що вони здатні забезпечити неперервну та найбільш рівномірну передачу зусиль між конструктивними елементами, забезпечують герметичність з'єднання, низьку вагу, високу аеродинамічну ефективність. Зазвичай у механіці конструкцій з'єднання внапуск розглядаються як тришарові балки [1, 2] або тришарові циліндричні оболонки [3, 4]. Математичні моделі з'єднань найчастіше припускають рівномірний розподіл напружень за шириною з'єднання та заданий апріорно розподіл напружень за товщиною клейового шару і шарів, що з'єднуються (зазвичай рівномірний або лінійний). Однак при розрахунку напруженого стану деяких конструкцій, наприклад з'єднань силових елементів або ремонтних накладок з обшивкою, необхідно враховувати нерівномірність напружено-деформованого стану клеєної конструкції не тільки за довжиною, але і за шириною з'єднання. Найбільш поширеними методами дослідження двовимірного напруженого стану з'єднань є метод скінченних елементів та метод скінченних різниць [5-8]. Аналітичні розв'язки задачі про нерівномірний за шириною напружений стан клейового

з'єднання невідомі. Тому для розв'язання задач про напружений стан з'єднання прямокутних пластинок було запропоновано спрощену модель, яка базується на гіпотезі про малі деформації, що зумовлені коефіцієнтами Пуассона [9, 10]. В даній роботі підхід розвинений на циліндричну систему координат.

У роботі пропонується спрощена двовимірна модель напруженого стану з'єднання циліндричних труб, в якій нехтується вплив поздовжніх (в осьовому напрямку) деформацій на поперечні (тангенціальні та радіальні) деформації. Тобто припускається, що елементи з'єднання мають лише поздовжні переміщення. Але, на відміну від класичних одновимірних розв'язків [11-13], вважається, що осьове навантаження або переміщення додані до шарів нерівномірно за окружною координатою, тобто за будь-яким довільним способом. Таке нерівномірне навантаження характерно, наприклад, для з'єднань відсіків ракетної та авіаційної техніки, які містять дискретні з'єднувальні перехідні елементи.

Постановка задачі

Клейове з'єднання двох коаксіальних труб показано на рис. 1.

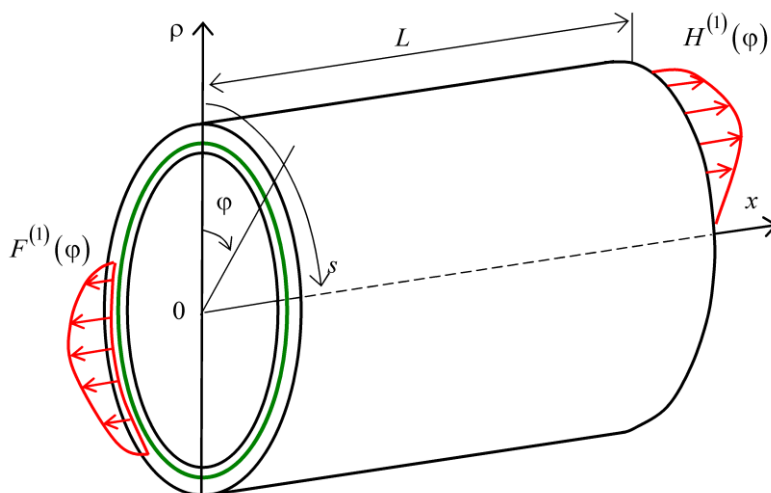


Рис. 1. Схема з'єднання

Товщини зовнішньої і внутрішньої труб відповідно дорівнюють δ_1 і δ_2 . Товщина з'єднувального шару дорівнює δ_0 . Припустимо, що несучі шари деформуються тільки уздовж осі з'єднання, а клейовий шар пра-

цює тільки на зсув, напруження рівномірно розподілені по товщині шарів.

На рис. 2 показано диференціальний елемент з'єднання та діючі на нього зусилля.

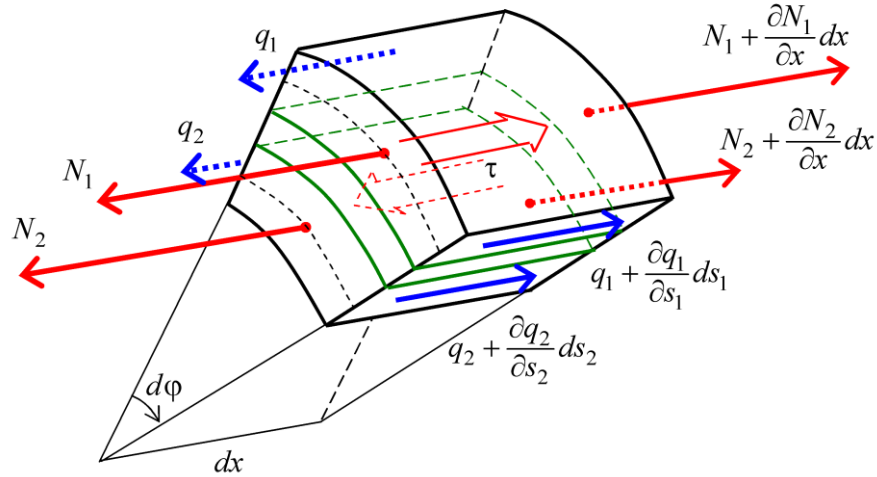


Рис. 2. Елемент з'єднання

Рівняння рівноваги елементів несучих шарів мають вигляд

$$ds_1 \left[N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \right] + dx \left[q_1 + \frac{\partial q_1}{\partial s_1} ds_1 \right] - N_1 ds_1 - q_1 dx + \tau dx ds_0 = 0,$$

$$ds_2 \left[N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} dx \right] + dx \left[q_2 + \frac{\partial q_2}{\partial s_2} ds_2 \right] - N_2 ds_2 - q_2 dx - \tau dx ds_0 = 0,$$

де N_m , q_m – нормальні (в поздовжньому напрямку) і дотичні зусилля в несучому шарі m ($m = 1, 2$), які являють собою добуток напружень на товщину шару, $N_m = \delta_m \sigma_x^{(m)}$, $q_m = \delta_m \tau^{(m)}$; τ – дотичні напруження в клейовому шарі в поздовжньому напрямку. Крім того, x – осьова координата; окружні криволінійні координати $s_1 = R_1 d\varphi$, $s_2 = R_2 d\varphi$, $s_0 = R_0 d\varphi$; φ – кутова координата, яка відраховується від деякої площини, R_m – радіус серединної поверхні шару m , R_0 – радіус серединної поверхні клейового шару. Тобто вважаємо, що дотичні напруження в клейовому шарі діють в його серединній поверхні, яка має радіус R_0 .

Використовуючи кутову координату φ , отримаємо:

$$\tau + \frac{R_1}{R_0} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = 0,$$

$$-\tau + \frac{R_2}{R_0} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

Співвідношення Коші за умови рівності нулю поперечних переміщень мають вигляд:

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x},$$

$$q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial s_m} = \frac{\delta_m G_m}{R_m} \frac{\partial U_m}{\partial \varphi},$$

$$m = 1, 2, \quad (2)$$

де U_m – поздовжні переміщення шару m .

Дотичні напруження в клейовому шарі вважаємо пропорційними різниці переміщень шарів

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} (U_2 - U_1), \quad (3)$$

де G_0 – модуль зсуву клейового шару.

Підставивши наведені вище співвідношення в рівняння (1), отримаємо систему

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right) - U_1 + U_2 = 0, \\ \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} \right) + U_1 - U_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де

$$\alpha_m = \delta_m \delta_0 \frac{E_m R_m}{G_0 R_0};$$

$$\mu_m = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{G_m}{E_m}}; \quad k = 1, 2.$$

Крайові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} U_1|_{x=0} &= 0, \\ N_2|_{x=0} &= E_2 \delta_2 \left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=0} = F^{(2)}(\varphi), \\ N_m|_{x=L} &= E_m \delta_m \left. \frac{\partial U_m}{\partial x} \right|_{x=L} = H^{(m)}(\varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Крім того, на переміщення накладаються умови періодичності:

$$U_m(x, \varphi) = U_m(x, \varphi + 2\pi l). \quad (6)$$

Побудова розв'язку

З першого рівняння системи (4) отримуємо, що

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} \right). \quad (7)$$

Підставив (7) в друге рівняння системи (4), маємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial \varphi^4} - \\ - \beta_3 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \mu_1^2 + \mu_2^2, \quad \beta_2 = \mu_1^2 \mu_2^2, \\ \beta_3 &= \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \beta_4 = \frac{\mu_1^2}{\alpha_2} + \frac{\mu_2^2}{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Частинний розв'язок рівняння (8) шукатимемо у вигляді добутку $U_1^* = \Phi(\varphi) X(x)$. Вважатимемо, що кожен

частинний розв'язок U_1^* – 2π періодична функція. Отже, функції $\Phi(\varphi)$ – періодичні, з періодом 2π . Відомо, що будь-яка неперервна періодична функція з періодом 2π може бути розкладена у ряд Фур'є. Отже, можна припустити, що функції $\Phi(\varphi)$ в частинних розв'язках (8) приймають значення $1, \cos nx, \sin nx$.

Знайдемо відповідні функції $X_n(x)$.

1) Якщо $\Phi(\varphi) = \text{const}$, то підставивши $U_1^* = \Phi_0(\varphi) X_0(x)$ в рівняння (7), отримаємо рівняння:

$$\frac{d}{dx^2} \left[\frac{\partial^2 X_0(x)}{\partial x^2} - \beta_3 X_0(x) \right] = 0.$$

Розв'язок даного рівняння може бути подано у вигляді:

$$X_0 = A_0 + A_1 x + A_3 \text{ch}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \text{sh}(\sqrt{\beta_3} x).$$

2) Якщо $\Phi_n(\varphi) = \sin n\varphi$ або $\Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi$, то підставивши частинні розв'язки $U_n^* = \Phi_n(\varphi) X_n(x)$ в рівняння (8), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d^4 X_n}{dx^4} - (\beta_1 n^2 + \beta_3) \cdot \frac{d^2 X_n}{dx^2} + \\ + (\beta_2 n^4 + \beta_4 n^2) \cdot X_n = 0. \end{aligned}$$

Корні характеристичного рівняння даного звичайного диференціального рівняння мають вигляд $\pm k_{1,n}$ та $\pm k_{2,n}$,

де

$$\begin{aligned} k_{1,n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \sqrt{\beta_1 n^2 + \beta_3 - \sqrt{(\beta_1 n^2 + \beta_3)^2 - 4(\beta_2 n^4 + \beta_4 n^2)}}, \\ k_{2,n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \sqrt{\beta_1 n^2 + \beta_3 + \sqrt{(\beta_1 n^2 + \beta_3)^2 - 4(\beta_2 n^4 + \beta_4 n^2)}}. \end{aligned}$$

Неважко переконатися, що при $n \rightarrow \infty$ залежність $k_{1,n}$ та $k_{2,n}$ від n і прямує до лінійної. Можна також довести, що $k_{1,n}$ та $k_{2,n}$ є дійсними числами для $n \geq 0$.

На підставі вищевикладеного, переміщення U_1 можна подати у вигляді:

$$U_1 = A_0 + A_1 x + A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \operatorname{sh}(\sqrt{\beta_3} x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k_{1,n}} \left(\frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \frac{1}{k_{2,n}} \left(\frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k_{1,n}} \left(\frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \frac{1}{k_{2,n}} \left(\frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \sin n\varphi,$$

де A_1, \dots, A_4 , $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$ і $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$ – невідомі константи, що визначаються з крайових умов; множники $k_{m,n} \operatorname{sh} k_{m,n} L$ та $k_{m,n} \operatorname{ch} k_{m,n} L$ в знаменнику служать для нормування і полегшення аналізу збіжності розв’язка.

З (7) знаходимо переміщення другого шару:

$$U_2 = A_0 + A_1 x + (1 - \alpha_1 \beta_3) \times \left[A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \operatorname{sh}(\sqrt{\beta_3} x) \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_{1,n}}{k_{1,n}} \left(\frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \frac{\gamma_{2,n}}{k_{2,n}} \left(\frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_{1,n}}{k_{1,n}} \left(b_{1,n} \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + b_{2,n} \frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} \right) + \frac{\gamma_{2,n}}{k_{2,n}} \left(b_{3,n} \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + b_{4,n} \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right) \right] \sin n\varphi,$$

де $\gamma_{m,n} = 1 - \alpha_1 (k_{m,n}^2 - n^2 \mu_1^2)$.

Задоволення крайових умов

Відзначимо, якщо крайові умови на торцях з’єднання парні, то коефіцієнти $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$ дорівнюють нулю, якщо непарні, то відповідно A_1, \dots, A_4 та $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$ дорівнюють нулю. Якщо зусилля і переміщення розподілені рівномірно по колу – отримуємо одновимірні розв’язки, тобто A_1, \dots, A_4 відмінні від нуля, а $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$ та $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$ – дорівнюють нулю. У загальному випадку усі коефіцієнти відмінні від нуля.

Нехай поздовжнє навантаження прикладене до зовнішньої труби на правому торці $x = L$, лівий торець внутрішньої труби $x = 0$ жорстко закріплений.

Знайдемо поздовжні зусилля в несучих шарах (2):

$$N_1 = E_1 \delta_1 \left\{ A_1 + A_3 \sqrt{\beta_3} \operatorname{sh}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \sqrt{\beta_3} \operatorname{ch}(\sqrt{\beta_3} x) + \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} k_{1,n} x}{\operatorname{sh} k_{1,n} L} + \frac{\operatorname{ch} k_{1,n} x}{\operatorname{ch} k_{1,n} L} + \frac{\operatorname{sh} k_{2,n} x}{\operatorname{sh} k_{2,n} L} + \frac{\operatorname{ch} k_{2,n} x}{\operatorname{ch} k_{2,n} L} \right] \cos n\varphi + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} b_{1,n} \frac{\text{sh } k_{1,n} x}{\text{sh } k_{1,n} L} + b_{2,n} \frac{\text{ch } k_{1,n} x}{\text{ch } k_{1,n} L} + \\ + b_{3,n} \frac{\text{sh } k_{2,n} x}{\text{sh } k_{2,n} L} + b_{4,n} \frac{\text{ch } k_{2,n} x}{\text{ch } k_{2,n} L} \end{array} \right] \sin n\varphi \left. \vphantom{\sum_{n=1}^{\infty}} \right\} \begin{cases} a_{1,n} + a_{2,n} + a_{3,n} + a_{4,n} = \frac{C_n^{(1)}}{E_1 \delta_1}, \\ \gamma_{1,n} (a_{1,n} + a_{2,n}) + \gamma_{2,n} (a_{3,n} + a_{4,n}) = \frac{C_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}; \end{cases}$$

Аналогічно:

$$N_2 = E_2 \delta_2 \left\{ A_1 + (1 - \alpha_1 \beta_3) \sqrt{\beta_3} \left[A_3 \text{sh}(\sqrt{\beta_3} x) + A_4 \text{ch}(\sqrt{\beta_3} x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \gamma_{1,n} \left(a_{1,n} \frac{\text{sh } k_{1,n} x}{\text{sh } k_{1,n} L} + a_{2,n} \frac{\text{ch } k_{1,n} x}{\text{ch } k_{1,n} L} \right) + \\ + \gamma_{2,n} \left(a_{3,n} \frac{\text{sh } k_{2,n} x}{\text{sh } k_{2,n} L} + a_{4,n} \frac{\text{ch } k_{2,n} x}{\text{ch } k_{2,n} L} \right) \end{array} \right] \times \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \gamma_{1,n} \left(b_{1,n} \frac{\text{sh } k_{1,n} x}{\text{sh } k_{1,n} L} + b_{2,n} \frac{\text{ch } k_{1,n} x}{\text{ch } k_{1,n} L} \right) + \\ + \gamma_{2,n} \left(b_{3,n} \frac{\text{sh } k_{2,n} x}{\text{sh } k_{2,n} L} + b_{4,n} \frac{\text{ch } k_{2,n} x}{\text{ch } k_{2,n} L} \right) \end{array} \right] \times \sin n\varphi \right\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_3 \sqrt{\beta_3} \text{sh}(\sqrt{\beta_3} L) + \\ + A_4 \sqrt{\beta_3} \text{ch}(\sqrt{\beta_3} L) = \frac{C_0^{(1)}}{2E_1 \delta_1}, \\ A_1 + (1 - \alpha_1 \beta_3) \sqrt{\beta_3} \left[A_3 \text{sh}(\sqrt{\beta_3} L) + A_4 \text{ch}(\sqrt{\beta_3} L) \right] = \frac{C_0^{(2)}}{2E_2 \delta_2}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k_{1,n}} \frac{a_{1,n}}{\text{sh } k_{1,n} L} + \frac{1}{k_{2,n}} \frac{a_{3,n}}{\text{sh } k_{2,n} L} = c_n^{(1)}, \\ \gamma_{1,n} \frac{a_{2,n}}{\text{ch } k_{1,n} L} + \gamma_{2,n} \frac{a_{4,n}}{\text{ch } k_{2,n} L} = \frac{c_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k_{1,n}} \frac{b_{1,n}}{\text{sh } k_{1,n} L} + \frac{1}{k_{2,n}} \frac{b_{3,n}}{\text{sh } k_{2,n} L} = s_n^{(1)}, \\ \gamma_{1,n} \frac{b_{2,n}}{\text{ch } k_{1,n} L} + \gamma_{2,n} \frac{b_{4,n}}{\text{ch } k_{2,n} L} = \frac{s_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}; \end{array} \right.$$

Зусилля та переміщення на торцях (5) розкладемо в ряди Фур'є:

$$U^{(1)}(\varphi) = \frac{c_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(1)} \cos n\varphi + s_n^{(1)} \sin n\varphi \right),$$

$$F^{(2)}(\varphi) = \frac{c_0^{(2)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(2)} \cos n\varphi + s_n^{(2)} \sin n\varphi \right),$$

$$H^{(m)}(\varphi) = \frac{C_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n^{(m)} \cos n\varphi + S_n^{(m)} \sin n\varphi \right).$$

Отримаємо системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_3 = \frac{c_0^{(1)}}{2}, \\ A_1 + (1 - \alpha_1 \beta_3) \sqrt{\beta_3} A_4 = \frac{c_0^{(2)}}{2E_2 \delta_2}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1,n} + b_{2,n} + b_{3,n} + b_{4,n} = \frac{S_n^{(1)}}{E_1 \delta_1}, \\ \gamma_{1,n} (b_{1,n} + b_{2,n}) + \gamma_{2,n} (b_{3,n} + b_{4,n}) = \frac{S_n^{(2)}}{E_2 \delta_2}. \end{array} \right.$$

Можна показати, що швидкість спадання коефіцієнтів $a_{1,n}, \dots, a_{4,n}$ та $b_{1,n}, \dots, b_{4,n}$ не перевищує швидкості спадання коефіцієнтів $c_n^{(m)}$ та $C_n^{(m)}$, які пропорційні $n^{-\theta}$, де $\theta \geq 1$.

Чисельний приклад

Розглянемо клейове з'єднання двох труб, що мають довжину $L = 50$ мм, зовнішні радіуси $R_1 = 28$ мм, $R_2 = 33$ мм та товщини $\delta_1 = 4$ мм, $\delta_2 = 2,9$ мм. Товщина клейового шару $\delta_0 = 0,1$ мм.

Пружні характеристики матеріалів з'єднання $E_1 = E_2 = 70$ ГПа,

$G_1 = G_2 = 27$ ГПа, $G_0 = 0,34$ ГПа. Задамо крайові умови на торцях склеєних труб:

$$\begin{aligned}
 U_1(\varphi)|_{x=0} &= 0, \\
 F^{(2)}(\varphi) &= 0, \\
 H^{(1)}(\varphi) &= 0,
 \end{aligned}
 \quad
 H^{(2)}(\varphi) = \begin{cases} F_0, & -\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{3\pi}{4}; \\ 0, & \frac{3\pi}{4} \leq \varphi < \frac{5\pi}{4}; \\ 0, & \frac{5\pi}{4} \leq \varphi < \frac{7\pi}{4}. \end{cases}$$

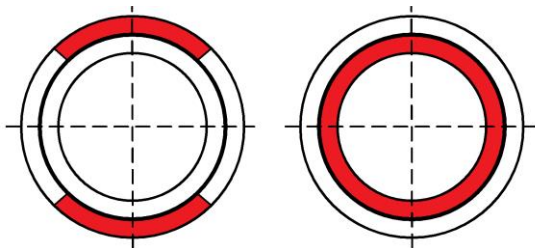


Рис. 3. Крайові умови (а) при $x = L$ і (б) при $x = 0$

Більш наочно схема додавання навантаження показана на рис. 3. Навантажені ділянки позначені червоним кольором. Ділянки без навантаження – позбавлені кольору.

Як бачимо, зусилля прикладені до зовнішньої труби по двох секторах і передаються через клейовий шар до внутрішньої труби, яка жорстко закріплена по всьому торцю.

На рис. 4 наведено графік дотичних напружень $\tau(\varphi, x)$ (3) у вигляді поверхні в координатах (φ, x) . Враховуючи симетрію задачі на рисунку показано напруження на одній чверті окружності, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Графіки напружень дано у безрозмірній формі як відношення діючих напружень τ до гіпотетичних напружень $\tau_0 = \frac{F_0 R_1}{2LR_0}$, які виникли б при рівномірному розподілу напружень по всьому клейовому шару.

Двійка у знаменнику вказує на той факт, що навантаження прикладене лише на половині довжини окружності зовнішньої труби.

Для верифікації отриманого розв'язку та перевірки гіпотез, покладених у модель з'єднання, проведено розрахунок напруженого стану даного з'єднання за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). Для цього застосовано систему Comsol

Multiphysics 5.2. Графіки дотичних напружень у клею (3) вздовж ліній $\varphi = 0$ (посеред навантаженого сектора) та $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (посеред ненавантаженого сектора), які розраховані за допомогою запропонованого аналітичного підходу (неперервні лінії) та отримані за допомогою МСЕ (пунктирні лінії), показано на рис. 5.

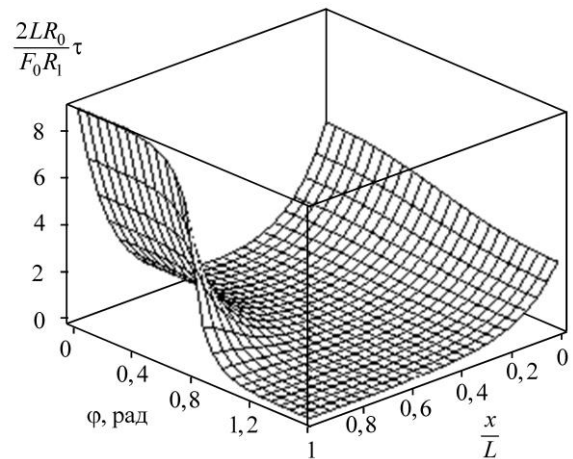


Рис. 4. Дотичні напруження у клейовому шарі

Висновки

Запропоновано нову математичну модель напруженого стану клейового з'єднання коаксіальних труб, яка базується на гіпотезі про наявність лише осьових переміщень шарів. Даний підхід дозволяє отримати аналітичний розв'язок задачі про напружений стан з'єднання за довільних крайових умов. Тобто дозволяє дослідити напружений стан з'єднання у випадку нерівномірно прикладеного навантаження. Досліджено та обґрунтовано збіжність отриманого розв'язку. Розв'язано модельну задачу та проведено порівняння розрахунків за запропонованою моделлю з результатами, отриманими за допомогою МСЕ. Показано, що запропонований підхід має достатню для інженерних задач точність.

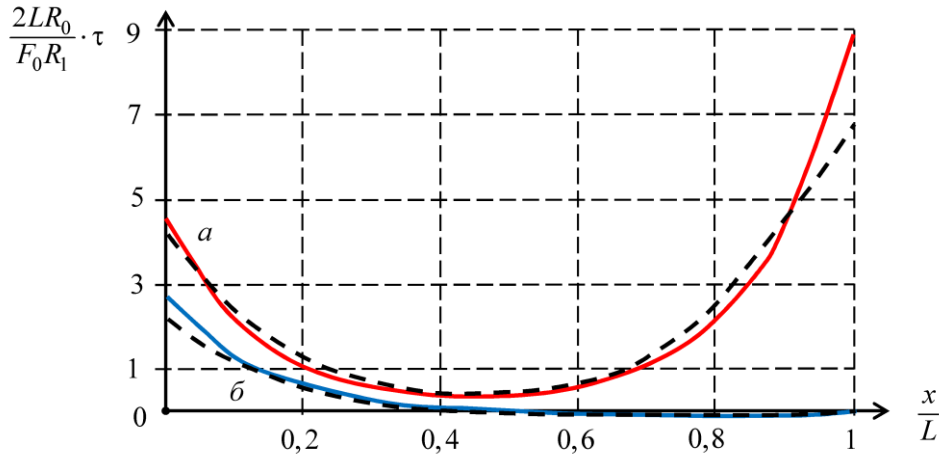


Рис. 5. Графіки дотичних напружень, (а) - $\varphi = 0$, (б) - $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Література

1. da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey. *International Journal of Adhesion & Adhesives*. 2009. Vol. 29. P. 319–330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.
2. Гришин В. И., Дзюба А. С., Дударьков Ю. И. Прочность и устойчивость элементов и соединенный авиационных конструкций из композитов. Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2013. 272 с.
3. Goglio L., Paolino D.S. Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part II: Development of an explicit closed-form solution for the Lubkin and Reissner model. *International Journal of Adhesion & Adhesives*. 2014. Vol. 48. P. 35–42. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.010.
4. Shi Y. P., Cheng S. Analysis of adhesive-bonded cylindrical lap joints subjected to axial load. *Journal Eng. Mech.* 1993. Vol. 119. P. 584–602. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:3(584).
5. Рябенков Н. Г., Артюхин Ю. П. Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин. *Исслед. по теор. пластин и оболочек*. Изд-во Казанского ун-та. 1981. № 16. С. 82–90.
6. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2015. V. 15, Iss. 2. P. 603–619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.
7. Chukwujekwu Okafor, Singh N., Enemuoh U.E., Rao S.V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels. *Composite Structures*. 2005. Vol. 71. P. 258–270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
8. Федотов А. А., Ципенко А. В., Лебедев А. И. Численное моделирование клевого ремонтного соединения. *Научный вестник МГТУ ГА*. 2018. Т. 21(3). С. 125–138. DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-3-125-138.
9. Kurennov S. S. A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 51, Issue 4. P. 479–488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2.
10. Куреннов С. С. Напряженное состояние нахлесточного соединения пластинок разной ширины. Приближенная теория и эксперимент. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 235–244.
11. Goglio L., Paolino D.S., Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part II: Development of an explicit closed-form solution for the Lubkin and Reissner model. *International Journal of Adhesion & Adhesives*. 2014. Vol. 48. P. 35–42. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.010.
12. Griffin S. A., Pang S. S., Yang C. Strength model of adhesive bonded composite pipe joints under tension. *Polymer Engineering and Science*. 1991. Vol. 31(7). P. 533–538. DOI:10.1002/pen.760310710.

13. Goglio L., Dragoni E. Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part I: Critical review and finite element assessment of published models. *International Journal of Adhesion & Adhesives*. 2013. Vol. 47. P. 35–45. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.009.

References

1. da Silva, L. F. M., das Neves, P. J. C., Adams, R. D. & Spelt, J. K. (2009). Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 29, pp. 319–330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005.
2. Grishin, V. I., Dzyuba, A. S. & Dudar'kov, Yu. I. (2013). Strength and stability of elements and joints of aircraft structures made of composites. Moscow: Izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury.
3. Goglio, L. & Paolino, D. S. (2014). Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part II: Development of an explicit closed-form solution for the Lubkin and Reissner model. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 48, pp. 35–42. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.010.
4. Shi, Y.P. & Cheng, S. (1993). Analysis of adhesive-bonded cylindrical lap joints subjected to axial load. *Journal Eng. Mech.*, Vol. 119, pp. 584–602. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:3(584).
5. Ryabenkov, N. G. & Artyuxin, Yu. P. (1981). Determination of adhesive stresses in the connection of two semi-infinite plates. *Issled. po teor. plastin i obolochek*, Izd-vo Kazanskogo un-ta, No. 16, pp. 82–90.
6. Rapp, P. (2015). Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 15, Issue 2, pp. 603–619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.
7. Chukwujekwu, Okafor, Singh, N., Enemuoh, U. E. & Rao, S. V. (2005). Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels. *Composite Structures*, Vol. 71, pp. 258–270. DOI: 10.1016/j.compstruct.2005.02.023.
8. Fedotov, A. A., Cipenko, A. V. & Lebedev, A. I. (2018). Numerical modelling of the airframe damage growth for the adhesive repair joint calculation. *Nauchnyj vestnik MGTU GA*, Vol. 21(3), pp. 125–138. DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-3-125-138.
9. Kurennov, S. S. (2015). A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 51, Issue 4, pp. 479–488. DOI: 10.1007/s11029-015-9519-2.
10. Kurennov, S. S. (2017). On the stressed state of the lap joint of the different width plates. Approximative theory and experiment. *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki*, No. 1, pp. 235–244.
11. Goglio, L. & Paolino, D. S. (2014). Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part II: Development of an explicit closed-form solution for the Lubkin and Reissner model. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 48, pp. 35–42. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.010.
12. Griffin, S. A., Pang, S. S. & Yang, C. (1991). Strength model of adhesive bonded composite pipe joints under tension. *Polymer Engineering and Science*, Vol. 31(7), pp. 533–538. DOI:10.1002/pen.760310710.
13. Goglio, L. & Dragoni, E. (2013). Adhesive stresses in axially-loaded tubular bonded joints. Part I: Critical review and finite element assessment of published models. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 47, pp. 35–45. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.009.