УДК 531.383 DOI: 10.26661/2413-6549-2019-2-11

КЕРОВАНІСТЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ ПРИ ДІЇ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ ТА СИЛ РАДІАЛЬНОЇ КОРЕКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ПЕВНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЗМІШАНОГО ВИДУ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

В. В. Леонтьєва, Н. О. Кондрат'єва

Запорізький національний університет
vleonteva15@gmail.com, nkondr100@gmail.com

Ключові слова:
динамічна система, гіроскопічна система, зовнішні збурення, модель у змінних стану, керованість, матриця керованості.

У роботі проводиться аналіз керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваної за допомогою уточненої математичної моделі, яка подається у вигляді лінійних диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною та, в залежності від певних фізичних обмежень об'єкта, має дві різні форми подання – при існуючій можливості (неможливості) об'єднання збурюючих сил, діючих на систему. За кожною з одержаних моделей побудовано математичні моделі динамічної системи у змінних стану, за якими проведено аналіз керованості системи, на основі якого встановлено, що для аналізованої системи виконуються умови повної керованості, причому на результати аналізу керованості досліджуваної системи впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць керованості, складеної для випадку існуючої можливості об'єднання збурюючих сил. Використання іншої форми подання моделі системи виявилось менш затребуваним у зв'язку із ускладненням відповідної матриці керованості поряд із збігом отриманих для другої моделі результатів.

CONTROLLABILITY OF A DYNAMICAL SYSTEM WITH A GYROSCOPIC STRUCTURE UNDER THE ACTION OF DISSIPATIVE FORCES AND FORCES OF RADIAL CORRECTION WITH A CERTAIN NONLINEAR EXTERNAL DISTURBANCES OF MIXED TYPE

V. V. Leontieva, N. O. Kondratieva

Zaporizhzhia National University
vleonteva15@gmail.com, nkondr100@gmail.com

Key words:
dynamical system, gyroscopic system, external disturbances, state variable model, controllability of the system, controllability matrix.

In the study of objects of different physical nature there is often a need for improvement their dynamic properties, adjusting the parameters of mathematical models describing the movement of the studied objects, stabilization of unstable objects, that is, when there is a need for changing the studied objects in such a way that their characteristics satisfy certain requirements. In the major cases indicated changes could be achieved by the application the certain types of control to the studied objects, become possible under the conditions when the objects are characterized by the property of complete or partial controllability, that is essential for building workable control systems and consists in establishing the fundamental possibility of transferring an control object from one state to another using information about its state variables.

From the point of view of obtaining further scientifically based results in the field of control theory one of the most popular objects is the gyroscopic system. This work is devoted to the study of the controllability problem of a dynamical system with a gyroscopic structure under the influence of dissipative and radial correction forces with a certain nonlinear external disturbances of mixed type described with the refined mathematical model, that is presented in the form of linearizing differential equations with a nonlinear right-hand side and, depending from the certain physical limitations of the object, has two different forms of presentation – with the existing possibility (impossibility) of union of disturbing forces acting on the system. For each of obtained models are constructed the models in state variables, according to which an analysis of the system's controllability is carried out. As a result of the analysis the conditions for complete controllability are satisfied for the studied system. Moreover, it was determined that the results of the analysis of the controllability of the studied system are affected only by the results of the study of one of the obtained controllability matrices compiled for the case of the existing possibility of combining disturbing forces. The use of another form of representation of model turned out to be less popular due to the complication of the corresponding controllability matrix along with the coincidence of the results obtained for the second model.

Вступ

При дослідженні об'єктів (процесів) різної фізичної природи, в тому числі і технічної, досить часто виникає необхідність покращення їх динамічних властивостей, коригування вхідних параметрів моделей, що описують рух досліджуваних процесів та об'єктів, стабілізації нестійких об'єктів (процесів), тобто виникає необхідність змінювання досліджуваних об'єктів (процесів) таким чином, щоб характеризуючі їх показники відповідали певним вимогам [1-8]. Зазначені змінювання (покращення) в своїй більшості досягаються шляхом застосування до досліджуваних об'єктів (процесів) окремих видів керування та/або регулювання, які в свою чергу стають можливими в умовах, коли досліджувані об'єкти та процеси характеризуються властивістю повної або часткової (неповної) керованості, яка є вельми істотною для побудови працездатних систем автоматичного керування (регулювання) та полягає у встановленні принципової можливості переводу об'єкта (системи) керування з одного стану в інший з використанням інформації про всі його змінні стану, що в сутності і складає головну задачу керування, яка для об'єктів технічної спрямованості є особливо актуальною в умовах науково-технічного прогресу, що постійно ставить вимоги до покращення структурних особливостей та динамічних властивостей зазначених об'єктів. В таких умовах ризик помилкових висновків часто пов'язаний з неврахуванням некерованості об'єктів керування. Одним із особливо затребуваних об'єктом з точки зору отримання подальших науково обґрунтованих результатів та висновків в області керування та регулювання на сьогоднішній день виступає гіроскопічна система з досить широкою сферою застосування в різних областях науки і техніки [2-14]. Дослідження керованості гіроскопічних систем, які містять у своїй структурі гіроскопічні елементи (або гіроскопи загалом), має принципове значення у зв'язку із необхідністю реалізації подальшого модального, програмного, оптимального, адаптивного та інших видів керування й регулювання [10, 12-15]. Крім того, на результати дослідження керованості спирається дослідження спостережливості, чутливості, інваріантності, ідентифікованості, а також досяжності і адаптованості досліджуваних систем. З огляду на це дослідження керованості має визначальне значення при розв'язанні зазначених задач [2-4, 7, 10-14].

Дана робота присвячена дослідженню проблеми керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, описуваних за допомогою лініаризованих диференціальних рівнянь зі складеною нелінійною правою частиною.

Мета, об'єкт та предмет дослідження

Метою роботи є дослідження керованості лінійної моделі динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного змішаного виду зовнішніх збурень; визначення умов, за якими система є повністю та/або частково керованою й некерованою.

Об'єктом дослідження в роботі виступає математична модель динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, яка описується лінеаризованими неоднорідними диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами.

Предметом дослідження є властивість керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою.

Для реалізації сформульованої мети були поставлені наступні завдання:

– побудова лінійних моделей динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень для випадків, коли враховується об'єднання зовнішніх збурень та їх відокремленість;

– зведення побудованих лінійних моделей динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та певного змішаного виду зовнішніх збурень до моделей у змінних стану з виділенням фазових змінних стану системи та функцій керування;

– побудова матриць керованості досліджуваної системи, динаміка руху якої описується за допомогою отриманих моделей у змінних стану;

– проведення поелементного аналізу матриць керованості на відповідність алгебраїчному критерію керованості Р. Калмана для лінійних стаціонарних систем керування;

– за результатами проведеного аналізу матриць керованості визначення умов повної та/або часткової керованості та некерованості досліджуваної системи з гіроскопічною структурою;

– формулювання загальних висновків за результатами проведеного в роботі дослідження.

Математичні моделі руху досліджуваної динамічної системи

Перш ніж перейти до аналізу керованості досліджуваної динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції, побудуємо описуючу її поведінку математичну модель – рівняння руху, які відтворюють зміни в гіроскопічній системі, що відбуваються з плином часу, та відображають особливості її функціонування в умовах дії зовнішніх факторів (збурень) певного змішаного виду.

Побудова математичної моделі досліджуваної системи відбувається шляхом уточнення існуючої лінеаризованої математичної моделі гіроскопічної системи, описуваної Меркіним Д.Р. рівняннями виду [15, 16]

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} - H\dot{\beta} - k\beta = X_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}), \\ A\ddot{\beta} + b\dot{\beta} + H\dot{\alpha} + k\alpha = X_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}), \end{cases} \tag{1}$$

де A – екваторіальний момент інерції гіроскопічної системи; H – власний кінетичний момент; b – коефіцієнт сил опору; k – крутизна характеристики моментних датчиків; $H\dot{\beta}, -H\dot{\alpha}$ – гіроскопічні сили; $k\beta, -k\alpha$ – неконсервативні сили (сили радіальної корекції); $-b\dot{\alpha}, -b\dot{\beta}$ – дисипативні сили; $X_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$ та $X_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$ – нелінійні члени, що являють собою неявні функції часу.

Уточнення моделі, описуваної системою (1), здійснюється шляхом застосування підходу Лазарєва Ю. Ф., Бондаря П. М. [9], за яким нелінійні члени $X_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$ та $X_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$ системи (1) представляються у вигляді

$$\begin{aligned} X_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) &= N - R\sin\beta_{сер}, \\ X_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) &= L, \end{aligned} \tag{2}$$

де N – момент зовнішніх сил, які діють на гіроскопічну систему вздовж зовнішньої осі; L – момент зовнішніх сил, які діють на систему вздовж внутрішньої осі; R – момент зовнішніх сил, які діють вздовж головної осі гіроскопічної системи; зазначені моменти зовнішніх сил змінюються у часі відповідно до певного закону, зазвичай гармонійного [9, 15-17]: $N = N(t)$, $L = L(t)$, $R = R(t)$; $\sin\beta_{сер} = const$ – усереднене значення кута повороту β, отримуване при здійсненні лінеаризації вихідних рівнянь системи за умови припущення про його мале змінювання в часі у тригонометричних виразах моделі.

Застосовуючи підхід Лазарєва Ю. Ф. та Бондаря П. М. до моделі, описуваної рівняннями (1), та припускаючи, що моменти зовнішніх сил, діючих на досліджувану гіроскопічну систему, змінюються з плином часу відповідно до заданого змішаного закону (сталого, лінійного, квадратичного й гармонійного), тобто подаючи нелінійні збурюючи сили $X_1(\alpha,\beta,\dot\alpha,\dot\beta)$ та $X_2(\alpha,\beta,\dot\alpha,\dot\beta)$ системи (1) у вигляді (2), вважаючи при цьому, що

$$\begin{gathered} f_1(t) = N(t) - R(t)\sin\beta_{сер} = \\ = u_1(t) - u_2(t)\sin\beta_{сер}, \\ f_2(t) = L(t) = u_3(t), \end{gathered} \tag{3}$$

де $u_i(t) = g_i^0 + g_i^1 t + g_i^2 t^2 + g_i^3 \sin(\omega_i t + \varepsilon_i)$, $i = \overline{1,3}$; g_i^j, ω_i, ε_i $\left(i = \overline{1,3},\ j = \overline{0,3}\right)$ – відомі сталі, отримаємо лінеаризовану математичну модель динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень $f_i(t)$, $i = 1,2$, вигляду

$$\begin{cases} A\ddot\alpha + b\dot\alpha - H\dot\beta - k\beta = u_1(t) - u_2(t)\sin\beta_{сер}, \\ A\ddot\beta + b\dot\beta + H\dot\alpha + k\alpha = u_3(t) \end{cases} \tag{4}$$

або у випадку, коли є можливим на фізичному рівні об’єднання збурюючих сил, що виступають в якості керувань, отримаємо лінеаризовану математичну модель динамічної системи вигляду

$$\begin{cases} A\ddot\alpha + b\dot\alpha - H\dot\beta - k\beta = \tilde u_1(t), \\ A\ddot\beta + b\dot\beta + H\dot\alpha + k\alpha = u_3(t), \end{cases} \tag{5}$$

де $\tilde u_1(t) = \tilde g_1^0 + \tilde g_1^1\, t + \tilde g_1^2\, t^2 + g_1^3 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + {} + \tilde g_2^3 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2)$ – об’єднані керування; $\tilde g_1^j = g_1^j - g_2^j \sin\beta_{сер}$, $j = \overline{0,2}$; $\tilde g_2^3 = {} = -g_2^3 \sin\beta_{сер}$; $u_3(t) = g_3^0 + g_3^1\, t + g_3^2\, t^2 + {} + g_3^3 \sin(\omega_3 t + \varepsilon_3)$.

Отримані системи (4) та (5), в порівнянні з системою (1), враховують збурюючі сили $f_1(t) = u_1(t) - u_2(t)\sin\beta_{сер}$ (для системи (4)), $f_1(t) = \tilde u_1(t)$ (для системи (5)) та $f_2(t) = u_3(t)$, які явно залежать від часу та які, в залежності від значень коефіцієнтів g_i^j $\left(i = \overline{1,3},\ j = \overline{0,3}\right)$ можуть діяти за окремим відповідним законом збурення, що в свою чергу дозволяє розширювати сферу використання пропонованої математичної моделі досліджуваної динамічної системи.

Крім того, за виглядом рівнянь (4) та (5) можна зробити висновок, що досліджувану динамічну систему можна розглядати як систему автоматичного керування, в якій входами (вхідними сигналами) будуть виступати моменти сил $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ (для системи (4)) та $\tilde u_1(t), u_3(t)$ (для системи (5)), а виходами (вихідними сигналами) – кути повороту α та β.

У зв’язку з таким розумінням змінних моделей можна зробити висновок, що представлена математична модель досліджуваної гіроскопічної системи, описувана рівняннями (4) або (5), являє собою математичну модель системи керування у змінних вхід-вихід, яка встановлює безпосередній зв’язок між діючими на систему вхідними та вихідними сигналами (характеристиками), які являють собою вимірювані фізичні змінні, характеризуючі динамічні процеси у досліджуваній системі. Для такої моделі визначення керованості не є доступним, оскільки виступає властивістю моделей систем керування у просторі станів. Тому насамперед в роботі ставиться задача зведення математичної моделі досліджуваної системи у змінних вхід-вихід до моделі у змінних стану, для якої дослідження керованості об’єкта стає можливим.

Для переходу до моделі у змінних стану розв’яжемо рівняння в системах (4) та (5) відносно прискорень $\ddot\alpha$ та $\ddot\beta$ відповідно:

$$\begin{cases} \ddot\alpha = \dfrac{1}{A}u_1(t) - \dfrac{\sin\beta_{сер}}{A}u_2(t) - \dfrac{b}{A}\dot\alpha + \dfrac{H}{A}\dot\beta + \dfrac{k}{A}\beta, \\ \ddot\beta = \dfrac{1}{A}u_3(t) - \dfrac{b}{A}\dot\beta - \dfrac{H}{A}\dot\alpha - \dfrac{k}{A}\alpha, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \dfrac{1}{A}\tilde{u}_1(t) - \dfrac{b}{A}\dot{\alpha} + \dfrac{H}{A}\dot{\beta} + \dfrac{k}{A}\beta, \\ \ddot{\beta} = \dfrac{1}{A}u_3(t) - \dfrac{b}{A}\dot{\beta} - \dfrac{H}{A}\dot{\alpha} - \dfrac{k}{A}\alpha. \end{cases} \tag{7}$$

Використовуючи підхід [4, 17, 18], визначимо змінні станів та керування досліджуваної системи та побудуємо математичні моделі лінійної стаціонарної системи керування, описуваної рівняннями (6) та (7), у змінних стану. В якості змінних станів системи оберемо існуючі фізичні змінні – кути поворотів α, β та кутові швидкості $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, в якості керувань в такому випадку будуть виступати моменти сил $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ (для системи (6)) та $\tilde{u}_1(t), u_3(t)$ (для системи (7)). Тоді вектор станів для систем (6) та (7) набуде вигляду

$$\mathbf{X} = \left[\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}\right]^T = \left[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\right]^T,$$

вектор керувань задаватиметься у вигляді $\mathbf{U} = \left[N(t), R(t), L(t)\right]^T = \left[u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right]^T$ (для моделі, описуваної системою (6)) та $\tilde{\mathbf{U}} = \left[N(t) - \sin\beta_{cep}R(t), L(t)\right]^T = \left[\tilde{u}_1(t), u_3(t)\right]^T$ (для моделі, описуваної системою (7)).

Тоді для моделей, описуваних системами (6) та (7), можна ввести співвідношення вигляду

$$\begin{aligned} \alpha &= x_1 = y_1, \qquad \beta = x_2 = y_2, \\ \dot{\alpha} &= \dot{x}_1 = x_3, \qquad \dot{\beta} = \dot{x}_2 = x_4, \end{aligned} \tag{8}$$

з урахуванням яких рівняння стану для моделей, описуваних системами (6) та (7), перепишуться відповідно наступним чином:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{k}{A}x_2 - \dfrac{b}{A}x_3 + \dfrac{H}{A}x_4 + \dfrac{1}{A}u_1(t) - \dfrac{\sin\beta_{cep}}{A}u_2(t), \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{k}{A}x_1 - \dfrac{H}{A}x_3 - \dfrac{b}{A}x_4 + \dfrac{1}{A}u_3(t), \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{k}{A}x_2 - \dfrac{b}{A}x_3 + \dfrac{H}{A}x_4 + \dfrac{1}{A}\tilde{u}_1(t), \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{k}{A}x_1 - \dfrac{H}{A}x_3 - \dfrac{b}{A}x_4 + \dfrac{1}{A}u_3(t). \end{cases} \tag{10}$$

Рівняння виходу для моделей, описуваних системами (6) та (7), співпадають та, з урахуванням (8), мають вигляд

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{cases} \tag{11}$$

Сукупність рівнянь (9), (11) (у випадку, коли на фізичному рівні неможливо об’єднувати збурюючі сили) та (10), (11) (у випадку, коли є можливим вказане об’єднання) визначає математичні моделі розглядуваної динамічної системи у змінних стану в стандартній формі, які в векторно-матричному вигляді можна представити відповідно наступним чином:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{A}\mathbf{X} + \tilde{B}\mathbf{U}, \\ \mathbf{Y} = \tilde{C}\mathbf{X}, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{A}\mathbf{X} + \tilde{\tilde{B}}\tilde{\mathbf{U}}, \\ \mathbf{Y} = \tilde{C}\mathbf{X}, \end{cases} \tag{13}$$

де $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ – вектор стану системи розмірності $n \times 1$; $\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3]^T$ – вектор керування розмірності $m \times 1$; $\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{u}_1(t), u_3(t)]^T$ – вектор керування розмірності $\tilde{m} \times 1$; $\mathbf{Y} = [y_1, y_2]^T$ – вектор виходу системи розмірності $r \times 1$; $\tilde{A} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n \times n}$ –

матриця стану системи; $\tilde{B}=\left[\tilde{b}_{ij}\right]_{n\times m}$, $\tilde{\tilde{B}}=\left[\tilde{\tilde{b}}_{ij}\right]_{n\times\tilde{m}}$ – матриці керуючих впливів системи; $\tilde{C}=\left[\tilde{c}_{ij}\right]_{r\times n}$ – матриця виходу системи; матриці $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\tilde{B}}$, $\tilde{C}$ визначаються наступним чином:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{A} & -\frac{b}{A} & \frac{H}{A} \\ -\frac{k}{A} & 0 & -\frac{H}{A} & -\frac{b}{A} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & -\frac{\sin\beta_{cep}}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tilde{B}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отримані математичні моделі у змінних стану, описувані системами (9), (11) або (12) (у випадку, коли на фізичному рівні неможливо об’єднувати збурюючі сили) та (9), (10) або (13) (у випадку, коли є можливим вказане об’єднання) пов’язують вхідні сигнали $u_i(t)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ або $\tilde{u}_i(t)$ $\left(i=\overline{1,\tilde{m}}\right)$ з вихідними сигналами $y_i(t)$ $\left(i=\overline{1,r}\right)$ через проміжні змінні $x_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ стану досліджуваної динамічної системи. Такі моделі систем керування можуть бути досліджено на різні фундаментальні динамічні властивості систем керування у просторі станів, в тому числі на керованість систем. При цьому досить важливим при такому дослідженні є те, щоб для описуваної динамічної системи про вектор стану була в наявності повна інформація, тобто всі його компоненти мають бути доступними для вимірювання, структура математичної моделі також має бути повністю визначеною. У тому випадку, якщо про стан об’єкта або структуру моделі немає повної інформації, виникає необхідність у розв’язанні додаткових задач – відповідно задач спостереження та ідентифікації, які дозволяють оцінити елементи вектора стану і тим самим відновити його значення, уточнити структуру і параметри моделей з тим, щоб в подальшому використовувати отримані результати для керування та регулювання досліджуваними системами. В подальшому будемо вважати, що досліджувана динамічна система функціонує в умовах наявності повної інформації про вектор стану і структуру математичної моделі об’єкта дослідження.

Визначившись з математичними моделями досліджуваної системи керування, придатними для проведення аналізу керованості об’єкта, перейдемо тепер до розкриття змісту поняття керованості об’єкта та оцінки зазначеної властивості об’єкта дослідження, яким в даній роботі виступає лінеаризована стаціонарна математична модель динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень.

Дослідження керованості гіроскопічної системи

Перш ніж перейти до безпосереднього аналізу керованості досліджуваної динамічної системи, розкриємо поняття керованості системи керування та визначимо основні критерії повної (часткової) керованості та некерованості для лінійних стаціонарних систем у змінних стану.

Вивчення питання керованості в задачах дослідження систем керування, об’єднуючих в своїй структурі визначену певним чином сукупність окремо обраних матеріальних об’єктів, на поведінку яких у часі можна впливати вибором цілеспрямованих зовнішніх впливів, відіграє досить важливу роль у зв’язку з тим, що, по-перше, виконуваність даної властивості вказує на те, що досліджувана система керування може бути переведена з одного стану в інший з використанням інформації про всі її змінні стану, та, по-друге, на результати дослідження керованості спирається дослідження інших фундаментальних динамічних властивостей систем керування – спостережливості, чутливості, інваріантності, ідентифікованості, досяжності, адаптованості досліджуваних систем та ін., на результати аналізу яких спираються подальші дослідження в області модального, програмного, оптимального, адаптивного та інших видів керування й регулювання досліджуваних систем керування.

Спираючись на фундаментальні постулати теорії автоматичного керування, які виступають основою для здійснюваних в роботі досліджень, керованість системи керування, за Р. Калманом [2, 5, 9, 18-20], визначає, що система керування, представлена у формі простору станів, може бути переведена з будь-якого визначеного початкового стану $X(t_0)=(x_1(t_0),\dots,x_n(t_0))^T$ в будь-який заданий кінцевий стан $X(T)=(x_1(T),\dots,x_n(T))^T$ за кінцевий час $t\in[t_0,T]$ шляхом застосування допустимого керування $U(t)=(u_1(t),\dots,u_m(t))^T$ з використанням інформації про всі змінні стану $X(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))^T$ системи керування.

В такому формулюванні проводиться аналіз керованості досліджуваної в роботі динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил, сил радіальної корекції та змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується математичними моделями у змінних стану, які, в залежності від існування принципової можливості об'єднання збурюючих сил, що діють на систему, подаються у векторно-матричній формі відповідно у вигляді рівнянь (12) та (13) та в узагальненій формі подаються системою наступного вигляду:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{X}}=\tilde{A}\mathbf{X}+B^{*}\mathbf{U}^{*},\\ \mathbf{Y}=\tilde{C}\mathbf{X},\end{cases}\tag{14}$$

де $B^{*}=\tilde{B}$, $\mathbf{U}^{*}=\mathbf{U}$ (при $f_1(t)=u_1(t)-u_2(t)\sin\beta_{сер}$, $f_2(t)=u_3(t)$); $B^{*}=\tilde{\tilde{B}}$, $\mathbf{U}^{*}=\tilde{\mathbf{U}}$ (при $f_1(t)=\tilde{u}_1(t)$, $f_2(t)=u_3(t)$).

Для моделей, описуваних лінійною стаціонарною системою (14), оцінювання керованості здійснюється відповідно до алгебраїчного критерію Р. Калмана [2, 5, 8, 18, 20], згідно з яким необхідною і достатньою умовою повної керованості системи керування, описуваної системою вигляду

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{X}}=F\mathbf{X}+G\mathbf{U},\\ \mathbf{Y}=P\mathbf{X}+S\mathbf{U}\end{cases}\tag{14}$$

при $\mathbf{X}=[x_1,\dots,x_n]^T$, $\mathbf{U}=[u_1,\dots,u_m]^T$, $\mathbf{Y}=[y_1,\dots,y_r]^T$, $F=[f_{ij}]_{n\times n}$, $G=[g_{ij}]_{n\times m}$, $P=[p_{ij}]_{r\times n}$, $S=[s_{ij}]_{r\times m}$, є виконання рангової умови для відповідної матриці керованості

$$rank\,[W_{kep}]_{n\times nm}=rank\begin{bmatrix}G & \vdots & FG & \vdots & F^2G & \vdots & \dots & \vdots & F^{n-1}G\end{bmatrix}_{n\times nm}=n,\tag{15}$$

тобто за яким ранг матриці керованості W_{kep} співпадає із розмірністю простору стану n системи (14).

Для досліджуваної динамічної системи, описуваної узагальненими рівняннями у змінних стану (14), отримано наступні матриці керованості:

$$\tilde{W}_{kep}=\left[\tilde{B}\,\vdots\,\tilde{A}\tilde{B}\,\vdots\,\tilde{A}^2\tilde{B}\,\vdots\,\tilde{A}^3\tilde{B}\right]=[W_1\quad W_2\quad W_3\quad W_4\quad W_5\quad W_6\quad W_7\quad W_8\quad W_9\quad W_{10}\quad W_{11}\quad W_{12}],\tag{16}$$

$$\tilde{\tilde{W}}_{kep}=\left[\tilde{\tilde{B}}\,\vdots\,\tilde{A}\tilde{\tilde{B}}\,\vdots\,\tilde{A}^2\tilde{\tilde{B}}\,\vdots\,\tilde{A}^3\tilde{\tilde{B}}\right]=[W_1\quad W_3\quad W_4\quad W_6\quad W_7\quad W_9\quad W_{10}\quad W_{12}],\tag{17}$$

де W_i $\left(i=\overline{1,12}\right)$ – стовпці матриці керованості (16):

$$W_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\dfrac{1}{A}\\0\end{bmatrix};\; W_2=\begin{bmatrix}0\\0\\-\dfrac{\sin\beta_{cep}}{A}\\0\end{bmatrix};\; W_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\dfrac{1}{A}\end{bmatrix};\; W_4=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A}\\0\\-\dfrac{b}{A^2}\\-\dfrac{H}{A^2}\end{bmatrix};\; W_5=\begin{bmatrix}-\dfrac{\sin\beta_{cep}}{A}\\0\\\dfrac{b\sin\beta_{cep}}{A^2}\\\dfrac{H\sin\beta_{cep}}{A^2}\end{bmatrix};\; W_6=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{A}\\\dfrac{H}{A^2}\\-\dfrac{b}{A^2}\end{bmatrix};$$

$$W_7=\begin{bmatrix}-\dfrac{b}{A^2}\\-\dfrac{H}{A^2}\\-\dfrac{H^2-b^2}{A^3}\\\dfrac{2bH-Ak}{A^3}\end{bmatrix};\quad W_8=\begin{bmatrix}\dfrac{b\sin\beta_{cep}}{A^2}\\\dfrac{H\sin\beta_{cep}}{A^2}\\\dfrac{\left(H^2-b^2\right)\sin\beta_{cep}}{A^3}\\-\dfrac{\left(2bH-Ak\right)\sin\beta_{cep}}{A^3}\end{bmatrix};$$

$$W_9=\begin{bmatrix}\dfrac{H}{A^2}\\-\dfrac{b}{A^2}\\-\dfrac{\left(2bH-Ak\right)}{A^3}\\-\dfrac{\left(H^2-b^2\right)}{A^3}\end{bmatrix};\quad W_{10}=\begin{bmatrix}-\dfrac{H^2-b^2}{A^3}\\\dfrac{2bH-Ak}{A^3}\\\dfrac{-b^3+3bH^2-2AHk}{A^4}\\\dfrac{H^3-3b^2H+2Abk}{A^4}\end{bmatrix};$$

$$W_{11}=\begin{bmatrix}\dfrac{\left(H^2-b^2\right)\sin\beta_{cep}}{A^3}\\-\dfrac{\left(2bH-Ak\right)\sin\beta_{cep}}{A^3}\\-\dfrac{\left(-b^3+3bH^2-2AHk\right)\sin\beta_{cep}}{A^4}\\-\dfrac{\left(H^3-3b^2H+2Abk\right)\sin\beta_{cep}}{A^4}\end{bmatrix};\quad W_{12}=\begin{bmatrix}-\dfrac{2bH-Ak}{A^3}\\-\dfrac{H^2-b^2}{A^3}\\-\dfrac{H^3-3b^2H+2Abk}{A^4}\\\dfrac{-b^3+3bH^2-2AHk}{A^4}\end{bmatrix}.$$

Аналізуючи отримані в (16) та (17) матриці керованості $\tilde{W}_{kep}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$, отримуємо наступні результати:

а) в матриці керованості $\tilde{W}_{kep}$ стовпці W_2, W_5, W_8 та W_{11} є лінійно залежними від стовпців W_1, W_4, W_7 та W_{10} відповідно;

б) в матриці керованості $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$, в порівнянні з матрицею $\tilde{W}_{kep}$, стовпці W_2, W_5, W_8 та W_{11} відсутні у зв'язку з тим, що матриця $\tilde{\tilde{B}}$ не містить другого стовпця (порівняно з матрицею $\tilde{B}$), всі інші стовпці в матрицях $\tilde{W}_{kep}$ та $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$ співпадають. У цьому зв'язку можна зробити висновок, що на результати аналізу керованості досліджуваної системи істотним чином впливають тільки результати дослідження матриці керованості $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$;

в) якщо привести матрицю керованості $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$ за допомогою елементарних перетворень над строками до вигляду

$$\tilde{\tilde{W}}_{kep}==\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A} & 0 & -\dfrac{b}{A^2} & \dfrac{H}{A^2} & -\dfrac{H^2-b^2}{A^3} & -\dfrac{\left(2bH-Ak\right)}{A^3} & \dfrac{-b^3+3bH^2-2AHk}{A^4} & -\dfrac{H^3-3b^2H+2Abk}{A^4}\\ 0 & \dfrac{1}{A} & -\dfrac{H}{A^2} & -\dfrac{b}{A^2} & \dfrac{2bH-Ak}{A^3} & -\dfrac{H^2-b^2}{A^3} & \dfrac{H^3-3b^2H+2Abk}{A^4} & \dfrac{-b^3+3bH^2-2AHk}{A^4}\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{A} & 0 & -\dfrac{b}{A^2} & \dfrac{H}{A^2} & -\dfrac{H^2-b^2}{A^3} & -\dfrac{2bH-Ak}{A^3}\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{A} & -\dfrac{H}{A^2} & -\dfrac{b}{A^2} & \dfrac{2bH-Ak}{A^3} & -\dfrac{H^2-b^2}{A^3}\end{bmatrix},$$

можна побачити, що перші чотири її стовпці утворюють ступінчасту матрицю

$$L=\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 & -\frac{b}{A^2} & \frac{H}{A^2} \\ 0 & \frac{1}{A} & -\frac{H}{A^2} & -\frac{b}{A^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}=\frac{1}{A^4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{b}{A} & \frac{H}{A} \\ 0 & 1 & -\frac{H}{A} & -\frac{b}{A} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

для якої $\det(L)=\frac{1}{A^n}=\frac{1}{A^4}\neq 0$, а, отже, вказані стовпці є лінійно незалежними і ранг матриці керованості $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$ дорівнює числу ненульових строк отриманої ступінчастої матриці L (для досліджуваної системи $rank\left[\tilde{\tilde{W}}_{kep}\right]_{4\times 8}=rank[L]_{4\times 4}=4$), тобто виконується рангова умова $rank\left[\tilde{\tilde{W}}_{kep}\right]_{n\times nm}=rank[L]_{n\times n}=n$, що означає, що досліджувана динамічна система з моделлю, описуваною рівняннями (13), є повністю керованою. При цьому лінійна незалежність перших чотирьох стовпців матриці $\tilde{\tilde{W}}_{kep}$ зберігається при $A\neq 0$ для довільних значень сталих H, b, k, що своєю чергою означає, що для досліджуваної динамічної системи не існує випадків, коли вона є не повністю (частково) керованою або некерованою.

Крім того, на основі отриманих результатів дослідження матриць керованості можна також зробити висновок, що на результати такого дослідження невраховування об’єднання зовнішніх сил в первісних математичних моделях досліджуваної системи, описуваних рівняннями (4) та (5) відповідно, не тільки не впливає, а й значно ускладнює матрицю керованості $\tilde{W}_{kep}$, складену для випадку, коли зазначене об’єднання зовнішніх сил в правій частині першого з рівнянь (4) не представляється можливим. Тому, якщо структурно досліджувана динамічна система дозволяє проводити таке з’єднання зовнішніх збурень, можна рекомендувати використання математичної моделі, описуваної рівняннями (5).

Висновки

У роботі проведено дослідження властивості керованості динамічної системи з гіроскопічною структурою при дії дисипативних сил та сил радіальної корекції з урахуванням певного нелінійного змішаного виду зовнішніх збурень, динаміка руху якої описується за допомогою побудованої уточненої лініаризованої неперервної математичної моделі, що являє собою систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку з складеною нелінійною правою частиною. В залежності від можливості об’єднання діючих на досліджувану систему зовнішніх збурень, отримана в роботі модель динамічної системи представлена у двох можливих її варіантах подання. За кожною з одержаних, таким чином, математичних моделей, з метою отримання більш зручної форми моделей, побудовано математичні моделі досліджуваної динамічної системи у змінних стану, за якими своєю чергою проведено аналіз керованості досліджуваної системи керування.

За результатами проведеного дослідження керованості для системи, описуваної зазначеними математичними моделями у змінних стану, визначено, що досліджувана система за будь-яких значень власного кінетичного моменту, коефіцієнтів сил дисипації та коефіцієнтів крутизни характеристики моментних датчиків є повністю керованою, а, отже, доступною для здійснення подальшого керування та регулювання. Крім того, в роботі встановлено, що на результати аналізу керованості досліджуваної системи істотним чином впливають тільки результати дослідження однієї з отриманих матриць керованості, а саме тієї, яка характерна для системи з моделлю, отриманою в умовах, коли є можливим об'єднання збурюючих нелінійних сил, діючих на досліджувану систему. Більш того, на результати такого дослідження невраховування об'єднання зовнішніх сил в первісних математичних моделях досліджуваної системи не тільки не впливає, а й значно ускладнює матрицю керованості, складену для випадку, коли зазначене об'єднання зовнішніх сил не представляється можливим.

Наостанок зауважимо, що отримані в роботі результати можуть бути використані при здійсненні подальшого аналізу фундаментальних властивостей динамічних систем, для розширення використання досліджуваних математичних моделей та підвищення динамічних властивостей досліджуваного об'єкта шляхом застосування різних видів автоматичного керування й регулювання.

Література

1. Абгарян К. А. Динамика ракет. Москва: Машиностроение, 1969. 378 с.
2. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. Москва: Наука, 1976. 424 с.
3. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. Москва: Наука, 1969. 512 с.
4. Егоров А. И. Основы теории управления. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 504 с.
5. Kvakernaak H., Siwan R. Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-lnterscience, 1972. 575 p.
6. Кириченко Н. Ф., Матвиенко В. Т. Оптимальный синтез структур для линейных систем управления. *Проблемы управления и информатики*. 1996. № 1,2. С. 162–171.
7. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Москва: Наука, 1968. 476 с.
8. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. Москва: Наука, 1971. 396 с.
9. Лазарєв Ю. Ф., Бондар П. М. Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації. Київ: Політех, 2010. 625 с.
10. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Вопросы методологии анализа, управления, регулирования, идентификации и наблюдения гироскопических систем. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 157–169.
11. Jafarpour S. On Small-Time Local Controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2019. 58:1. 425-446 p.
12. Moreau C. Local Controllability of a Magnetized Purcell's Swimmer. *IEEE Control Systems Letters*, 2019. 3:3. 637–642 p.
13. Dath M., Jouan P. Controllability of linear systems on Heisenberg groups. *International Journal of Control*, 2019. 1–10 p.
14. Vrabel R. Local null controllability of the control-affine nonlinear systems with time-varying disturbances. *European Journal of Control*. 2018. 40. 80–86 p.
15. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. Москва: Наука, 1974. 344 с.
16. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва: Наука, 1971. 312 с.
17. Новицкий В. В. Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки. *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування*. Київ: Ін-т математики НАН України. 2008. Т. 78. 124 с.
18. Справочник по теории автоматического управления: Красовский А. А. (ред.). Москва: Наука, 1987. 712 с.
19. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. Москва: Наука, 1979. 336 с.
20. Леонтьева В. В., Кондратьева Н. А. Управляемость позитивной динамической системы балансового типа. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2011. № 1. С. 58–66.

References

1. Abgaryan, K. A. (1969). The dynamics of rockets. Moscow: Mashinostroyeniye.
2. Andreev, Yu. N. (1976). Control of finite-dimensional linear objects. Moscow: Nauka.
3. Gnoensky, L. S., Kamensky, G. A. & Elzholtz, L. E. (1969). Mathematical foundations of the theory of controllable systems. Moscow: Nauka.
4. Egorov, A. I. (2004). Fundamentals of control theory. Moscow: Fizmatlit.
5. Kvakernaak, H. & Siwan, R. (1972). Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley-lnterscience.
6. Kirichenko, N. F., Matvienko V. T. (1996). Optimal synthesis of structures for linear control systems. Problems of control and informatics, No. 1,2, pp. 162–171.
7. Krasovsky, N. N. (1968). Motion control theory. Moscow: Nauka.
8. Roitenberg, E. N. (1971). Automatic control. Moscow: Nauka.
9. Lazarev, Yu. F. & Bondar, P. M. (2010). Fundamentals of the theory of sensitive elements of orientation systems. Kiev: Polytech.
10. Leontieva, V. V. & Kondratieva, N. A. (2017). Questions about methodology of analysis, control, regulation, identification and observation of gyroscopic systems. Visnyk Zaporiz'koho natsional'noho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 2, pp. 157–169.
11. Jafarpour, S. (2019) On Small-Time Local Controllability. SIAM Journal on Control and Optimization, 58:1, pp. 425-446.
12. Moreau, C. (2019). Local Controllability of a Magnetized Purcell’s Swimmer. IEEE Control Systems Letters, 3:3, pp. 637–642.
13. Dath, M., Jouan, P. (2019). Controllability of linear systems on Heisenberg groups. International Journal of Control, pp. 1–10.
14. Vrabel, R. (2018). Local null controllability of the control-affine nonlinear systems with time-varying disturbances. European Journal of Control, 40, pp. 80–86.
15. Merkin, D. R. (1974). Gyroscopic systems. Moscow: Nauka.
16. Merkin, D. R. (1971). Introduction to Motion Stability Theory. Moscow: Nauka.
17. Novitsky, V. V. (2008). Control of gyroscopic systems and other problems of analytical mechanics. Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its application. Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Vol. 78.
18. Krasovsky, A. A. (Ed.). (1987). A handbook on the theory of automatic control. Moscow: Nauka.
19. Voronov, A. A. (1979). Stability, controllability, observability. Moscow: Nauka.
20. Leontieva, V. V., Kondratieva, N. A. (2011). Controllability of a positive dynamical system of balanced type. Visnyk Zaporizʹkoho natsionalʹnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky, No. 1, pp. 58–66.